Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Der Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke.

§ 22. **Der Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke** wird gefunden, indem man zunächst den Flächeninhalt des (gleichschenkligen) „Bestimmungsdreieckes“ A O B (Fig. 45) berechnet und diesen mit der Seitenzahl des Polygons multipliziert.

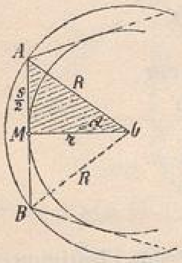

Fig. 45.

1. Aufgabe. Es ist eine Formel aufzustellen, nach welcher der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes aus seiner Seite berechnet werden kann.

Bezeichnet n die Anzahl der Polygonsseiten, so ist im $\triangle$ OMA . . . $\sphericalangle\, \alpha = \frac{180^0}{n}$

$$r = \frac{s}{2} \cot g\, \alpha$$

Der Flächeninhalt f des Dreieckes A O B ist:

$$f = \frac{s}{2} \cdot r$$

$$f = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \cot g\, \alpha$$

$$f = \frac{s^2}{4} \cot g\, \alpha$$

somit der Flächeninhalt F des ganzen Vieleckes

$$\mathbf{F = n\, \frac{s^2}{4} \cot g\, \frac{180^0}{n}} \quad . . . \text{ (I)}$$

2. Aufgabe. Es ist eine Formel aufzustellen, nach welcher der Flächeninhalt eines regulären Vieleckes aus dem Halbmesser R des umschriebenen Kreises berechnet werden kann.

Nach § 21 ergibt sich:

$$f = \frac{R^2}{2} \sin A O B$$

und da $\sphericalangle\, A O B = \frac{360^0}{n}$

und $F = n f$ ist,

so ist $\mathbf{F = n\, \frac{R^2}{2} \sin \frac{360^0}{n}}$ . . . (II)

Durch Anwendung der Formeln I und II auf das reguläre Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, Achteck, Neuneck, Zehneck, Zwölfeck und Fünfzehneck erhält man:

$u = n \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \frac{180}{n}$ $\quad F = \frac{\frac{u}{2 \sin \frac{180}{n}} \cdot R \sin \frac{360}{n}}{2}$

$F_3 = 0 \cdot 4330\ s^2$	$F_3 = 1 \cdot 2990\ R^2$	
$F_4 = 1 \cdot 0000\ s^2$	$F_4 = 2 \cdot 0000\ R^2$	
$F_5 = 1 \cdot 7205\ s^2$	$F_5 = 2 \cdot 3776\ R^2$	
$F_6 = 2 \cdot 5981\ s^2$ $s = R$	$F_6 = 2 \cdot 5981\ R^2$	$u = 6 \cdot R;\ \frac{F}{iw} = 0{,}433 \cdot R$
$F_7 = 3 \cdot 6339\ s^2$	$F_7 = 2 \cdot 7364\ R^2$	
$F_8 = 4 \cdot 8284\ s^2$	$F_8 = 2 \cdot 8284\ R^2$	
$F_9 = 6 \cdot 1818\ s^2$	$F_9 = 2 \cdot 8925\ R^2$	
$F_{10} = 7 \cdot 6942\ s^2$	$F_{10} = 2 \cdot 9389\ R^2$	
$F_{12} = 11 \cdot 1962\ s^2$ $s = \frac{R}{\sqrt{3{,}7321}}$ $1{,}93$	$F_{12} = 3 \cdot 0000\ R^2$	$u = 6{,}2 \cdot R;\ \frac{F}{iw} = 0{,}48 \cdot R$
$F_{15} = 17 \cdot 6424\ s^2$	$F_{15} = 3 \cdot 0505\ R^2$	

Übungsbeispiele.

1. Man berechne den Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfeckes, Siebeneckes Neuneckes und Zwölfeckes aus seiner Seite, wenn:

a) $s_5 = 37\ mm$ c) $s_9 = 12 \cdot 5\ cm$
b) $s_7 = 4 \cdot 5\ cm$ d) $s_{12} = 3 \cdot 25\ m$ ist.

