Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Berechnung der Dreieckswinkel aus den drei Seiten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76715

10. Zwei Kräfte P und Q wirken unter dem Winkel w zusammen. Wie groß ist ihre Resultierende R, und wie groß sind die Winkel α und β, welche die Resultierende mit den Kräften Q und P einschließt, wenn:

a) P = 80 *kg*	*b)* P = 125 *kg*	*c)* P = 62·5 *kg*
Q = 50 *kg*	Q = 96 *kg*	Q = 55 *kg*
$\sphericalangle$ w = 53°	$\sphericalangle$ w = 65°	$\sphericalangle$ w = 72° ist?

Resultate.

1. c = 21 *m*
2. a = 5·679 *m*
3. b = 55·115 *m*
4. c = 8·976 *m*
5. b = 13·147 *m*
6. a = 97·25 *cm*
7. *a)* x = 83·43 *m*
   b) x = 339·98 *m*
8. d_1 = 38·94 *cm*
   d_2 = 25·09 *cm*
9. *a)* R = 29·112 *kg*
   b) R = 153·32 *kg*
   c) R = 541·14 *kg*
   d) R = 102·16 *kg*
10. *a)* R $\doteq$ 117 *kg*
    $\sphericalangle\alpha \doteq 33^0$
    $\sphericalangle\beta \doteq 20^0$
    b) R = 187·04 *kg*
    $\sphericalangle\alpha = 37^0\,17'$
    $\sphericalangle\beta = 27^0\,43'$
    c) R = 95·16 *kg*
    $\sphericalangle\alpha = 38^0\,39'$
    $\sphericalangle\beta = 33^0\,21'$

Berechnung der Dreieckswinkel aus den drei Seiten.

§ 18. Sind die drei Seiten a, b und c eines Dreieckes gegeben, so kann man die halben Dreieckswinkel nach folgenden Formeln finden:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s\,(s-a)}{b\,c}}\qquad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s\,(s-b)}{a\,c}}\qquad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s\,(s-c)}{a\,b}}\,^{*)}$$

In diesen Formeln bedeutet s den halben Umfang des Dreieckes, so daß $a+b+c=2\,s$ ist.

Ableitung der Formeln. Macht man in Fig. 40

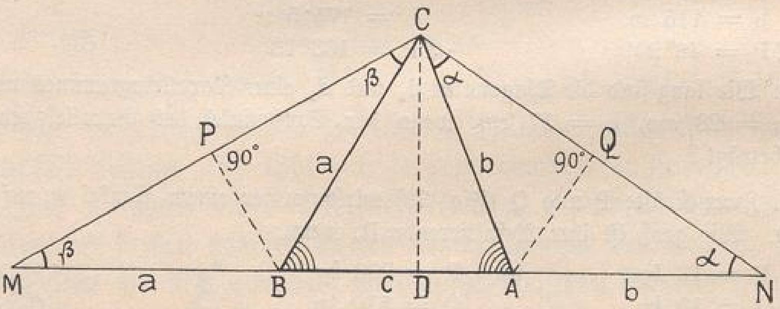

Fig. 40.

*) Um diese Formeln dem Gedächtnisse einzuprägen, merke man sich, daß im Nenner die dem betreffenden Winkel anliegenden Seiten stehen, während die dem Winkel gegenüberliegende Seite im Zähler vorkommt.

$$B M = B C = a \qquad \text{und} \qquad A N = A C = b,$$

so sind die Dreiecke MBC und NAC gleichschenklig, und es ist als Außenwinkel

$$\sphericalangle B = 2\beta \qquad \sphericalangle A = 2\alpha,$$

also $\qquad \beta = \frac{B}{2} \qquad \alpha = \frac{A}{2}$

Ferner ist $MN = a + c + b = 2s$. Macht man nun $CD \perp AB$, so ist

$$MD + DN = MN$$

oder $\qquad MC \cos\beta + NC \cos\alpha = 2s \qquad (1)$

Nun ist aber (§ 12) $\quad MC = 2 \times MP = 2 \times a \cos\beta$

$$NC = 2 \times NQ = 2 \times b \cos\alpha$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (1) ein, so erhält man $2a\cos^2\beta + 2b\cos^2\alpha = 2s$*) oder $a\cos^2\beta + b\cos^2\alpha = s \qquad$ (I)

Analog gelten auch, wenn $\gamma = \frac{C}{2}$ ist, die Gleichungen

$$b\cos^2\gamma + c\cos^2\beta = s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(II)}$$
$$c\cos^2\alpha + a\cos^2\gamma = s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

Multipliziert man die Gleichungen I, II und III bezw. mit c, — a und b, so erhält man

$$ac\cos^2\beta + bc\cos^2\alpha = cs$$
$$-ab\cos^2\gamma - ac\cos^2\beta = -as$$
$$bc\cos^2\alpha + ab\cos^2\gamma = bs.$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich

$$2bc\cos^2\alpha = s(c - a + b)$$

Da nun $c - a + b = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a)$ ist, so erhält man weiter

$$2bc\cos^2\alpha = 2s(s - a)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{s(s-a)}{bc} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

und da $\sphericalangle \alpha = \frac{A}{2}$ ist, $\qquad \boldsymbol{\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}$

---

*) Statt $(\cos\beta)^2$ schreibt man $\cos^2\beta$.

