Schattirungskunde

Riess, Karl

Stuttgart, 1871

3) Schraubenflächen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76877

müssen hier als einfache gerade zu m'n'' senkrechte Linien a''b'', c''d'' . . . . sich darstellen.

Legt man durch den Mittelpunkt der Normalkugel eine Linie (MN, M'N') parallel zu (mn, m'n') und zeichnet auch hier den Schnitt der vertikal-projicirenden Ebene M'N' mit der Kugel und deren Umklappung, so muss offenbar die Beleuchtung der Umdrehungsfläche im Kreis a''b'' dieselbe sein, wie auf der Kugel in A''B'', vorausgesetzt, dass die Tangente s''t'' parallel ist mit der Tangente S''T''. Nun ist aber die Elipse a'b'a' die Vertikal-Projection von a''b'' und A'B'A' die Vertikal-Projection von A''B'', folglich muss die Helligkeit der Drehungsfläche in a'b'a' und A'B'A' die gleiche sein und man hat daher wieder die Hellenpunkte von A'B'A' auf a'b'a' zu übertragen.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann man sich eine hinreichende Anzahl von Helligkeits-Punkten verschaffen, um mit Sicherheit die Helligkeitscurven auf der Umdrehungsfläche zeichnen zu können.

---

3) Beleuchtung der Schraubenflächen.

a) Die Erzeugende steht senkrecht zur Axe.

(Wendelfläche.)

§. 63.

Um die Helligkeit irgend eines Punktes (a, a') der Schraubenfläche (Fig. 59. Taf. XII.) zu finden, zeichne man die Normale (mn, m'n') im Punkt (a, a'), ziehe durch den Kugelmittelpunkt eine Parallele (OA, O'A') mit (mn, m'n') und bestimme deren Durchschnitt mit der Kugeloberfläche; die Helligkeit des Durchschnittspunktes (A, A') ist sodann die des Punktes (a, a').

Der Cylinder azbdel..., welcher die Axe mit der Wendelfläche gemeinschaftlich hat, schneidet letztere in der Schraubenlinie k'a'z'b'... k''; die Tangente (pq, p'q') im Punkt (a, a') dieser Schraubenlinie berührt auch die Schraubenfläche in diesem Punkt. Die Berührungs-Ebene an die Schraubenfläche im Punkt (a, a') aber ist diejenige Ebene, welche durch die Tangente (pq, p'q') und durch die durch den Punkt (a, a') gehende Erzeugende (sa, a') gelegt werden kann. Da die Erzeugende (sa, a') parallel zur Horizontal-Ebene, so muss auch die Spur der Berührungs-Ebene parallel zu sa sein, ebenso ist die Vertikalspur parallel zu p'q', weil die Tangente (pq, p'q') parallel zur Vertikal-Ebene ist; die Projectionen der Normalen in (a, a') sind demnach die zu sa und p'q' senkrechten Linien mn und m'n'. Alle Tangenten an der Schraubenlinie k'a'b'..., also auch alle Normalen haben gleiche Neigung gegen die

Horizontal-Ebene, für alle ist der Winkel a′t′s′ der gleiche. Zieht man daher durch den Kugelmittelpunkt (O, O′) Linien parallel mit diesen Normalen, so müssen dieselben, da sie alle gleiche Neigung gegen die Horizontalebene, also auch gegen die Axe o, o″ einschliessen, auf einem Kegelmantel liegen, den man durch Drehung der Linie O′A′ um die Axe O′Q″ erhält. Dieser Kegel schneidet aber die Kugel im Parallelkreis (A′A″, AA‴), folglich sind alle Helligkeitspunkte der Schraubenfläche längs der Schraubenlinie k′a′b′l′.... in dem Kreis (A′A″, AA‴) zu suchen. Ueberträgt man nun die Helligkeitspunkte vom Kreis AA‴ der Kugel auf den Kreis abdel... und zwar so, dass der Punkt A auf a zu liegen kommt, so sind diese nur noch in Vertikal-Projection, d. h. auf die Schraubenlinie k′a′b′l′... zu bringen.

Um nun eine hinreichende Anzahl von Helligkeitspunkten zu erhalten, deren stetige Verbindung die gewünschten Hellencurven ergibt, schneide man die Wendelfläche durch concentrische Cylinder und verfahre sodann in der ebenbeschriebenen Weise.

b) Die Erzeugende ist gegen die Axe geneigt.

