Schattirungskunde

Riess, Karl

Stuttgart, 1871

§. 7. 8. Von der Intensität und von der Wirkung des Reflexlichtes auf Kugelflächen

urn:nbn:de:hbz:466:1-76877

Taf. I.) (in eine beliebige Anzahl, z. B. in 4 gleiche Theile und legt durch die Theilpunkte a, c, d, e Ebenen senkrecht zu ab, so sind die durch diese Ebenen erzeugten Schnittkreise 1.1, 2.2, 3.3, 4.4 Kreise gleicher Helligkeit, deren Intensitäten sich verhalten wie ab : ae : ad : ac oder wie $^4/_4 : ^3/_4 : ^2/_4 : ^1/_4$; die Hellendifferenz beträgt daher je $^1/_4$.

Wollte man die Schattirung der Kugel wirklich ausführen, so müsste man einen Tuschton so wählen, wie er für die Dunkelheit der Schattengrenze geeignet erscheint; lässt man zugleich die Helligkeit des weissen Papieres als diejenige des hellsten Punktes gelten, so müsste jener Ton so verdünnt werden, dass er nach einmaligem Auftrag die Helligkeit $^1/_4$ u. s. f. und nach viermaligem Auftrag wieder die ursprüngliche Dunkelheit der Schattengrenze gäbe, alsdann die Kugelfläche vom Kreis 44 bis zum Kreis 11 einmal, bis zum Kreis 22 zweimal, bis zum Kreis 33 dreimal und bis zum Kreis 44 viermal damit anlegen. Dass die Körper in der Natur auf der vom Licht abgewandten, also auf der Schattenseite bis zur Schattengrenze nicht absolut dunkel oder schwarz sind, ist aus der Erfahrung hinlänglich bekannt. Es ist dies eine Folge der Wirkung des Reflexlichtes, dessen Einfluss auf die Helligkeit der im Selbst- und Schlagschatten befindlichen Theile der Körper in den folgenden Paragraphen speciell nachgewiesen werden soll.

Die scharfen Uebergänge oder Abstufungen von einer Tuschlage zur andern lassen sich theils dadurch vermeiden, dass man sie nach den helleren Stellen hin allmälig verwascht oder dadurch, dass man statt 4 Hellencurven deren mehrere 6, 8 oder 10 und also ebensoviele Tonlagen annimmt. Dass man aber mit 4, höchstens 6 Lichtcurven in den meisten Fällen ausreicht, werden wir später sehen.

Ueber die Wirkung des Reflexlichtes.

§. 7.

Alle Körper, sowohl die festen als auch die tropfbar- oder elastischflüssigen: das Wasser, die Wolken, die Luft u. s. f. haben die Eigenschaft, dass sie das von irgend einer Lichtquelle, z. B. von der Sonne empfangene Licht mehr oder weniger vollständig wieder zurück werfen, reflektiren. Ohne die Existenz dieses reflektirten Lichtes müssten nothwendig alle diejenigen Theile einer Fläche oder eines Körpers, welche von den unmittelbar von der Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen nicht getroffen werden, absolut dunkel, für unser Auge u. s. w. nicht sichtbar sein; durch die reflektirten Lichtstrahlen werden aber auch diese Flächen- und Körpertheile noch hinlänglich beleuchtet, um von unserem Auge deutlich wahrgenommen werden zu können.

Es ist ein bekanntes physikalisches Gesetz, dass der Einfallswinkel eines Lichtstrahls dem Reflexionswinkel gleich ist. Wenn demnach eine Fläche MN (Fig. 8. Taf. I.) von einem Lichtstrahl la im Punkt a getroffen wird, so halbirt die Normale ab den Winkel lab′, welchen der einfallende Lichtstrahl l und der reflektirte l′ einschliessen.

Betrachten wir (Fig. 9. Taf. I.) den Kreis gafw als einen zur Horizontalebene senkrecht stehenden Cylinder, dessen Oberfläche gaf von den aus der Richtung L herkommenden parallelen Lichtstrahlen beleuchtet wird. Ist die Höhe des Cylinders = h, so ist die Lichtmasse, welche die Fläche abcdef des Cylinders trifft . = a′ f.′ h . m = r . h . m (da a′ f′ = a‴ f = r); wenn man mit m die auf die Flächeneinheit treffende Lichtmasse bezeichnet.

