



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Abschnitt II. Die einfachsten Trägheitsmomente ebener Flächen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Abschnitt II.

Die einfachsten Trägheitsmomente ebener Flächen.

20) Begriff des axialen Trägheitsmomentes.

Figur 29 stellt eine beliebig gestaltete ebene Fläche F und eine in derselben Ebene liegende Achse AB dar. Man denke sich die Fläche in unendlich zahlreiche Parallelstreifen zerlegt, die selbstverständlich unendlich schmal werden.

Diese sollen parallel zu AB sein.

Während man das Produkt $f \cdot z$ aus jedem Streifen f und seinem Abstande z

von der Achse AB als das statische Moment des Streifens in Bezug auf AB

bezeichnete, nennt man das Produkt fz^2 aus f und dem Quadrate des Abstandes z

das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf die Achse AB . Der

Grund für diese Benennung liegt in der Mechanik und kann hier noch nicht erörtert werden.

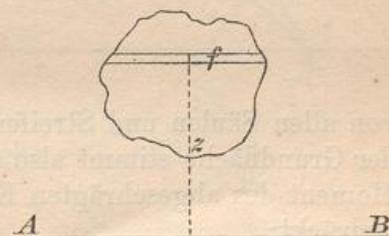
Wie ferner $M = \sum f z$ die Summe aller einzelnen statischen Momente, also zugleich das statische Moment der Gesamtfläche bedeutet, so bedeutet $T = \sum f z^2$ die Summe aller einzelnen Trägheitsmomente und zugleich das Trägheitsmoment der Gesamtfläche in Bezug auf die Achse AB .

Wegen der Bezugnahme auf eine Achse bezeichnet man ein solches Moment als axiales Trägheitsmoment.

21) Veranschaulichung des Trägheitsmomentes durch abgesschrägte Körper.

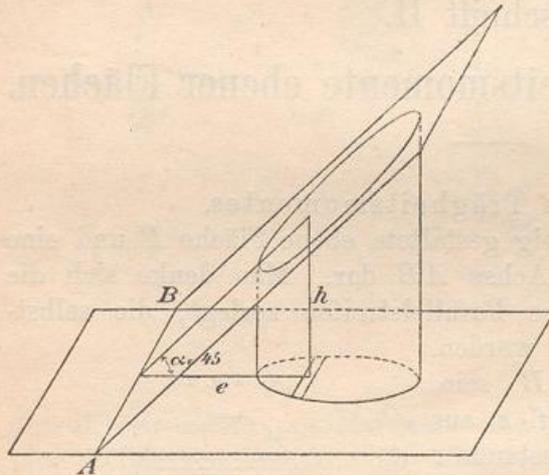
Man denke sich durch AB eine unter 45° gegen die Zeichnungsebene geneigte Ebene gelegt, welche die über der Fläche F zu errichtende senkrechte Säule schräg abschneidet. In Figur 30 ist

Fig. 29.



dies für eine beliebig gestaltete Fläche dargestellt. Über jedem schmalen Parallelstreifen f steht dann eine Säule, deren Höhe h gleich der Entfernung e von der Achse AB ist. Ihr Inhalt ist durch fh und zugleich durch fe bestimmt, also gleich dem statischen Momente des Streifens in Bezug auf AB . Da dies von allen Streifen gilt, so folgt, daß die Maßzahl für den Inhalt des abgeschrägten Körpers

Fig. 30.

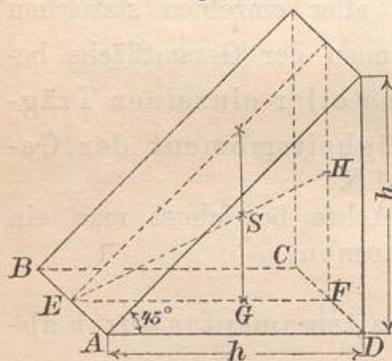


ebenso groß ist, wie die für das statische Moment der Fläche in Bezug auf AB , also, abgekürzt ausgedrückt: Körperinhalt gleich Flächenmoment. Jede der kleinen Säulen hat in Bezug auf AB ebenfalls ein statisches Moment, welches gleich dem Produkte aus dem Inhalte fh und der Entfernung e ist, also gleich $fhe = fe^2$. Ebenso groß ist aber auch das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf AB . Dies gilt

von allen Säulen und Streifen. Die Maßzahl für das Trägheitsmoment der Grundfläche stimmt also überein mit der Maßzahl für das statische Moment des abgeschrägten Körpers in Bezug auf AB , oder kurz ausgedrückt:

Statisches Moment des Körpers in Bezug auf AB gleich dem Trägheitsmoment der Grundfläche in Bezug auf AB .