In derselben Weise lassen sich aus den Gleichungen (I), (II) und (III), wenn man sie mit c, a und — b, beziehungsweise mit — c, a und b multipliziert und dann addiert, die angegebenen Formeln für $\cos\frac{B}{2}$ und $\cos\frac{C}{2}$ ableiten.

Beispiel. Wie groß sind die Winkel eines Dreieckes von den Seiten $a = 25$ m, $b = 21$ m, $c = 30$ m?

Ausführung. Es ist der Umfang $u = 76$ m, daher $s = 38$ m und $s - a = 13$ m, $s - b = 17$ m, $s - c = 8$ m.

Somit ist

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{38 \times 13}{21 \times 30}} \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{38 \times 17}{25 \times 30}} \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{38 \times 8}{25 \times 21}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = 0{\cdot}8855 \qquad \cos\frac{B}{2} = 0{\cdot}9281 \qquad \cos\frac{C}{2} = 0{\cdot}76095$$

$$\sphericalangle\frac{A}{2} = 27^0\,42' \qquad \sphericalangle\frac{B}{2} = 21^0\,52' \qquad \sphericalangle\frac{C}{2} = 40^0\,27'$$

Bevor man die ganzen Winkel berechnet, überzeugt man sich, ob die Summe der halben Winkel 90^0 ergibt. In unserem Beispiele ist diese Summe $= 90^0 01'$. Es ist also ein kleiner Fehler von $1'$ vorhanden, der sich aus der Ungenauigkeit des Tabellen-Rechnens erklärt. Größere Abweichungen würden auf einen Rechenfehler hinweisen.

Multipliziert man die obenstehenden Gleichungen mit 2, so erhält man:

$$\boldsymbol{\sphericalangle A = 55^0\,24' \qquad \sphericalangle B = 43^0\,44' \qquad \sphericalangle C = 80^0\,54'}$$

Zusatz. Auch den Carnotschen Lehrsatz kann man verwenden, um aus den Seiten eines Dreieckes dessen Winkel zu berechnen.

Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ergibt sich $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

daher $$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

Ebenso muß $$\boldsymbol{\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

und $$\boldsymbol{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$ sein.

In diesen Gleichungen spricht sich folgende Regel aus:

Der Cosinus eines Dreieckswinkels wird gefunden, wenn man von der Summe der Quadrate der beiden ihn einschließenden Seiten das Quadrat der gegenüberliegenden Seite subtrahiert und das Ganze durch das doppelte Produkt der ihn einschließenden Seiten dividiert.

Will man bei Anwendung dieser Regel das Auftreten negativer Cosinuswerte vermeiden, so berechne man zuerst die zwei Winkel, welche der größten Seite anliegen. Hierauf findet man den dritten Winkel, indem man die Summe der beiden bereits gefundenen von 180° subtrahiert.*)

Beispiel 1. Man berechne nach der vorstehenden Regel die drei Winkel eines Dreieckes von den Seiten $a = 41$ m $b = 52$ m $c = 15$ m.

$$\cos A = \frac{2704 + 225 - 1681}{2 \times 52 \times 15} = 0{\cdot}8000 \quad \ldots \quad \sphericalangle A = 36^0\,52'$$

$$\cos C = \frac{1681 + 2704 - 225}{2 \times 41 \times 52} = 0{\cdot}9756 \quad \ldots \quad \sphericalangle C = 12^0\,43'$$

$$180^0 - (A + C) \quad \ldots \quad \sphericalangle B = 130^0\,25'$$

Beispiel 2. Wie groß ist in Fig. 39 der Winkel w, wenn $P = 65\,kg$ $Q = 85\,kg$ $R = 100\,kg$ ist?