Denken wir uns diese Lichtmasse in gleichen Abständen a′b′, b′c′, c′d′, ... = $\frac{r}{p}$ durch die Ebenen bb′, cc′, dd′, ... in gleiche Lichtmassen abgetheilt, so werden offenbar die Cylinderflächenstücke ab, bc, cd .... von gleichen Lichtmassen $\frac{r}{p} . h . m = \frac{M}{p}$ getroffen. Ist nun die Cylinderoberfläche vollkommen polirt, reflektirt sie also alle Lichtstrahlen vollkommen und regelmässig, so wird die auf ab fallende Lichtmasse $\frac{M}{p}$ in den Raum a″abb″, die auf bc fallende der vorigen gleichen Lichtmasse $\frac{M}{p}$ in den Raum b″bcc″, ferner die auf cd fallende Lichtmasse $\frac{M}{p}$ in den Raum c″cdd″ u. s. f. reflektirt. Verlängert man die Linien bb″, cc″, dd″ .... rückwärts, bis sie sich schneiden, so können wir uns die einzelnen reflektirten Lichtbüschel von den Axen h, m, n ... der Cylinderausschnitte a″hb″, b″mc″, c″nd″ .... ausgehend denken. Da aber die in diesen Räumen liegenden Reflexlichtmassen für alle dieselben, nemlich $= \frac{M}{p}$ ist, so müssen die denselben entsprechenden Lichtintensitäten offenbar im umgekehrten Verhältniss zu den in gleichen Abständen von den Axen h, m, n ... genommenen Durchschnitten, oder da die Höhe für alle Cylindersektoren dieselbe ist, im umgekehrten Verhältniss zu den Bögen a″b″, b″c″, c″d″ ... stehen.

Der geometrische Ort für die Axen der Cylindersektoren ist die aus dem gegenseitigen Schnitt der Reflexstrahlen b″b, c″c, d″d .... leicht zu construirende Curve hmnop ... f; schneidet man von den Berührungspunkten aus auf den diese Curve berührenden Strahlen gleiche Stücke (z. B. = a″h) ab, so ist die daraus hervorgehende Curve a″b″c″d″e″f″ als die Spur einer Cylinderfläche zu betrachten, dessen durch die Reflexstrahlen erzeugten Helligkeiten in den einzelnen Theilen sich verhalten, wie die Masse der dieselben treffenden Lichtstrahlen, oder die durch das Reflexlicht erzeugten Helligkeiten stehen in umgekehrtem Verhältniss zu den Bögen $a''b''$, $b''c''$ $c''d''$ ... da sie von gleichen Lichtmassen erhellt werden.

Die Lichtintensitäten in den einzelnen Ausschnitten sind daher:

$$\left.\begin{array}{l} S' = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{arc \, . \, a''b''} \\ S'' = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{arc \, . \, b''c''} \\ S''' = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{arc \, . \, c''d''} \\ \quad \vdots \qquad \vdots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 1)$$

und es verhält sich demnach

$$S' : S'' : S''' = \frac{1}{arc \, . \, a''b''} : \frac{1}{arc \, . \, b''c''} : \frac{1}{arc \, . \, c''d''} \quad \ldots \quad 2)$$

Die Curve $a''b''c''d''$.... nimmt um so mehr die Form eines aus dem Mittelpunkt a beschriebenen Kreises an, je grösser man die Längen $a''h$, $b''m$, $c''n$.... macht. Nehmen wir nun die Entfernung $a''h$ u. s. f. sehr gross und den Halbmesser des Cylinders K sehr klein, so wird die Curve $a''b''c''d''e''f''$ ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt in a''', die Curve hmnop... aber wird mit dem Punkt a''' zusammenfallen, und die Reflexstrahlen aa'', bb'', cc'' ... von dem Mittelpunkt a''' herzukommen scheinen. Für diesen Fall ist dann aber