§. 64.

Die Schraubenlinie e′f′a′g′h′ (Fig. 60. Taf. XIII.) sei die Leitlinie einer Schraubenfläche, die durch den Punkt (a, a′) gehende, die Axe in (c,c′) schneidende Gerade (cd, c′d′) erzeuge die Schraubenfläche dadurch, dass sie an jener Schraubenlinie fortgleitet, während sie die Axe stets unter dem Winkel c″c′d′ schneidet.

Eine Berührungs-Ebene im Punkt (a, a′) z. B. ist diejenige Ebene, welche durch die Erzeugende (cd, c′d′) und durch die Tangente im Punkt (a, a′), also durch die Linie (pq, p′q′) gelegt werden kann. Die Horizontalspur der Linie (cd, c′d′) ist der Punkt d, die Horizontalspur der Tangente (pq, p′q′) ist der Punkt q, wenn nemlich die Länge aq = der Länge des Halbkreises afe ist; die Verbindungslinie der Punkte d und q ist demnach die Horizontalspur der Berührungsebene an der Schraubenfläche in (a, a′). Die Horizontalprojection der Normalen auf dieser Ebene, also auch auf der Schraubenfläche im Punkt (a, a′) ist die auf dq senkrechte Linie mn. Die Vertikalprojection zu mn ist offenbar die zu c′d′ senkrechte Linie m′n′, weil (cd, c′d′) parallel zur Vertikal-Ebene ist, die Vertikalspur der Berührungs-Ebene daher parallel mit c′d′ sein muss.

Die mit (mn, m′n′) parallele durch den Mittelpunkt der Kugel gezogene Gerade (OA, O′A′) schneidet die Kugeloberfläche im Punkt (A, A′), folglich ist die Helligkeit des Punktes (a, a′) die von (A, A′).

Da nun aber wie in dem Beispiel des vorigen §. die Normalen auf der Schraubenfläche längs der Schraubenlinie e′f′a′g′ ... gegen die Horizontal-Ebene gleiche Neigung haben, so liegen die mit den Normalen durch den Mittelpunkt der Kugel gezogenen Parallelen auf einem Drehungskegel, dessen Mantellinien mit der Horizontal-Ebene denselben Winkel machen wie die Normalen. Bringen wir die Normale (m n, m'n') in die zur Vertikal-Ebene parallele Lage (a n'', a'n'''), so ist der Winkel k'a'n''' der gesuchte Neigungswinkel und daher die Gerade N'''F' durch den Kugelmittelpunkt so zu ziehen, dass $\sphericalangle$ N'''F'K' = n'''a'k'. Jede mit irgend einer der genannten Normalen durch O' parallel gezogenen Gerade ist nun eine Mantellinie des Kegels N'''O'C', und alle Helligkeitspunkte der Schraubenfläche längs der Schraubenlinie e'f'a'g'h' werden daher auf C'B' zu suchen sein. Da O N $\|$ m n, so ist die Helligkeit des Punktes (a, a') die des Punktes (A, A'). Ueberträgt man nun die auf dem Kreis C B liegenden Helligkeitspunkte auf den Kreis a g h f so, dass der Punkt A mit dem Punkt a correspondirt, so hat man dieselben nur noch in Vertikalprojection zu bringen.

Schneidet man die Schraubenfläche wieder (wie im vorigen Beispiel §. 63) durch concentrische Cylinder, so erhält man als Schnitt mit derselben jedesmal eine Schraubenlinie, die mit der ersten (der Leitlinie) gleiche Ganghöhe c''c''' hat. Da aber die Durchmesser der Schraubencylinder verschieden sind, so muss jede dieser Schraubenlinien eine andere Steigung, folglich auch andere Tangenten und Normalenrichtung haben. Für jede Schraubenlinie wird man desshalb auch eine andere mit den Normalen parallele Kegelfläche, also auch andere Beleuchtungspunkte finden, deren stetige Verbindung die betreffenden Helligkeitscurven auf der Fläche ergibt.

§. 65.

Wir können uns die gewundene Fläche (Fig. 61. Taf. XIII.) dadurch entstanden denken, dass das ebene Flächenstück m n o p q r s t mit dem Mittelpunkt x in der Axe x'x'' sich in die Höhe schiebt, während eine der Ecken an einer Schraubenlinie fortgleitet.

