



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Anhang.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76715](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76715)

8. Der Querschnitt einer Lagerschale besteht aus einem halben regelmäßigen Achteck von der Seite $s = 42 \text{ mm}$, aus welchem ein Halbkreis vom Durchmesser $d = 80 \text{ mm}$ herausgeschnitten ist. Wie groß ist die Querschnittsfläche?

Resultate.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. a) 2355 mm^2 | 4. 4506 kg |
| b) 7359 cm^2 | Die Platte ist genügend groß. |
| c) 96592 cm^2 | 5. 204 m^2 |
| d) 11826 m^2 | 6. 1294 m^2 |
| 2. $F_5 = 3835 \text{ cm}^2$ | 7. $s = 0557 \text{ m}$ |
| $F_8 = 4562 \text{ cm}^2$ | $w = 1345 \text{ m}$ |
| $F_{12} = 48387 \text{ cm}^2$ | 8. $f = 1745 \text{ mm}^2$ |
| $F_{15} = 492 \text{ cm}^2$ | |
| 3. 66682 kg | |

Anhang.

Zusammenhang zwischen den Funktionen eines und desselben Winkels.

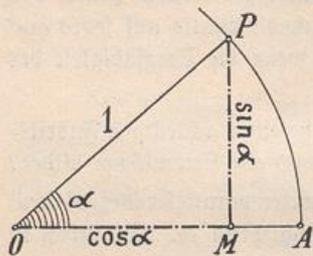


Fig. 46.

Wenn in Fig. 46 der Kreishalbmesser $OA = OP = 1$ ist, so geben die Maßzahlen der Strecken PM und OM nach § 2 unmittelbar den sinus, bzw. cosinus des Winkels a an. Durch Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf das rechtwinklige Dreieck OMP erhält man:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1^* \quad \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} \quad \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

Aus dem Dreieck OMP folgt ferner:

$$\operatorname{tg} a = \frac{PM}{OM} = \frac{\sin a}{\cos a} \quad \operatorname{cotg} a = \frac{OM}{PM} = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad \operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

*) $\sin^2 a = (\sin a)^2$. $\cos^2 a = (\cos a)^2$.

Mit Hilfe der vorstehenden Formeln vermag man, wenn der sinus (cosinus) eines Winkels gegeben ist, zunächst den cosinus (sinus) und hierauf den tangens und cotangens desselben Winkels zu berechnen:

$$\text{Ist z. B. } \sin \alpha = 0.6, \text{ so ist } \cos \alpha = \sqrt{1 - 0.6^2} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{0.6}{0.8} = 0.75 \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{0.8}{0.6} = 1.33333$$

Übungsbeispiele.

Man bestimme aus den folgenden Angaben cosinus, tangens und cotangens des betreffenden Winkels:

- | | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ | 2. $\sin 30^\circ = 0.5$ | 3. $\sin 20^\circ = 0.342$ |
| 2. $\sin 18^\circ = 0.309$ | 5. $\sin 56^\circ = 0.829$ | 6. $\sin 52^\circ = 0.788$ |

Man bestimme aus folgenden Angaben sinus, tangens und cotangens des betreffenden Winkels:

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 7. $\cos \alpha = \frac{12}{37}$ | 8. $\cos 36^\circ = 0.809$ | 9. $\cos 40^\circ = 0.766$ |
| 10. $\cos 47^\circ = 0.682$ | 11. $\cos 63^\circ = 0.454$ | 12. $\cos 59^\circ = 0.515$ |

Resultate.

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. $\frac{12}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}$ | 2. 0.8660, 0.5774, 1.732 |
| 3. 0.9397, 0.3640, 2.748 | 4. 0.9511, 0.3249, 3.078 |
| 5. 0.5592, 1.483, 0.6745 | 6. 0.6157, 1.280, 0.7813 |
| 7. $\frac{35}{37}, \frac{35}{12}, \frac{12}{35}$ | 8. 0.5878, 0.7265, 1.376 |
| 9. 0.6428, 0.8391, 1.192 | 10. 0.7314, 1.072, 0.9325 |
| 11. 0.8910, 1.963, 0.5095 | 12. 0.8572, 1.664, 0.6009 |

Goniometrische Gleichungen.

Ist ein Winkel dadurch bestimmt, daß eine Gleichung zwischen zwei (oder mehreren) seiner Funktionen gegeben ist, so nennt man diese eine goniometrische Gleichung. Um dieselbe zu lösen, d. h. den Winkel zu berechnen, muß man zunächst die Gleichung so umformen, daß darin nur eine Funktion des Winkels vorkommt.

Folgende Beispiele sollen dies deutlicher ersichtlich machen.