$$arc \, . \, a''b'' = 2 \, . \, arc \, . \, ab$$

denn es ist $\sphericalangle\, a''hb'' = b'bb'' = 2 \, . \, \varphi = 2 \, . \sphericalangle\, aa'''b$; ferner

$$\begin{array}{l} arc \; a''c'' = 2 \, . \, arc \, . \, ac \\ arc \; a''d'' = 2 \, . \, arc \, . \, ad \\ \quad \vdots \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l} arc \, . \, a''b'' = 2 \, . \, arc \, . \, ab \\ arc \, . \, b''c'' = arc \, . \, a''c'' - arc \, . \, a''b'' = 2\,(arc \, . \, ac - arc \, . \, ab) \\ arc \, . \, c''d'' = arc \, . \, a''d'' - arc \, . \, a''c'' = 2\,(arc \, . \, ad - arc \, . \, ac) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}$$

Nun ist aber arc . ab derjenige Bogen, dessen sin $= a'b'$ folglich

$$\begin{array}{l} arc \, . \, ab = arc \, . \, \sin a'b' \\ arc \, . \, ac = arc \, . \, \sin a'c' \\ arc \, . \, ad = arc \, . \, \sin a'd' \\ \quad \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

und daher

$$\begin{array}{l} arc \, . \, a''b'' = 2 \, . \, arc \, . \, \sin \, . \, a'b' \\ arc \, . \, b''c'' = 2\,(\arcsin a'c' - \arcsin a'b') \\ arc \, . \, c''d'' = 2\,(\arcsin a'd' - \arcsin a'c') \end{array}$$

oder, da $a'b' = \frac{1}{p} . r$; $a'c' = \frac{2}{p} . r$; $a'd' = \frac{3}{p} . r$,

so ist: $$\text{arc} . a''b'' = 2 . \arcsin \frac{1}{p} . r$$

$$\text{arc} . b''c'' = 2 . \left(\arcsin \frac{2}{p}\, r - \arcsin \frac{1}{p} . r \right)$$

$$\text{arc} . c''d'' = 2 . \left(\arcsin \frac{3}{p} . r - \arcsin \frac{2}{p} . r \right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 1), so ist

$$S' = \frac{M}{p} . \frac{1}{2 . \text{arc} \sin \frac{r}{p}}$$

$$S'' = \frac{M}{p} \frac{1}{2 . \left(\arcsin \frac{2}{p} . r - \arcsin \frac{1}{o} . r \right)}$$

$$S''' = \frac{M}{p} . \frac{1}{2 \left(\arcsin \frac{3}{p} . r - \arcsin \frac{2}{p} . r \right)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

oder allgemein

$$S = \frac{M}{p} . \frac{1}{2 \left(\arcsin \frac{n+1}{p} . r - \arcsin \frac{n}{p} . r \right)}$$

der Coefficient $\frac{M}{p} = \frac{1}{p} . r . h . m$ ist offenbar abhängig von der Intensität des direkten Lichtes L; setzen wir ihn gleich F und den Radius $r = 1$ so ist

$$S = F \frac{1}{2 . \left(\arcsin \frac{n+1}{p} - \arcsin \frac{n}{p} \right)} \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

worin p jede beliebige ganze Zahl bedeutet und n jeden Werth von 0 bis p annehmen kann. Nimmt man p sehr gross, so nähert sich der

Ausdruck $\left(\arcsin \frac{n+1}{p} - \arcsin \frac{n}{p}\right)$ der Grenze

$$\lim . \frac{\arcsin (x + dx) - \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

wenn man x statt $\frac{n}{p}$ setzt, und die Gleichung 3 nimmt die Form an:

$$S = F . \frac{1}{2 . \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}}} = F . \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

$\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}$ ist aber $= \cos \varphi$; folglich ist

$$S = \frac{F}{2} . \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun für jeden beliebigen Einfallswinkel φ die erzeugte Reflexwirkung berechnen.

Ist z. B. $\varphi = 0^0$, so ist $\cos \varphi = 1$ und daher

$$S = \frac{F}{2}$$

d. h. der vom Lichtstrahl senkrecht getroffene Punkt a reflektirt das Licht mit einer Intensität, die gleich der Hälfte von der des direkten Lichtes ist.