Fig. 31.



Diese einfache Vorstellungsweise ermöglicht es, die Berechnung der Trägheitsmomente für einige Flächen durchzuführen.

22) **Aufgabe.** Ein Rechteck habe die Seiten b und h , sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine der Seiten b soll berechnet werden.

Auflösung. $ABCD$ sei das Rechteck mit Seite $AB = b$ und $AD = h$. Über ihm ist das entsprechende Körperdiagramm gezeichnet,

dessen Höhe h ist. Nach bekanntem Dreieckssatze liegt der Schwerpunkt S so, daß $ES = \frac{2}{3}EH$, folglich auch $EG = \frac{2}{3}EF = \frac{2}{3}h$ ist.

Der Körperinhalt ist $J = (bh) \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{2}$. Das statische Moment des Körpers in Bezug auf AB ist also $M = \left(\frac{2}{3}h\right) \cdot J = \frac{2}{3}h \frac{bh^2}{2} = \frac{bh^3}{3}$. Ebenso groß ist das gesuchte Trägheitsmoment. Also

$$T = \frac{bh^3}{3}.$$

Man kann auch schreiben $T = bh \cdot \frac{h^2}{3} = F \frac{h^2}{3}$, wo F die Rechtecksfläche bedeutet.

23) Veranschaulichung des Trägheitsmomentes durch parabolisch begrenzte Körper.

Man denke sich dasselbe Rechteck, wie vorher, jedoch stehe über jedem Streifen eine Säule von der Höhe z^2 . Ihr Inhalt ist fz^2 , also ebenso groß, wie das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf AB . Der Inhalt dieses Körpers stimmt also überein mit dem Trägheitsmoment der Grundfläche, er muß also nach 3) gleich $\frac{bh^3}{3}$ sein, d. h. gleich dem dritten Teile des über der Fläche stehenden Rechteckskörpers.

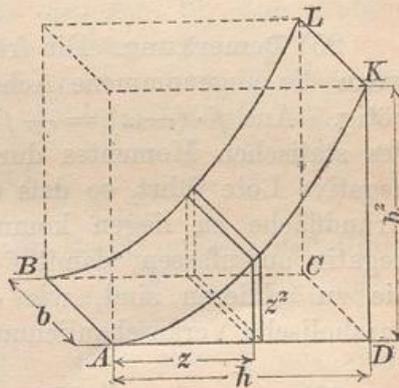
Man bezeichnet die Curven AK bzw. BL als Parabeln. Die gekrümmte Fläche ist die eines parabolischen Cylinders mit ADK oder BCL als Grundfläche. Man hat hier den Satz gefunden, daß die Parabel den dritten Teil vom zugehörigen Rechteck abschneidet.

Denkt man sich in der Grundebene eine beliebige Fläche und errichtet man über ihr eine bis zur parabolischen Fläche reichende Säule, so ist der Inhalt der letzteren identisch mit dem Trägheitsmoment der Grundfläche in Bezug auf die Berührungslinie AB .

24) Aufgabe. Das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf eine Mittellinie zu finden.

Auflösung. In Figur 33 sei $ABCD$ das Rechteck mit der als Achse angenommenen Mittellinie KL . Rechts befindet sich der parabolische Körper von der Höhe $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}$. Da $f \cdot (-z)^2 = f \cdot z^2$ ist, so hat man links denselben Körper zu errichten. Vom Rechteckkörper, dessen Inhalt $\frac{bh^3}{4}$ ist, wird nach Obigem durch die para-

Fig. 32.



bolische Fläche $\frac{2}{3}$ weggeschritten, es bleibt also stehen $\frac{1}{3} \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$.
Das gesuchte Trägheitsmoment ist also $T = \frac{bh^3}{12}$.

Fig. 33.