1. $11 \sin^2 a = 4 + 5 \cos^2 a$

2. $4 \operatorname{tg} a = 9 \operatorname{cotg} a$

Da $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ ist,

Da $\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$ ist,

so erhält man:

so erhält man:

$$11 \sin^2 a = 4 + 5 - 5 \sin^2 a$$

$$4 \operatorname{tg} a = \frac{9}{\operatorname{tg} a}$$

$$16 \sin^2 a = 9$$

$$\operatorname{tg}^2 a = \frac{9}{4}$$

$$\sin^2 a = \frac{9}{16}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{3}{2} = 1.5000$$

$$\sin a = \frac{3}{4} = 0.7500$$

$$a = 48^\circ 35'$$

$$a = 56^\circ 18.5'$$

3. $5 \sin a = 8 \cos a$

4. $5 \sin a = 2 \operatorname{tg} a$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch $\cos a$, so erhält man:

$$5 \sin a = 2 \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$5 \frac{\sin a}{\cos a} = 8$$

Kürzt man durch $\sin a$,*) so erhält man:

$$5 \operatorname{tg} a = 8$$

$$5 = \frac{2}{\cos a}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{8}{5} = 1.6000$$

$$\cos a = \frac{2}{5} = 0.4000$$

$$a = 58^\circ$$

$$a = 66^\circ 26'$$

Hätte man die gegebene Gleichung durch $\sin a$ dividiert, so wäre man auf $\operatorname{cotg} a$ gekommen.

In ähnlicher Weise löst man die Gleichung

$$8 \cos a = 3 \operatorname{cotg} a$$

*) Da man durch $\sin a$ kürzt, so ist $\sin a = 0$ zu setzen, woraus die Lösung folgt: $\sphericalangle a_1 = 0$.

5. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.4$

Es ist

$$\cos \alpha = 1.4 - \sin \alpha$$

und

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

folglich

$$\sin^2 \alpha + (1.4 - \sin \alpha)^2 = 1$$

$$2 \sin^2 \alpha - 2.8 \sin \alpha + 1.96 = 1$$

$$\sin^2 \alpha - 1.4 \sin \alpha + 0.48 = 0^*)$$

$$\sin \alpha = 0.7 \pm \sqrt{0.49 - 0.48}$$

$$\sin \alpha = 0.7 \pm 0.1$$

$$\sin \alpha_1 = 0.8 \quad \sin \alpha_2 = 0.6$$

$$\alpha_1 = 53^\circ 8' \quad \alpha_2 = 36^\circ 52'$$

6. $20 \sin \alpha = 9 \cotg \alpha$

$$20 \sin \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$20 \sin^2 \alpha = 9 \cos \alpha$$

$$20(1 - \cos^2 \alpha) = 9 \cos \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha = 0.45 \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha + 0.45 \cos \alpha - 1 = 0^{**})$$

$$\cos \alpha = -0.225 \pm \sqrt{0.050625 + 1}$$

$$\cos \alpha = -0.225 \pm 1.025$$

Bernachlässigt man den negativen Wert, so erhält man

$$\cos \alpha = 0.8000$$

$$\alpha = 36^\circ 52'$$

Übungsbeispiele.

Man bestimme den Winkel α aus folgenden Gleichungen:

1. $9 \sin^2 \alpha = 7 \cos^2 \alpha + 2$

3. $3 \operatorname{tg} \alpha = 5 \operatorname{cotg} \alpha$

5. $4 \sin \alpha = 9 \cos \alpha$

7. $\operatorname{tg} \alpha = 5 \sin \alpha$

9. $13 (\sin \alpha - \cos \alpha) = 7$

11. $\sin \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha$

2. $2 \cos^2 \alpha = 7 \sin^2 \alpha - 3$

4. $8 \operatorname{cotg} \alpha = 13 \operatorname{tg} \alpha$

6. $\cos \alpha = 3 \sin \alpha$

8. $11 \cos \alpha = 4 \operatorname{cotg} \alpha$

10. $4 \sin \alpha + \cos \alpha = 3$

12. $5 \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

*) Man setze $\sin \alpha = x$.**) Man setze $\cos \alpha = x$.

$$R = N \cdot f = G \cdot \cos \alpha \cdot f$$

$$P = G \cdot \sin \alpha$$

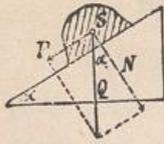


Fig. 47.

13. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 47) vom Neigungswinkel α liegt ein Körper, dessen Reibungskoeffizient gegen die schiefe Ebene f ist. Wie groß darf der Winkel α höchstens sein, damit der Körper durch Reibung feststeht, wenn

- a) $f = 0.12$ b) $f = 0.24$ c) $f = 0.48$ ist?

Anleitung. Die Reibung $R = N f$ muß der Komponente P gleich sein.

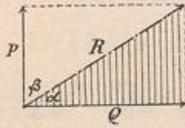


Fig. 48.