Ist $\varphi = 90^0$, so ist $\cos \varphi = 0$ und daher die Intensität des vom Punkt f reflektirten Lichtes $= 0$.

Lässt man den Winkel φ stetig (etwa von 9^0 zu 9^0) wachsen, so erhält man aus Gleichung 5) folgende Intensitäten des Reflexlichtes:

für	$\varphi = 0^0$		$S = 0{,}500 . F$
„	$\varphi = 9^0$	„	$0{,}494 . F$
„	$\varphi = 18^0$	„	$0{,}476 . F$
„	$\varphi = 27^0$	„	$0{,}445 . F$
„	$\varphi = 36^0$	„	$0{,}404 . F$
„	$\varphi = 45^0$	„	$0{,}354 . F$
„	$\varphi = 54^0$	„	$0{,}294 . F$
„	$\varphi = 63^0$	„	$0{,}227 . F$
„	$\varphi = 72^0$	„	$0{,}154 . F$
„	$\varphi = 81^0$	„	$0{,}078 . F$
„	$\varphi = 90^0$	„	$0{,}000 . F$

§. 8.

Aus der Vergleichung dieser Zahlenwerthe geht unmittelbar hervor, dass die Intensität des vom Punkt a reflektirten Lichtes am grössten, dass sie von da an erst langsamer und dann rascher gegen den Punkt F hin abnimmt.

Wäre gafw eine Kugel, so müsste nothwendig die Reflexion des Lichtes in jedem durch aw gehenden grössten Kreis in ganz gleicher Weise stattfinden, wie im Kreis gaf. Drehen wir den Kreis abc...f..w um aw als Axe, so beschreiben sämmtliche Punkte desselben Kreise; da aber bei dieser Drehung der Einfallswinkel des Lichtstrahls für die betreffenden Punkte derselbe bleibt, so müssen offenbar die Kreise bb_0, cc_0, dd_0... Kreise von gleichem Reflexionsvermögen sein.

Betrachten wir den Kreis a''b''c''d'' als den Durchschnitt einer concaven Kugel, welche von dem von der Kugel K ausgestrahlten Reflexlicht beleuchtet wird, so muss offenbar der Punkt a'' ein hellster Punkt sein, da er das stärkste Licht empfängt. Von da an nimmt, wie oben nachgewiesen, die Wirkung des Reflexlichtes, d. h. die Reflexhelligkeit bis zur Schattengrenze FF' stetig ab. Da die Kegelfläche Bhb'' durchweg gleiche Helligkeit hat, so muss auch die Beleuchtung des Kreises Bb'', resp. dessen Helligkeit die nemliche sein, und zwar wird sie sich zur Helligkeit des Punktes a'' verhalten, wie die Lichtintensität des Punktes a zu der des Kreises b_0b, dasselbe gilt von den Kreisen Cc'', Dd''....

Ist die Kugel K sehr klein, so können wir uns vorstellen, dass die Reflexstrahlen vom Punkt a''' herkommen, und die die Schattengrenze FF' beleuchtenden Reflexstrahlen kommen von Punkten des Kügelchens K her, für welche $\varphi = 45^0$ ist; für $\varphi = 45^0$ ist aber $S = 0{,}354 \,.\, F$. Es nimmt daher die Reflexhelle der Kugel Fa''F' vom hellsten Punkt a'' bis zur Schattengrenze FF' von $0{,}5 \,.\, F$ bis zu $0{,}354 \,.\, F$ oder von $\frac{F}{2} \,.\, \cos.0^0$ bis $\frac{F}{2} \,.\, \cos 45^0$ stetig ab.

§. 9.

Um nun auf der Kugel Fa''F' die Lage von Kreisen gleicher Reflexhelle zu erhalten, deren Helligkeit in gleichen Abstufungen vom hellsten Punkt bis zur Schattengrenze abnimmt, wird man aus der Gleichung $S = \frac{F}{2} \,.\, \cos\varphi$ diejenigen Winkel zu bestimmen haben, für