2. Man berechne den Flächeninhalt eines regulären Fünfeckes, Achteckes, Zwölfeckes und Fünfzehneckes, welches einem Kreise vom Halbmesser $R = 12 \cdot 7\ cm$ eingeschrieben ist.

3. Eine auf Druck beanspruchte Säule aus Tannenholz hat ein regelmäßiges Sechseck von der Seitenlänge $s = 18 \cdot 5\ cm$ zum Querschnitt. Wie groß ist die zulässige Beanspruchung dieser Säule, wenn per 1 cm^2 Querschnitt 75 kg gerechnet werden dürfen?

4. Eine Säule überträgt auf den Boden einen vertikalen Druck $V = 13600\ kg$ und wird behufs besserer Druckverteilung auf eine regelmäßig-achteckige Platte von der Seitenlänge 25 cm gestellt. Welcher Druck wird durch die Platte auf jedes cm^2 des Bodens übertragen? Ist die Platte genügend groß, wenn die Tragfähigkeit des Bodens per 1 cm^2 4·8 kg beträgt?

5. Wie groß ist die Zug-Querschnittsfläche am Fuße eines achteckigen Fabriksschornsteines, wenn dieselbe ein regelmäßiges Achteck von 65 cm Seitenlänge bildet?

6. Die innere lichte Weite (der senkrechte Abstand zweier paralleler Gegenseiten) am Fuße eines regelmäßig-achteckigen Schornsteines beträgt 1·25 m. Wie groß ist die Zug-Querschnittsfläche?

Anleitung: Man berechne zunächst entweder die Seite des Achteckes oder den Halbmesser des umschriebenen Kreises.

7. Die Zug-Querschnittsfläche F eines regelmäßig-achteckigen Schornsteines soll am Fuße 1·5 m^2 betragen. Wie groß ist die Seite s und die lichte Weite w am Fuße der Schornsteinöffnung?

Anleitung: Es ist $F = 4 \cdot 8284\ s^2$

folglich $s^2 = \frac{F}{4 \cdot 8284}$

und $s = \sqrt{\frac{F}{4 \cdot 8284}}$

8. Der Querschnitt einer Lagerschale besteht aus einem halben regelmäßigen Achtecke von der Seite $s = 42$ *mm*, aus welchem ein Halbkreis vom Durchmesser $d = 80$ *mm* herausgeschnitten ist. Wie groß ist die Querschnittsfläche?

Resultate.

1. *a)* $2355\ mm^2$
   b) $73{\cdot}59\ cm^2$
   c) $965{\cdot}92\ cm^2$
   d) $118{\cdot}26\ m^2$

2. $F_5 = 383{\cdot}5\ cm^2$
   $F_8 = 456{\cdot}2\ cm^2$
   $F_{12} = 483{\cdot}87\ cm^2$
   $F_{15} = 492\ cm^2$

3. $66682\ kg$

4. $4{\cdot}506\ kg$
   Die Platte ist genügend groß.

5. $2{\cdot}04\ m^2$

6. $1{\cdot}294\ m^2$

7. $s = 0{\cdot}557\ m$
   $w = 1{\cdot}345\ m$

8. $f = 1745\ mm^2$

Anhang.

Zusammenhang zwischen den Funktionen eines und desselben Winkels.

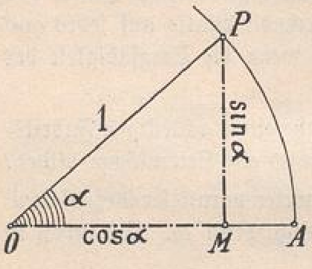

Fig. 46.

Wenn in Fig. 46 der Kreishalbmesser $OA = OP = 1$ ist, so geben die Maßzahlen der Strecken PM und OM nach § 2 unmittelbar den sinus, bezw. cosinus des Winkels α an. Durch Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf das rechtwinklige Dreieck OMP erhält man:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^{*)} \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

Aus dem Dreiecke OMP folgt ferner:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{OM}{PM} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

*) $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$. $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$.