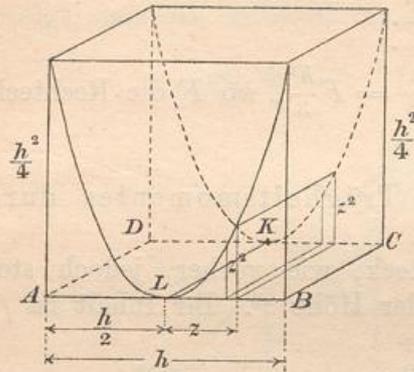
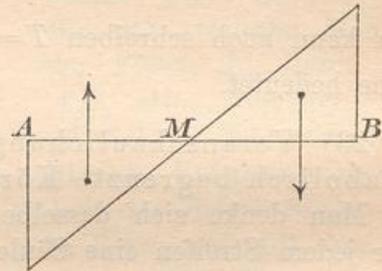


Fig. 34.



25) **Bemerkung.** Die frühere Veranschaulichungsmethode macht, wenn die angenommene Achse die Fläche schneidet, einige Vorsicht nötig. Aus $f \cdot (-z) = -f \cdot z$ folgt nämlich, daß die Darstellung des statischen Momentes durch den abgeschrägten Körper auch auf negative Lote führt, so daß ein Teil des Diagrammkörpers unter die Grundfläche zu liegen kommt. Dort ist dann die Schwerkraft als negativ aufzufassen, damit $f \cdot z^2$ und $f(-z) \cdot (-z)$ Momente geben, die zu addieren sind, wie es das Trägheitsmoment verlangt. Die parabolische Veranschaulichung ist daher im allgemeinen vorzuziehen.

26) **Bemerkung.** Neben $M = \sum fz$ und $T = \sum fz^2$ könnte man noch andere Momente, wie $\sum fz^3$, $\sum fz^4$ u. s. w. betrachten. Dies soll vorläufig nicht geschehen. Jedoch sei darauf aufmerksam gemacht, daß man, je nach dem Exponenten von z , von Momenten 1^{ter}, 2^{ter}, 3^{ter} u. s. w. Ordnung sprechen kann.

27) **Satz über die Parallelverschiebung.** Ist das Trägheitsmoment einer Fläche F in Bezug auf eine Schwerpunktsachse gleich T , so ist es in Bezug auf eine parallele, um e von ihr entfernte Achse derselben Ebene $T_1 = T + e^2 F$.

Beweis. Wird die Achse von AB nach $A_1 B_1$ verschoben, so wird der Abstand z eines Parallelstreifens in $z + e$ verwandelt, und aus $f \cdot z^2$ wird $f(z + e)^2 = fz^2 + fe^2 + 2fze$. Demnach geht $T = \sum fz^2$ über in $T_1 = \sum f(z + e)^2 = \sum fz^2 + \sum fe^2 + \sum 2fze = \sum fz^2 + e^2 \sum f + 2e \sum fz$. Der erste Posten ist das alte Träg-

heitsmoment T , der zweite ist identisch mit $e^2 F$, der dritte verschwindet, denn $\sum fz$ ist das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Schwerpunktsachse AB , also gleich $0 \cdot F = 0$. Man hat also in der That $T_1 = T + e^2 F$.

Ob man um $+e$ oder $-e$ verschiebt, ist gleichgültig, stets tritt eine Zunahme um $e^2 F$ ein.

Das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine Schwerpunktsachse ist demnach stets kleiner, als in Bezug auf jede zu dieser parallele Achse. Je größer man die Verschiebung e macht, um so größer wird das Trägheitsmoment.

Man hat nur noch nötig, die Trägheitsmomente in Bezug auf Schwerpunktsachsen zu untersuchen, da sie sich für alle andern nach dem gefundenen Satze leicht ableiten lassen.

Auch an den beiden Diagrammkörpern läßt sich der Satz leicht beweisen. Aus ihm lassen sich Sätze über parabolisch begrenzte Körper ableiten.

28) **Beispiel.** Für das Rechteck war in Bezug auf die Mittellinie $T = \frac{bh^3}{12}$. Verschiebt man die Achse um $e = \frac{h}{2}$, so erhält man $T_1 = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 F = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot bh = \frac{bh^3}{3}$. Dies stimmt mit dem früheren Resultate überein.

29) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten b und h in Bezug auf die zu b parallele Schwerpunktsachse zu finden.

Auflösung. Für das Rechteck ist in Bezug auf die Achse KL das Trägheitsmoment $T = \frac{bh^3}{12}$. Für das Dreieck ABD ist es in Bezug auf KL halb so groß, wie man am Diagonalschnitt des Diagrammkörpers (Fig. 33)

erkennt, also gleich $\frac{bh^3}{24}$. Bei der Verschiebung nach dem Schwer-

Fig. 35.

