Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Der Sinus-Satz und seine Anwendungen zur Auflösung schiefwinkliger Dreiecke.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76715

Das schiefwinklige Dreieck.

§ 15. Entsprechend den vier Kongruenzsätzen haben wir vier Hauptfälle der Dreiecksbestimmung ins Auge zu fassen.

Ein schiefwinkliges Dreieck kann nämlich bestimmt sein:

1. Durch eine Seite und zwei Winkel, (deren Lage gegen die gegebene Seite gleichfalls bestimmt sein muß.)
2. Durch zwei Seiten und den der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel.
3. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel.
4. Durch die drei Seiten.

§ 16. In den beiden ersten Fällen genügt zur Auflösung des Dreieckes der

Sinussatz: Die Seiten eines Dreieckes verhalten sich wie die sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

NB. Kommt ein stumpfer Winkel vor, so nehme man statt seines sinus den sinus seines Nebenwinkels. (Siehe nachstehende Ableitung.)

Z. B. in Fig. 31a

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B}$$

und in Fig. 31b.

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin \beta}$$

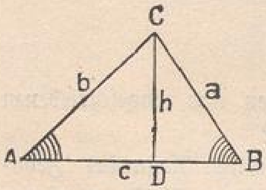

Fig. 31a.

Beweis.

Ziehen wir

$$CD \perp AB,$$

so folgt aus den Dreiecken

ADC und BDC:

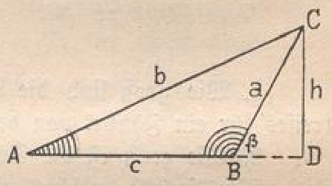

Fig. 31b.

$$h = b \sin A \qquad h = b \sin A$$
$$h = a \sin B \qquad h = a \sin \beta$$

woraus sich durch Gleichstellung der beiden für h gefundenen Werte ergibt:

$$b \sin A = a \sin B \qquad b \sin A = a \sin \beta$$

Aus diesen Gleichungen können wir Proportionen bilden, wenn wir die Faktoren des linksstehenden Produktes zu inneren, die Faktoren des rechtsstehenden Produktes zu äußeren Gliedern machen. Dadurch erhalten wir:

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B} \qquad \mathbf{a : b = \sin A : \sin \beta}$$

Damit ist der Sinussatz bewiesen.

Wendet man denselben auf je zwei andere Seiten an, so ergibt sich:

$$\mathbf{a : c = \sin A : \sin C} \quad \text{und} \quad \mathbf{b : c = \sin B : \sin C}$$

Durch Zusammenfassung dieser Proportionen erhält man

$$\mathbf{a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C},$$

worin statt des sinus eines etwaigen stumpfen Winkels stets der sinus seines Nebenwinkels zu nehmen ist.

Beispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $a = 53{\cdot}25\ m$
   $\sphericalangle B = 74^\circ 30'$
   $\sphericalangle C = 50^\circ$

Auflösung:

$$180^\circ - (B + C) = \sphericalangle A = 55^\circ 30'$$
$$b : a = \sin B : \sin A$$
$$c : a = \sin C : \sin A$$
$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B = \frac{53{\cdot}25}{0{\cdot}8241} . 0{\cdot}9636$$
$$c = \frac{a}{\sin A} \sin C = \frac{53{\cdot}25}{0{\cdot}8241} . 0{\cdot}7660$$
$$\mathbf{b = 62{\cdot}263}\ m$$
$$\mathbf{c = 49{\cdot}496}\ m$$

2. $a = 48{\cdot}5\ m$
   $b = 61{\cdot}2\ m$
   $\sphericalangle B = 75^\circ 30'$

Auflösung:

$$a : b = \sin A : \sin B$$
$$\sin A = \frac{a . \sin B}{b} = \frac{48{\cdot}5 \times 0{\cdot}9682}{61{\cdot}2}$$
$$\sin A = 0{\cdot}7673$$
$$\sphericalangle A = \mathbf{50^\circ 7'}$$
$$\sphericalangle C = \mathbf{54^\circ 23'}$$
$$c : b = \sin C : \sin B$$
$$c = \frac{b . \sin C}{\sin B} = \frac{61{\cdot}2 \times 0{\cdot}8129}{0{\cdot}9682}$$
$$\mathbf{c = 51{\cdot}384}\ m$$

Anmerkung. Kennt man von einem Dreiecke eine Seite und die Winkel, so kann man, wie aus den Formeln für *b* und *c* in der vorstehenden Auflösung zu Beispiel 1 ersichtlich ist, die fehlenden Seiten nach folgender leicht zu merkenden Regel berechnen:

Die gesuchte Seite wird gefunden, indem man die bekannte Seite durch den sinus ihres gegenüberliegenden Winkels dividiert und mit dem sinus des der gesuchten Seite gegenüberliegenden Winkels multipliziert.

