Schattirungskunde

Riess, Karl

Stuttgart, 1871

§. 12. 13. 14. Intensität und Wirkung des atmosphärischen Reflexlichtes auf den hellsten Punkt im Licht und Selbstschatten und auf die Schattengrenze

urn:nbn:de:hbz:466:1-76877

der Entfernung der reflektirenden Fläche u. s. f. Die Berücksichtigung dieses Einflusses muss daher in jedem speciellen Fall bei der Schattirung von Flächen und Körpern dem Ermessen und dem künstlerischen Gefühl des Einzelnen überlassen bleiben. Das Studium der Natur wird für diesen Fall die sichersten Anhaltspunkte geben.

Es wird mit der Wirklichkeit, wenn auch nicht vollkommen, so doch sehr nahe übereinstimmen, wenn wir annehmen, dass von den reflektirenden matten Flächen das Licht ähnlich ausgestrahlt wird, wie von selbstleuchtenden Flächen. Die dadurch erzeugte Helligkeit wird dann namentlich, ausser von der Lage, von der Entfernung der reflektirenden Fläche abhängen, und auch hier das physikalische Gesetz in Anwendung kommen können, dass die Intensität des Lichtes im Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle abnimmt.

Ist z. B. der mit seiner Grundfläche auf einer Ebene E stehende Cylinder (Fig. 10. Taf. II.) durch das aus der Richtung l herkommende Sonnenlicht beleuchtet, ist ab die Schattengrenze und bfe der Schlagschatten, so wird das von der Ebene E reflektirte Licht namentlich auf den untern Theil des Cylinders seinen Einfluss äussern, während der obere Theil mehr und mehr diesem Einfluss sich entzieht und schliesslich fast nur durch atmosphärisches Reflexlicht beleuchtet wird: der untere Theil des Cylinders muss daher durchweg heller sein als der obere, mit Ausnahme desjenigen Theils, welcher um den Punkt d herum liegt, da derselbe von der Ebene E (wegen des Schlagschattens bef) fast gar keines und jedenfalls nur sehr spärliches atmosphärisches Reflexlicht empfängt.

§. 12.

In den zunächst folgenden Paragraphen soll nunmehr der Einfluss des atmosphärischen Reflexlichtes nachgewiesen werden, welchen dasselbe auf die im Selbstschatten und im Schlagschatten befindlichen Körperflächen ausübt.

Ist b (Fig. 11. Taf. II.) ein sehr kleines Kügelchen (also etwa ein Wassertheilchen oder Dampfbläschen der Atmosphäre), welches vom Sonnenstrahl l unter dem Winkel φ so getroffen wird, dass der reflektirte Strahl i die Kugel K im hellsten Punkt a unter dem Winkel β trifft, so ist die dadurch erzeugte Helligkeit des Punktes a

$$H_a = \left(\frac{F}{2} \cdot \cos\varphi\right) \cdot \cos\alpha$$

denn $\frac{F}{2} \cdot \cos\varphi$ ist die Intensität des Reflexstrahls l (s. §. 7 Gleichung 5) und $\sphericalangle\, \alpha$ der Einfallswinkel dieses Strahls.

Nun ist aber $\sphericalangle \alpha = 180 - 2\varphi$ folglich

$$H_a = \left(\frac{F}{2} \cdot \cos\varphi\right) . \cos . 180 - 2\varphi$$

oder

$$H_a = \frac{F}{2} \cdot \cos\varphi . (-\cos . 2\varphi) = -\frac{F}{2} \cos\varphi . \cos . 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Aendert das Kügelchen b seine Lage, so muss nothwendig auch der Winkel φ sich ändern. Wir können uns aber unendlich viele Lagen des Kügelchens b denken, in welchen jedesmal ein von demselben ausgehender Reflexstrahl die Kugel K im Punkt a trifft; alle diese Strahlen zusammen müssen daher eine Helligkeit erzeugen, welche ausgedrückt ist durch

$$H_a = \Sigma\left(-\frac{F}{2} . \cos\varphi . \cos . 2\varphi\right)$$

folglich ist

$$H_a = -\frac{F}{2} \int . \cos\varphi . \cos 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \int \cos\varphi . \cos 2\varphi &= \int \cos\varphi . (\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) \\ &= \int \cos\varphi (1 - \sin\varphi^2) - \cos\varphi . \sin\varphi^2 \\ &= \int \cos\varphi - 2\cos\varphi . \sin\varphi^2 \\ &= \sin\varphi - 2 \cdot \frac{\sin\varphi^3}{3} \end{aligned}$$

$$H_a = -\frac{F}{2}\left(\sin\varphi - 2\,\frac{\sin\varphi^3}{3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

oder

$$H_a = -\frac{F}{2} \sin\varphi \left(1 - \frac{2}{3} \sin\varphi^2\right) \quad . \quad 4)$$

