# Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Einfache goniometrische Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76715

## Goniometrische Gleichungen.

Ist ein Winkel dadurch bestimmt, daß eine Gleichung zwischen zwei (oder mehreren) seiner Funktionen gegeben ist, so nennt man diese eine goniometrische Gleichung. Um dieselbe zu lösen, d. h. den Winkel zu berechnen, muß man zunächst die Gleichung so umformen, daß darin nur eine Funktion des Winkels vorkommt.

Folgende Beispiele sollen dies deutlicher ersichtlich machen.

1. $\mathbf{11 \sin^2 \alpha = 4 + 5 \cos^2 \alpha}$

Da $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ist,

so erhält man:

$$11 \sin^2 \alpha = 4 + 5 - 5 \sin^2 \alpha$$
$$16 \sin^2 \alpha = 9$$
$$\sin^2 \alpha = \frac{9}{16}$$
$$\sin \alpha = \frac{3}{4} = 0{\cdot}7500$$
$$\alpha = \mathbf{48^0\, 35'}$$

2. $\mathbf{4 \operatorname{tg} \alpha = 9 \operatorname{cotg} \alpha}$

Da $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ ist,

so erhält man:

$$4 \operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{\operatorname{tg} \alpha}$$
$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{9}{4}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} = 1{\cdot}5000$$
$$\alpha = \mathbf{56^0\, 18{\cdot}5'}$$

3. $\mathbf{5 \sin \alpha = 8 \cos \alpha}$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch $\cos \alpha$, so erhält man:

$$5 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 8$$
$$5 \operatorname{tg} \alpha = 8$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{5} = 1{\cdot}6000$$
$$\alpha = \mathbf{58^0}$$

Hätte man die gegebene Gleichung durch $\sin \alpha$ dividiert, so wäre man auf $\operatorname{cotg} \alpha$ gekommen.

4. $\mathbf{5 \sin \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha}$

$$5 \sin \alpha = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Kürzt man durch $\sin \alpha$,*) so erhält man:

$$5 = \frac{2}{\cos \alpha}$$
$$\cos \alpha = \frac{2}{5} = 0 \cdot 4000$$
$$\alpha = \mathbf{66^0\, 26'}$$

In ähnlicher Weise löst man die Gleichung

$$8 \cos \alpha = 3 \operatorname{cotg} \alpha$$

*) Da man durch $\sin \alpha$ kürzt, so ist $\sin \alpha = 0$ zu setzen, woraus die Lösung folgt: $\sphericalangle \alpha_1 = 0$.

5. $\mathbf{\sin\alpha + \cos\alpha = 1{\cdot}4}$

Es ist

$$\cos\alpha = 1{\cdot}4 - \sin\alpha$$

und

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

folglich

$$\sin^2\alpha + (1{\cdot}4 - \sin\alpha)^2 = 1$$

$$2\sin^2\alpha - 2{\cdot}8\sin\alpha + 1{\cdot}96 = 1$$

$$\sin^2\alpha - 1{\cdot}4\sin\alpha + 0{\cdot}48 = 0 \text{*)}$$

$$\sin\alpha = 0{\cdot}7 \pm \sqrt{0{\cdot}49 - 0{\cdot}48}$$

$$\sin\alpha = 0{\cdot}7 \pm 0{\cdot}1$$

$$\sin\alpha_1 = 0{\cdot}8 \qquad \sin\alpha_2 = 0{\cdot}6$$

$$\mathbf{\alpha_1 = 53^0\,8' \qquad \alpha_2 = 36^0\,52'}$$

6. $\mathbf{20\sin\alpha = 9\,\mathrm{cotg}\,\alpha}$

$$20\sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$20\sin^2\alpha = 9\cos\alpha$$

$$20(1 - \cos^2\alpha) = 9\cos\alpha$$

$$1 - \cos^2\alpha = 0{\cdot}45\cos\alpha$$

$$\cos^2\alpha + 0{\cdot}45\cos\alpha - 1 = 0 \text{**)}$$

$$\cos\alpha = -0{\cdot}225 \pm \sqrt{0{\cdot}050625 + 1}$$

$$\cos\alpha = -0{\cdot}225 \pm 1{\cdot}025$$

Vernachlässigt man den negativen Wert, so erhält man

$$\cos\alpha = 0{\cdot}8000$$

$$\mathbf{\alpha = 36^0\,52'}$$

### Übungsbeispiele.

Man bestimme den Winkel $\alpha$ aus folgenden Gleichungen:

1. $9\sin^2\alpha = 7\cos^2\alpha + 2$
2. $2\cos^2\alpha = 7\sin^2\alpha - 3$
3. $3\,\mathrm{tg}\,\alpha = 5\,\mathrm{cotg}\,\alpha$
4. $8\,\mathrm{cotg}\,\alpha = 13\,\mathrm{tg}\,\alpha$
5. $4\sin\alpha = 9\cos\alpha$
6. $\cos\alpha = 3\sin\alpha$
7. $\mathrm{tg}\,\alpha = 5\sin\alpha$
8. $11\cos\alpha = 4\,\mathrm{cotg}\,\alpha$
9. $13(\sin\alpha - \cos\alpha) = 7$
10. $4\sin\alpha + \cos\alpha = 3$
11. $\sin\alpha = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$
12. $5\cos\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$

*) Man setze $\sin\alpha = x$.

**) Man setze $\cos\alpha = x$.

$R = N.f = G.\cos\alpha.f$
$P = G.\sin\alpha$



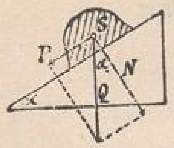


Fig. 47.

13. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 47) vom Neigungswinkel $\alpha$ liegt ein Körper, dessen Reibungskoëffizient gegen die schiefe Ebene f ist. Wie groß darf der Winkel $\alpha$ höchstens sein, damit der Körper durch Reibung festsitze, wenn

*a)* $f = 0{\cdot}12$ *b)* $f = 0{\cdot}24$ *c)* $f = 0{\cdot}48$ ist?

Anleitung. Die Reibung $R = Nf$ muß der Komponente P gleich sein.

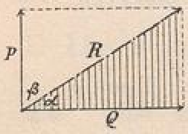


Fig. 48.

14. Eine Kraft $R = 60\ kg$ ist so in zwei zu einander senkrechte Komponenten P und Q zu zerlegen, daß $P + Q = 84\ kg$ ist. Unter welchen Winkeln $\alpha$ und $\beta$ (Fig. 48) sind die Komponenten gegen die Resultierende geneigt?

$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{84}{60}$

Anleitung. Man kann die Winkel unmittelbar bestimmen ($R \sin\alpha + R \cos\alpha = 84$); man kann aber auch aus den Gleichungen

$$P + Q = 84 \text{ und } P^2 + Q^2 = R^2 = 3600$$

zuerst die Komponenten P und Q und dann die Winkel berechnen.

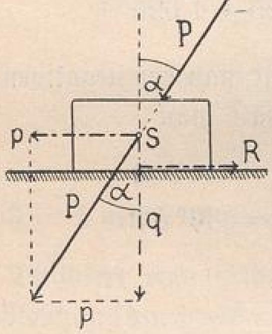


Fig. 49.

15. Ein Körper (Fig. 49) liegt auf einer horizontalen Unterlage, mit welcher er den Reibungskoëffizienten $f = 0{\cdot}4$ besitzt. In der Richtung nach dem Schwerpunkte S, um den Winkel $\alpha$ gegen die Vertikale geneigt, wirkt auf den Körper eine Kraft $P = 50\ kg$. Wie groß muß der Winkel $\alpha$ mindestens sein, damit der Körper gleitet, wenn:

*a)* das Gewicht des Körpers gleich Null gesetzt wird?

*b)* das Gewicht des Körpers $Q = 60\ kg$ ist?

Anleitung. Für den gesuchten Winkel muß die Reibung $R = p$ sein. Die Reibung ist im Falle *a)* $R = qf$, im Falle *b)* $R = (Q + q)f$.

## Resultate.

| | | |
|---|---|---|
| 1. 48° 35′ | 2. 48° 12′ | 3. 52° 14′ |
| 4. 38° 7′ | 5. 66° 2′ | 6. 18° 26′ |
| 7. 78° 28′; (0°) | 8. 21° 19′; (90°) | 9. 67° 23′ |
| 10. 32° 39′ | 11. 65° 32′ | 12. 64° 50′ |

13. $\operatorname{tg}\alpha = f$ *a)* 6° 50′ *b)* 13° 30′ *c)* 25° 38′

14. $\sphericalangle\,\alpha = 53°\,8'$ $\sphericalangle\,\beta = 36°\,52'$

15. *a)* 21° 48′ *b)* 48° 16′

# Tabelle

der

# Winkelfunktionen.

$P_1 + P_2 = 150\,kg$

$P_3 = 105\,kg$

$P_1 \sin\alpha = P_2 \cos\alpha$

$P_1 + P_2 = 150\,kg$

$P_3 \cos\alpha + P_3 \sin\alpha = 150$

$P \cos\alpha = (G + P \sin\alpha) \cdot f$

$P(\cos\alpha - \sin\alpha \cdot f) = G \cdot f$