14. Eine Kraft $R = 60 \text{ kg}$ ist so in zwei zu einander senkrechte Komponenten P und Q zu zerlegen, daß $P + Q = 84 \text{ kg}$ ist. Unter welchen Winkeln α und β (Fig. 48) sind die Komponenten gegen die Resultierende geneigt?

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{84}{60}$$

Anleitung. Man kann die Winkel unmittelbar bestimmen ($R \sin \alpha + R \cos \alpha = 84$); man kann aber auch aus den Gleichungen

$$P + Q = 84 \text{ und } P^2 + Q^2 = R^2 = 3600$$

zuerst die Komponenten P und Q und dann die Winkel berechnen.

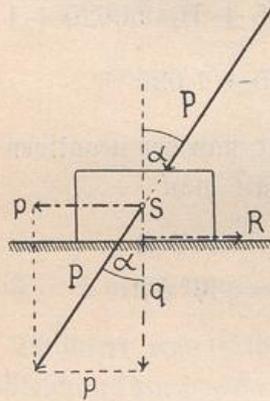


Fig. 49.

15. Ein Körper (Fig. 49) liegt auf einer horizontalen Unterlage, mit welcher er den Reibungskoeffizienten $f = 0.4$ besitzt. In der Richtung nach dem Schwerpunkte S , um den Winkel α gegen die Vertikale geneigt, wirkt auf den Körper eine Kraft $P = 50 \text{ kg}$. Wie groß muß der Winkel α mindestens sein, damit der Körper gleitet, wenn:

a) das Gewicht des Körpers gleich Null gesetzt wird?

b) das Gewicht des Körpers $Q = 60 \text{ kg}$ ist?

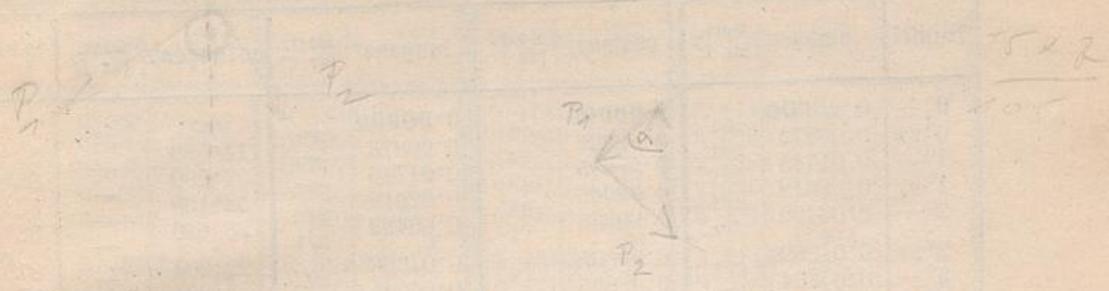
Anleitung. Für den gesuchten Winkel muß die Reibung $R = p$ sein. Die Reibung ist im Falle a) $R = q f$, im Falle b) $R = (Q + q) f$.

Resultate.

- | | | | |
|--|--|--------------------|-------------------|
| 1. $48^\circ 35'$ | 2. $48^\circ 12'$ | 3. $52^\circ 14'$ | |
| 4. $38^\circ 7'$ | 5. $66^\circ 2'$ | 6. $18^\circ 26'$ | |
| 7. $78^\circ 28'$; (0°) | 8. $21^\circ 19'$; (90°) | 9. $67^\circ 23'$ | |
| 10. $32^\circ 39'$ | 11. $65^\circ 32'$ | 12. $64^\circ 50'$ | |
| 13. $\text{tg } \alpha = f$ | a) $6^\circ 50'$ | b) $13^\circ 30'$ | c) $25^\circ 38'$ |
| 14. $\sphericalangle \alpha = 53^\circ 8'$ | $\sphericalangle \beta = 36^\circ 52'$ | | |
| 15. a) $21^\circ 48'$ | b) $48^\circ 16'$ | | |

$P_1 + P_2 + P_3 = 150 \text{ kg}$
 $P_3 = 105 \text{ kg}$
 $P_1 \sin \alpha + P_2 \sin \alpha = 150 - 105 = 45$

21
 2/11

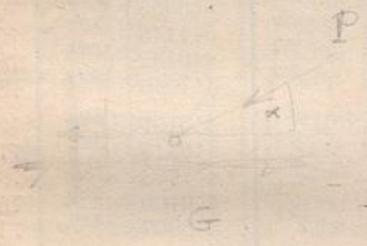


Tabelle

der

Winkelfunktionen.

$$\begin{aligned}
 P_1 \sin \alpha &= P_2 \sin \alpha \\
 P_1 + P_2 &= 150 \text{ kg} \\
 P_3 \cos \alpha + P_3 \sin \alpha &= 150
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P \cos \alpha &= (G + P \sin \alpha) \cdot f \\
 P \cos \alpha - \sin \alpha \cdot f &= G \cdot f
 \end{aligned}$$