Nimmt das Kügelchen die Lage b″ an, so kann nur derjenige Reflexstrahl die Kugel im Punkt a erreichen, für welche $\varphi = 90^0$ ist; seine Intensität ist aber $= 0$. Desgleichen kann nur derjenige Reflexstrahl b′a die Kugel im Punkt a erreichen, für welchen $\varphi = 45^0$ ist. Für diesen Strahl ist aber Winkel $\alpha = 90^0$, folglich seine Wirkung $= 0$. Die Lagen b″ und b′ des reflektirenden Kügelchens sind daher zwei Grenzen, innerhalb deren diejenigen Kügelchen liegen müssen, welche einen Reflexstrahl nach a senden können. Nimmt z. B. das reflektirende Kügelchen die Lage b‴ an, so kann von hier aus kein Reflexstrahl den Punkt a mehr erreichen. Wir haben daher das Integral Gleich. 2 innerhalb der Grenzen $\varphi = 45^0$ und $\varphi = 90^0$ zu nehmen oder in Gleich. 3 für φ diese Werthe einzusetzen, wodurch sich ergibt

$$H_a = -\frac{F}{2}\left(\sin 45^0 - \sin 90^0 - \frac{2}{3}(\sin 45^3 - \sin 90^3)\right)$$

$$= -F\left(\frac{1}{2}(0{,}7071 - 1) - \frac{1}{3}(0{,}3534 - 1)\right)$$

$$= F\,(0{,}2159 - 0{,}1464)$$

$$H_a = 0{,}0691\,.\,F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

Dies ist die Helligkeit des Punktes a, erzeugt durch die Reflexstrahlen, welche von den Kügelchen innerhalb des Raumes b′ab″ herkommen; allein diejenigen Kügelchen, welche innerhalb des Raumes b″ag liegen, werden die gleiche Wirkung auf den Punkt a herzorbringen und die Gesammtwirkung wird demnach das Doppelte, also

$$H_a = 0{,}1382\,.\,F\,.$$

sein.

Ist also der **hellste Punkt** a der Kugel im Schlagschatten, so ist die Helligkeit in Folge der Wirkung des Reflexlichtes nicht Null, sondern ca. $\frac{1}{7}$ F.

§. 13.

In derselben Weise lässt sich nun auch die Wirkung des Reflexlichtes auf die Schattengrenze bestimmen.

Ist l (Fig. 12. Taf. II.) die Richtung des Lichtstrahls, also ac die Schattengrenze, und sind b, b′, b″ ... verschiedene sehr kleine Kügelchen, Dampfbläschen der Atmosphäre, so wird jedes derselben einen Reflexstrahl nach dem Punkt a der Schattengrenze senden. Für das Kügelchen b z. B. ist aber offenbar die Intensität des Reflexstrahls ba $S = \frac{F}{2}\,.\cos\varphi$; die dadurch erzeugte Wirkung auf den Punkt a der Kugel

$$H_a = \frac{F}{2}\,.\cos\varphi\,.\cos\alpha.$$

Nun ist aber $\sphericalangle\,\alpha = 90 - \beta$; $\sphericalangle\,\beta = 180 - 2\,\varphi$, folglich $\sphericalangle\,\alpha = 90 - (180 - 2\,\varphi) = 2\,\varphi - 90$. und

$$\cos.\,\alpha = \cos.\,(2\,\varphi - 90) = \sin 2\,\varphi\,.$$

folglich

$$H_a = \frac{F}{2}\,.\cos\varphi\,.\sin 2\,\varphi$$

Die Gesammtwirkung aller nach a gerichteten Reflexstrahlen, welche von den Kügelchen b, b′, b″ . . . . herkommen wird, daher ausgedrückt sein durch

$$H_a = \Sigma \left(\frac{F}{2} . \cos\varphi . \sin 2\varphi \right)$$

oder da für das Kügelchen b′ der $< \varphi = 90^0$ für $b^{IV} < \varphi = 0^0$ ist, diese beiden Lagen der reflektirenden Kügelchen aber Grenzlagen sind, so ist

