Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Berechnung einer Seite aus den beiden anderen Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel. (Carnot´scher Lehrsatz)

urn:nbn:de:hbz:466:1-76715

Berechnung einer Seite aus den beiden anderen Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.

§ 17. Um in dem dritten Bestimmungsfalle (§ 15) aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zunächst die dritte Seite zu bestimmen, gehen wir in folgender Weise vor.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 37 a, b) seien die Seiten a und c und der Winkel B bekannt, und die Seite b sei zu berechnen.

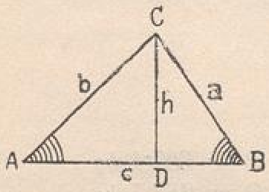

Fig. 37 a

Zieht man

$$CD \perp AB$$

und setzt

$$CD = h, \quad BD = m,$$

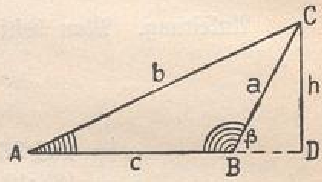

Fig. 37 b.

so ist im $\triangle ADC \;..\; b^2 = h^2 + AD^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$

und im $\triangle BDC \;..\; h^2 = a^2 - m^2, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$

woraus folgt: $b^2 = a^2 - m^2 + AD^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$

In Fig. 37 a ist $AD = c - m$,

In Fig. 37 b ist $AD = c + m$,

daher nach Gleichung (3)

$b^2 = a^2 - m^2 + (c + m)^2$ | $b^2 = a^2 - m^2 + (c + m)^2$

woraus nach Ausführung der Quadrierung, nach welcher sich $- m^2$ gegen m^2 hebt, folgt:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,c\,m \ldots (4)$ | $b^2 = a^2 + c^2 + 2\,c\,m \ldots (4)'$

Nun ist im $\triangle BCD$ nach § 10:

$m = a \cos B$ | $m = a \cos \beta$

somit, wenn diese Werte von m in die Gleichungen (4) und (4)′ eingesetzt werden,

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B} \qquad \mathbf{b^2 = a^2 + c^2 + 2\,ac \cos \beta}$$

Der in diesen beiden Gleichungen ausgedrückte Satz heißt der Carnot'sche Lehrsatz und läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Das Quadrat einer Dreiecksseite wird gefunden, wenn man die Quadrate der beiden anderen Seiten addiert und um das doppelte Produkt dieser Seiten mit dem cosinus ihres eingeschlossenen Winkels vermindert, oder um das doppelte Produkt dieser Seiten mit dem cosinus des von ihnen gebildeten Außenwinkels vermehrt. Das Letztere wird angewendet, wenn der von den bekannten Seiten eingeschlossene Winkel größer ist als 90°.

Zieht man aus dem so bestimmten Werte die Quadratwurzel, so wird die Seite selbst gefunden.

Beispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $a = 25\ m$
$c = 36\ m$
$\sphericalangle B = 68^0 30'$

Ausführung:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2\,ac\cos B}$$
$$a^2 = 625$$
$$c^2 = 1296$$
$$2\,ac\cos B = 659\cdot 7$$
daher $b = \sqrt{1261\cdot 3}$
$$\mathbf{b = 35\cdot 515}\ m$$

2. $b = 42\ m$
$c = 63\ m$
$\sphericalangle A = 115^0$

Ausführung:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2\,b\,c\cos(180^0 - A)}$$
$$b^2 = 1764$$
$$c^2 = 3969$$
$$2\,b\,c\cos 65^0 = 2236\cdot 39$$
daher $a = \sqrt{7969\cdot 39}$
$$\mathbf{a = 89\cdot 271}\ m$$

Die noch fehlenden zwei Winkel können nun nach dem Sinus-Satze berechnet werden.

Übungsbeispiele.

Es ist in folgenden Dreiecken die unbekannte Seite zu bestimmen:

1. $a = 24\ cm$, $b = 15\ cm$, $\sphericalangle C = 60^0$
2. $b = 7\cdot 5\ cm$, $c = 3\cdot 2\ cm$, $\sphericalangle A = 44^0 30'$
3. $a = 50\cdot 2\ m$, $c = 42\cdot 5\ m$, $\sphericalangle B = 72^0 25'$
4. $a = 6\cdot 5\ m$, $b = 4\cdot 5\ m$, $\sphericalangle C = 108^0$
5. $a = 6\cdot 8\ m$, $c = 10\cdot 4\ m$, $\sphericalangle B = 97^0 30'$
6. $b = 34\cdot 5\ cm$, $c = 83\cdot 4\ cm$, $\sphericalangle A = 103^0 10'$

7. Man bestimme die gegenseitige Entfernung x der durch ein Gebäude gedeckten Punkte A und B (Fig. 38) aus folgenden, durch direkte Abmessung gefundenen Angaben:

a) $a = 73\ m$, $b = 115\ m$, $\sphericalangle P = 46^0 20'$

b) $a = 253\cdot 8\ m$, $b = 175\cdot 5\ m$, $\sphericalangle P = 103^0 13'$

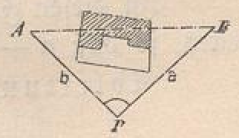

Fig. 38

8. Wie lang sind die Diagonalen d_1 und d_2 eines Parallelogrammes von den Seiten $a = 28\ cm$, $b = 17\ cm$, wenn der Spitzwinkel des Parallelogrammes $62^0\ 15'$ beträgt?