Bei Anwendung dieser Regel erspart man das Anschreiben der Proportionen und hat bei Berechnung beider unbekannten Seiten die Division nur einmal auszuführen. (Siehe obige Formeln für *b* und *c* in Beispiel 1.)

Übungsbeispiele:

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $c = 250\ m$, $\sphericalangle A = 72^\circ$, $\sphericalangle C = 65^\circ$
2. $b = 5{\cdot}49\ m$, $\sphericalangle A = 72^\circ 25'$, $\sphericalangle B = 49^\circ 45'$
3. $a = 45{\cdot}64\ cm$, $\sphericalangle C = 29^\circ 30'$, $\sphericalangle A = 103^\circ 30'$
4. $a = 35\ m$, $b = 75\ m$, $\sphericalangle B = 80^\circ$
5. $a = 23{\cdot}25\ m$, $c = 35{\cdot}88\ m$, $\sphericalangle C = 81^\circ 30'$
6. $b = 45{\cdot}5\ m$, $c = 69{\cdot}6\ m$, $\sphericalangle C = 96^\circ 30'$

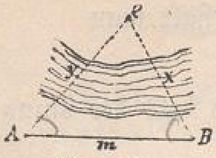

Fig. 32 a.

7. Man bestimme die Entfernungen AC und BC (Fig. 32a) eines unzugänglichen Punktes C aus den mittels Meßlatte und Winkelmeßinstrumenten gefundenen Abmessungen:

a) $m = 125\ m$	*b)* $m = 356 \cdot 7\ m$	*c)* $m = 225 \cdot 5\ m$
$\sphericalangle A = 52^0$	$\sphericalangle A = 37^0 20'$	$\sphericalangle A = 100^0$
$\sphericalangle B = 71^0$	$\sphericalangle B = 61^0 30'$	$\sphericalangle B = 35^0$

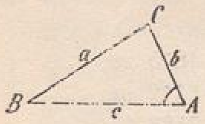

Fig. 32 b.

8. Man berechne die durch direkte Messung nicht zu ermittelnde Entfernung c der beiden Punkte A und B (Fig. 32b) aus folgenden Abmessungen:

a) $a = 130\ m$	*b)* $a = 512\ m$	*c)* $a = 240\ m$
$b = 105\ m$	$b = 350\ m$	$b = 221\ m$
$\sphericalangle A = 65^0 30'$	$\sphericalangle A = 98^0$	$\sphericalangle A = 128^0 9'$

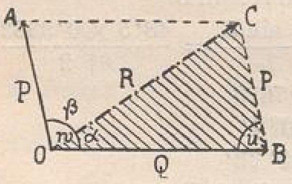

Fig. 33.

9. Eine Kraft R (Fig. 33) ist in zwei gegen R unter den Winkeln β und α geneigte Komponenten P und Q zu zerlegen. Wie groß sind P und Q, wenn:

a) $R = 325\ kg$	*b)* $R = 135\ kg$	*c)* $R = 450\ kg$
$\sphericalangle \alpha = 62^0$	$\sphericalangle \alpha = 42^0 30'$	$\sphericalangle \alpha = 10^0 53'$
$\sphericalangle \beta = 49^0$	$\sphericalangle \beta = 26^0$	$\sphericalangle \beta = 81^0 12'$

ist?

10. Eine Kraft Q wirkt mit einer Kraft $P = 75\ kg$ unter einem Winkel $w = 70^0$ zusammen. Wie groß muß Q sein, damit die Resultierende $100\ kg$ betrage?

Anleitung: In Fig. 33 ist $\sphericalangle u = 180^0 - w$.

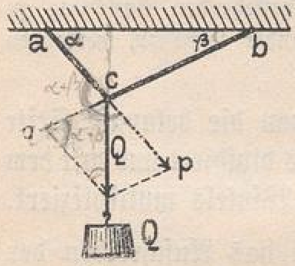

Fig. 34.

11. Wie groß sind die Zugspannungen p und q in den beiden Seilstücken ac und bc (Fig. 34), wenn bei c die vertikale Belastung Q wirkt und die beiden Seilstücke mit der Horizontalen die Winkel α und β einschließen?

a) $Q = 245\ kg$	*b)* $Q = 875\ kg$	*c)* $Q = 1275\ kg$
$\sphericalangle \alpha = 37^0$	$\sphericalangle \alpha = 42\frac{1}{2}^0$	$\sphericalangle \alpha = 36^0 15'$
$\sphericalangle \beta = 18^0$	$\sphericalangle \beta = 25\frac{1}{2}^0$	$\sphericalangle \beta = 24^0 20'$

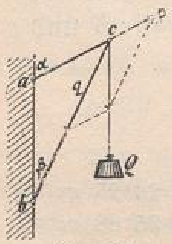

Fig. 35.