In den dadurch entstandenen Kanelirungen können wir uns eine Kugel fortrollend denken, die dieselben in den Bogen (s t, s't'), (t m, s''t''), (m n, s'''t''') u. s. f. berührt, und daher in diesen dieselbe Helligkeit hat, wie die Kugel; die Hellenpunkte können von letzterer auf die entsprechenden Berührungsbogen leicht übertragen werden.

Da die Berührung stets auf dem horizontalen Kugelumriss, in der Vertikalprojection also in einem Theil der Linie v w stattfindet, der Mittelpunkt der berührenden Kugel aber auf der Schraubenlinie (a b c d e, a'b'c'd'e') liegen muss, so wird man am einfachsten die auf v w liegenden Hellenpunkte etwa auf dem Rande eines Papierstreifens verzeichnen, dann den Papierstreifen so an die Linie s''t'', s'''t''', $s^{IV}t^{IV}$ legen, dass derjenige Punkt, welcher dem Punkt a' entspricht, auf b', c', d', e'.. zu liegen kommt, sodann die auf die Strecken $s''t''$, $s'''t'''$, $s^{IV}t^{IV}$ fallenden Punkte markiren, und die gleichnamigen durch Curven stetig verbinden.

Anmerkung. Diese Construction ist jedoch nur annäherungsweise richtig, namentlich setzt sie ein bedeutendes Steigungsverhältniss voraus. Andernfalls muss die im nächsten §. angegebene Construktion der Beleuchtung zur Anwendung kommen.

Beleuchtung der schraubenförmigen Wulstfläche.

(Fig. 62. Taf. XIII.)

§. 66.

Die schraubenförmige Wulstfläche können wir uns dadurch entstanden denken, dass eine Kugel mit ihrem Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie sich fortbewegt; die Kugel berührt dabei die erzeugte Fläche stets in einem grössten Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Richtung der Schraubenlinie, also senkrecht auf der betreffenden Tangente steht. Da aber die Tangenten stets gleiche Neigung gegen die Horizontal-Ebene haben, so ist auch die Neigung des Berührungskreises gegen die Horizontal-Ebene immer dieselbe, und daher die Horizontalprojection desselben eine Elipse von stets gleicher Form und Grösse; die grosse Axe aber ist stets nach dem Punkt s gerichtet.

Befindet sich die Erzeugende (Kugel) in der Lage (x, x′), so ist, da die Tangente im Punkt (x, x′) parallel zur Vertikal-Ebene ist, die zu m′n′ senkrechte Linie a′c′ die Vertikalprojection des Berührungskreises; seine Horizontalprojection ist demnach die Elipse a b c b″ und die Horizontalprojectionen aller Berührungskreise sind Elipsen von gleicher Form und Grösse, deren Vertikal-Projectionen ohne Schwierigkeit gezeichnet werden können. Um die Helligkeitspunkte auf den Berührungskreisen zu erhalten, müsste man die Normalkugel durch Ebenen schneiden, welche mit den Ebenen der Berührungskreise parallel sind und durch den Kugelmittelpunkt gehen; die Projectionen dieser Schnitte müssen aber, wie leicht einzusehen, Elipsen von gleichen Axenverhältnissen, wie die Projectionen der Berührungskreise sein, man wird demnach nur in die Projection der Normalkugel Elipsen zu zeichnen haben, welche eine mit den letzteren parallele Lage haben und ihnen ähnlich sind.

Noch einfacher und rascher kommt man aber zum Ziel, wenn man eine Kugel von der Grösse der Erzeugenden mit den Curven gleicher Helligkeit auf Pauspapier zeichnet, diese mit ihrem Mittelpunkt so auf die Mittelpunkte v, w, x, y ... v′, w′, x′, y′ ... legt, dass die lotrechte Axe der Normalkugel in allen Lagen lotrecht bleibt, und nun auf den Elipsen, d. h. auf den Projectionen der Berührungskreise diejenigen Hellenpunkte markirt, in welchen sie von den Hellencurven der Erzeugenden geschnitten werden. Durch stetige Verbindung der gleichnamigen Hellenpunkte ergeben sich sodann die Curven gleicher Helligkeit auf der schraubenförmigen Wulstfläche.