9. Zwei Kräfte P und Q (Fig. 39) wirken unter einem Winkel w auf einen Punkt O. Wie groß ist ihre Resultierende R, wenn:

a) $P = 13\ kg$, $Q = 19\ kg$, $\sphericalangle w = 50^0$

b) $P = 70\ kg$, $Q = 110\ kg$, $\sphericalangle w = 65^0$

c) $P = 290\ kg$, $Q = 510\ kg$, $\sphericalangle w = 100^0$

d) $P = 48\cdot 5\ kg$, $Q = 69\cdot 8\ kg$, $\sphericalangle w = 61^0 40'$ ist?

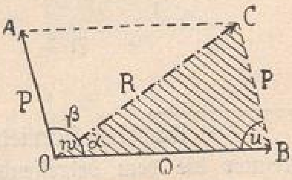

Fig. 39.

10. Zwei Kräfte P und Q wirken unter dem Winkel w zusammen. Wie groß ist ihre Resultierende R, und wie groß sind die Winkel α und β, welche die Resultierende mit den Kräften Q und P einschließt, wenn:

a) $P = 80\ kg$, $Q = 50\ kg$, $\sphericalangle w = 53^0$ *b)* $P = 125\ kg$, $Q = 96\ kg$, $\sphericalangle w = 65^0$ *c)* $P = 62{\cdot}5\ kg$, $Q = 55\ kg$, $\sphericalangle w = 72^0$ ist?

Resultate.

1. $c = 21\ m$
2. $a = 5{\cdot}679\ m$
3. $b = 55{\cdot}115\ m$
4. $c = 8{\cdot}976\ m$
5. $b = 13{\cdot}147\ m$
6. $a = 97{\cdot}25\ cm$
7. *a)* $x = 83{\cdot}43\ m$
   b) $x = 339{\cdot}98\ m$
8. $d_1 = 38{\cdot}94\ cm$
   $d_2 = 25{\cdot}09\ cm$
9. *a)* $R = 29{\cdot}112\ kg$
   b) $R = 153{\cdot}32\ kg$
   c) $R = 541{\cdot}14\ kg$
   d) $R = 102{\cdot}16\ kg$
10. *a)* $R \doteq 117\ kg$, $\sphericalangle\alpha \doteq 33^0$, $\sphericalangle\beta \doteq 20^0$
   b) $R = 187{\cdot}04\ kg$, $\sphericalangle\alpha = 37^0\,17'$, $\sphericalangle\beta = 27^0\,43'$
   c) $R = 95{\cdot}16\ kg$, $\sphericalangle\alpha = 38^0\,39'$, $\sphericalangle\beta = 33^0\,21'$

Berechnung der Dreieckswinkel aus den drei Seiten.

§ 18. Sind die drei Seiten a, b und c eines Dreieckes gegeben, so kann man die halben Dreieckswinkel nach folgenden Formeln finden:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\,^{*)}$$

In diesen Formeln bedeutet s den halben Umfang des Dreieckes, so daß $a + b + c = 2s$ ist.

Ableitung der Formeln. Macht man in Fig. 40

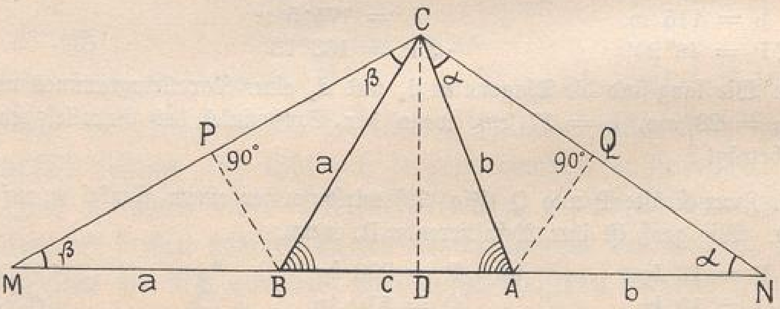

Fig. 40.

*) Um diese Formeln dem Gedächtnisse einzuprägen, merke man sich, daß im Nenner die dem betreffenden Winkel anliegenden Seiten stehen, während die dem Winkel gegenüberliegende Seite im Zähler vorkommt.