$$H_a = \int_{90^0}^{0^0} \frac{F}{2} . \cos\varphi . \sin 2\varphi$$

oder

$$H_a = \frac{F}{2} \int_{90^0}^{0^0} \cos\varphi . \sin 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Es ist aber

$$\int \cos\varphi . \sin 2\varphi = -\frac{2}{3} \cos\varphi^3$$

folglich

$$H_a = \left[-\frac{F}{2} . \frac{2}{3} . \cos\varphi^3 \right]_{\varphi = 90}^{\varphi = 0} \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Setzt man für φ die Werthe 0^0 und 90^0 in diese Gleichung ein, so ist, da $\sin 0^0 = 0$ und $\sin 90^0 = 1$

$$H_a = 0 - \left(-\frac{F}{3} \right) = \frac{F}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Die durch das atmosphärische Reflexlicht erzeugte Helligkeit ist in der Schattengrenze $= \frac{F}{3}$

§. 14.

Ist wieder l (Fig. 13. Taf. II.) die Richtung des Sonnenlichtes, also der Punkt c der hellste Punkt im Selbstschatten, so können wir auch für diesen Punkt die durch den atmosphärischen Reflex erzeugte Helligkeit berechnen.

Der von dem Kügelchen b c ausgehende Reflexstrahl b c, dessen Insität $S = \frac{F}{2} . \cos\varphi$ ist, trifft die Kugel im Punkt c, der Einfallswinkel ist α, folglich wieder die dadurch erzeugte Helligkeit

$$H_c = \frac{F}{2} . \cos\varphi . \cos\alpha$$

Es ist aber $< \alpha = 2\varphi$, folglich

$$H_c = \frac{F}{2} . \cos\varphi . \cos 2\varphi .$$

b′ und b″ sind wieder zwei Grenzlagen, und zwar ist für b′ $\sphericalangle \varphi = 45^0$ und für b″ $\sphericalangle \varphi = 0^0$; also die Gesammtwirkung aller von den reflektirenden Dampfbläschen der Atmosphäre nach dem Punkt c gerichteten Reflexstrahlen ausgedrückt durch

$$H_c = \frac{F}{2} \cdot \int_{45^0}^{0^0} \cos\varphi \,.\, \cos.2\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

also mit Rücksicht auf die Grenzen

$$H_c = \frac{F}{2}\left(\sin\varphi - \frac{2}{3}\sin\varphi^3\right)_{\varphi = 45}^{\varphi = 0} \quad . \quad . \quad 2)$$

setzt man die Gegenwerthe für φ ein, so ist da $\sin 0^0 = 0$ und $\sin 45^0 = 0{,}7071$ ist.

$$H_c = \frac{F}{2}\left(0{,}7071 - \frac{2}{3} \,.\, 0{,}7071^3\right)$$
$$= 0{,}2357 \,.\, F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Auch hier werden wir wieder, wie in §. 12, für die Helligkeit des Punktes c das Doppelte von 0,2357 F zu nehmen haben, weil die innerhalb des Raumes g c b″ liegenden reflektirenden Kügelchen den Punkt c in gleicher Weise erhellen, wie die innerhalb des Raumes b″c b′ liegenden und erhalten demnach als grösste Helligkeit auf der Selbschattenseite der Kugel, d. h. für die Helligkeit des hellsten Punktes c

$$H_c = 0{,}4714 \,.\, F \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

§. 15.

Nachdem wir in den vorhergehenden Paragraphen die durch den atmosphärischen Reflex erzeugte Helligkeit in den hellsten Punkten a und c und in der Schattengrenze nachgewiesen haben, soll noch gezeigt werden, wie diese Helligkeit für jeden beliebigen, z. B. für den Punkt e der Kugel berechnet werden kann.

Der von den Kügelchen b (Fig. 14. Taf. II.) ausgehende Reflexstrahl b e hat, wie bekannt, eine Intensität $= \frac{F}{2} \,.\, \cos\varphi$; er trifft die Kugel unter dem Einfallswinkel α. Die Lage des Punktes e sei gegeben durch die auf dem Bogen gemessene Entfernung e c oder durch den Winkel β.

Es ist nun die Helligkeit des Punktes e, welche durch den Reflexstrahl be hervorgebracht wird

$$H_e = \frac{F}{2} \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\alpha$$