12. An dem Punkte c einer Aufzugsvorrichtung (Fig. 35) wirkt vertikal nach abwärts die Last Q. Wie groß sind die Beanspruchungen p und q der beiden Konstruktionsteile ac und bc, wenn diese mit der Vertikalen die Winkel α und β einschließen?

a) $Q = 2375\ kg$	*b)* $Q = 2750\ kg$	*c)* $Q = 1950\ kg$
$\sphericalangle \alpha = 81^0$	$\sphericalangle \alpha = 48^0$	$\sphericalangle \alpha = 53^0 30'$
$\sphericalangle \beta = 36^0$	$\sphericalangle \beta = 33^0$	$\sphericalangle \beta = 28^0 30'$

13. Wie groß sind die Drücke s_1 und s_2 in den Streben eines einfachen Sprengwerkes (siehe Fig. 23), wenn diese Streben unter den ungleichen Winkeln $\alpha = 48\frac{1}{2}^0$ und $\beta = 34\frac{3}{4}^0$ gegen die Horizontale geneigt sind und wenn der vertikale Druck $q = 3250\ kg$ ist?

14. Um die gegenseitige Entfernung $AB = x$ zweier unzugänglicher Punkte A und B (Fig. 36) zu bestimmen, hat man den in der Verlängerung von AB liegenden Punkt N und einen zweiten Punkt M festgelegt und sodann gemessen:

$MN = a = 975{\cdot}6\ m \quad \sphericalangle AMB = \beta = 58^0$
$\sphericalangle AMN = \alpha = 37^0 30' \quad \sphericalangle ANM = \gamma = 46^0 30'$

Wie groß ist die Entfernung x?

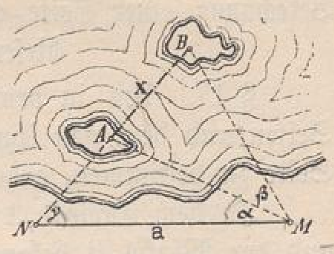

Fig. 36.

Anleitung. Man bestimme zuerst MA und dann x.

Resultate.

1. $a = 262{\cdot}36\ m$
   $b = 188{\cdot}12\ m$

2. $a = 6{\cdot}857\ m$
   $c = 6{\cdot}089\ m$

3. $b = 34{\cdot}328\ cm$
   $c = 23{\cdot}110\ cm$

4. $\sphericalangle A = 27^0 21{\cdot}5'$
   $\sphericalangle C = 72^0 38{\cdot}5$
   $c = 72{\cdot}69\ m$

5. $\sphericalangle A = 39^0 52'$
   $\sphericalangle B = 58^0 38'$
   $b = 30{\cdot}975\ m$

6. $\sphericalangle B = 40^0 30'$
   $\sphericalangle A = 43^0$
   $a = 47{\cdot}77\ m$

7. *a)* $AC = 140{\cdot}92\ m$
   $BC = 117{\cdot}44\ m$
   b) $AC = 317{\cdot}2\ m$
   $BC = 218{\cdot}9\ m$
   c) $AC = 182{\cdot}92\ m$
   $BC = 314{\cdot}06\ m$

8. *a)* $\sphericalangle B = 47^0 18'$
   $c = 131{\cdot}7\ m$
   b) $\sphericalangle B = 42^0 36'$
   $c = 328{\cdot}2\ m$
   c) $\sphericalangle B = 46^0 24'$
   $c = 29\ m$

9. *a)* $P = 307{\cdot}4\ kg$
   $Q = 262{\cdot}7\ kg$
   b) $P = 98{\cdot}027\ kg$
   $Q = 63{\cdot}611\ kg$
   c) $P = 85\ kg$
   $Q = 445\ kg$

10. $Q = 45{\cdot}28\ kg$

11. *a)* $p = 284\ kg$
    $q = 239\ kg$
    b) $p = 852\ kg$
    $q = 695\ kg$
    c) $p = 1334\ kg$
    $q = 1180\ kg$

12. *a)* $p = 1974\ kg$
    $q = 3317\ kg$
    b) $p = 5788\ kg$
    $q = 7896\ kg$
    c) $p = 2202\ kg$
    $q = 3709\ kg$

13. $s_1 = 2689\ kg$
    $s_2 = 2168\ kg$

14. $MA = 711{\cdot}6\ m$
    $AB = 980{\cdot}2\ m$
    $NA = 597{\cdot}2\ m$
    $MB = 1149\ m$