1. Lösung.

$$\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{S(S-R)}{PQ}}$$

$$S = \frac{P+Q+R}{2} = 125$$

$$\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{125 \times 25}{65 \times 85}} = 0{\cdot}7521$$

$$\frac{u}{2} = 41^0 14'$$

$$u = 82^0 28'$$

2. Lösung.

$$\cos u = \frac{P^2 + Q^2 - R^2}{2PQ}$$

$$\cos u = \frac{11450 - 10000}{2 \times 65 \times 85}$$

$$\cos u = \frac{1450}{11050}$$

$$\cos u = 0{\cdot}1312$$

$$u = 82^0 28'$$

$$\mathbf{w = 180^0 - u = 97^0\,32'}$$

---

*) Führt die Regel zu einem negativen Cosinuswert, so suche man zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen in der Tabelle den zugehörigen Winkel w. Diesen muß man noch von 180° subtrahieren, um den Dreieckswinkel zu erhalten.

z. B. $a = 75\,m$ $b = 43\,m$ $c = 90\,m$

$$\cos C = \frac{75^2 + 43^2 - 90^2}{2 \times 75 \times 43} = \frac{-626}{6450} = -0{\cdot}09705$$

$$w = 84^0\,26' \qquad \sphericalangle C = 180^0 - w = 95^0\,34'$$

Übungsbeispiele.

Man berechne die Winkel A und B folgender, durch ihre drei Seiten gegebenen Dreiecke:

1.	$a = 17\ m$	3.	$a = 22{\cdot}2\ m$	5.	$a = 20\ m$
	$b = 14\ m$		$b = 14{\cdot}9\ m$		$b = 28\ m$
	$c = 15\ m$		$c = 22{\cdot}1\ m$		$c = 15\ m$
2.	$a = 8{\cdot}2\ m$	4.	$a = 4{\cdot}1\ m$	6.	$a = 71{\cdot}2\ cm$
	$b = 6{\cdot}5\ m$		$b = 1{\cdot}5\ m$		$b = 60{\cdot}1\ cm$
	$c = 7{\cdot}3\ m$		$c = 5{\cdot}2\ m$		$c = 28{\cdot}9\ cm$

7. Von einem Parallelogramm sind die Seiten $a = 10{\cdot}5\ cm$, $b = 16{\cdot}8\ cm$ und die eine Diagonale $d_1 = 14{\cdot}7\ cm$ gegeben. Wie groß sind die Winkel des Parallelogrammes und wie lang ist die zweite Diagonale d_2?

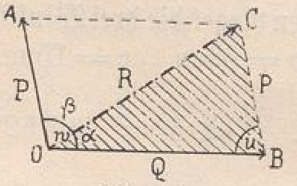

Fig. 41.

8. Zwei Kräfte P und Q wirken so zusammen, daß ihre Resultierende = R wird (Fig. 41). Welchen Winkel schließen die beiden Kräfte ein, wenn:

a)	$P = 70\ kg$	*d)*	$P = 50\ kg$	*g)*	$P = 235\ kg$
	$Q = 80\ kg$		$Q = 80\ kg$		$Q = 175\ kg$
	$R = 90\ kg$		$R = 100\ kg$		$R = 300\ kg$
b)	$P = 85\ kg$	*e)*	$P = 13\ kg$	*h)*	$P = 96{\cdot}6\ kg$
	$Q = 46\ kg$		$Q = 25\ kg$		$Q = 73{\cdot}8\ kg$
	$R = 90\ kg$		$R = 30\ kg$		$R = 140\ kg$
c)	$P = 75\ kg$	*f)*	$P = 42\ kg$	*i)*	$P = 358\ kg$
	$Q = 115\ kg$		$Q = 63\ kg$		$Q = 215\ kg$
	$R = 100\ kg$		$R = 84\ kg$		$R = 450\ kg$ ist?

Anleitung. Es ist $\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{S\,(S-R)}{P\,Q}}$, worin $S = \frac{1}{2}(P + Q + R)$ ist.

Da nun $u + w = 180^0$ also $\frac{u}{2} + \frac{w}{2} = 90^0$ ist, so ist

nach § 4 $\cos\frac{u}{2} = \sin\frac{w}{2}$

daher $\sin\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{S\,(S-R)}{P\,Q}}$

Resultate.

1.	$\sphericalangle A = 71^0\,41'$	4.	$\sphericalangle A = 36^0\,52'$
	$\sphericalangle B = 51^0\,26'$		$\sphericalangle B = 12^0\,41'$
2.	$\sphericalangle A = 72^0\,39'$	5.	$\sphericalangle A = 43^0\,32'$
	$\sphericalangle B = 49^0\,9'$		$\sphericalangle B = 105^0\,22'$
3.	$\sphericalangle A = 70^0\,43'$	6.	$\sphericalangle A = 100^0\,19'$
	$\sphericalangle B = 39^0\,19'$		$\sphericalangle B = 56^0\,10'$