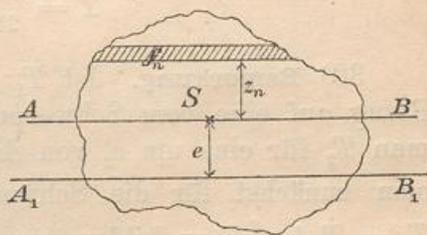


Fig. 36.

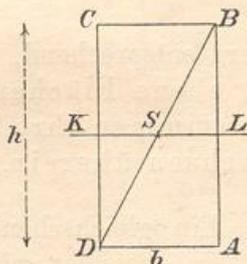
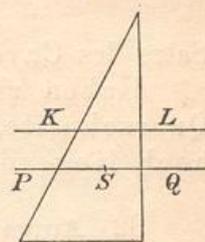


Fig. 37.



punkte hin, d. h. um die Strecke $\frac{h}{6}$, vermindert sich der Werth um $e^2 F = \frac{h^2}{36} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{72}$. In Bezug auf PQ erhält man demnach

$$T = \frac{bh^3}{24} - \frac{bh^3}{72} = \frac{bh^3}{36}.$$

30) **Bemerkung.** Ist T_1 das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine vom Schwerpunkte um e_1 entfernte Achse, und will man T_2 für eine um e_2 von ihm entfernte Achse bestimmen, so hat man zunächst für die Schwerpunktsachse $T = T_1 - e_1^2 F$, sodann $T_2 = T + e_2^2 F$ zu bilden, man erhält also

$$T_2 = T_1 - e_1^2 F + e_2^2 F = T_1 + (e_2^2 - e_1^2) F.$$

31) **Bemerkung.** Verschiebt man einen Parallelstreifen f parallel zur Achse, so bleibt die Entfernung z , folglich auch das Trägheitsmoment fz^2 ungeändert. Demnach haben Rechteck und Parallelogramm von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe in Bezug auf die in ihrer Richtung bleibende Mittellinie dasselbe Trägheitsmoment $\frac{bh^3}{12}$. Dasselbe gilt von der krummlinig begrenzten Fläche der Fig. 38.

Fig. 38.

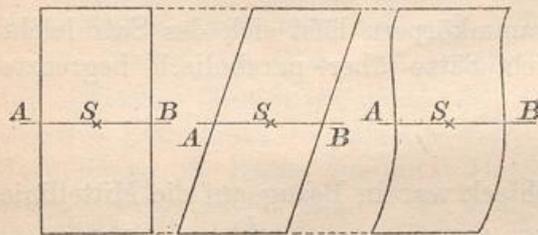
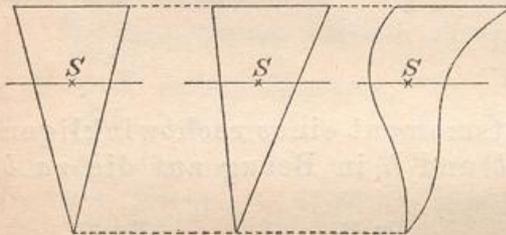


Fig. 39.



Dasselbe gilt von den in Fig. 39 dargestellten „Dreiecken“. Für die angedeutete Schwerpunktsachse haben sämtliche das Trägheitsmoment $T = \frac{bh^3}{36}$.

Überhaupt kann man, dem Satze des Cavalieri entsprechend, folgenden Satz aussprechen:

Haben zwei ebene Flächen in gleichen Höhen gleiche Querschnitte, so stimmen ihre Trägheitsmomente für gleich hoch liegende Achsen überein.

32) **Aufgabe.** Ein gleichschenkliges Dreieck habe die Basis b und die Höhe h . Wie groß ist sein Trägheitsmoment für die Basis CD , wie groß für die Parallele zur Basis durch die Spitze, also für EF , wie groß für die Mittellinie KL ?

Auflösung. Für CD erhält man

$$T_1 = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}.$$

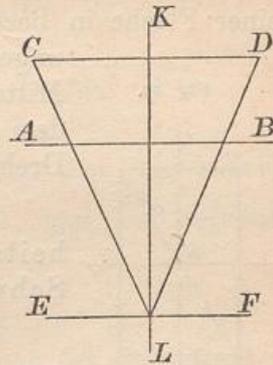
Für EF wird

$$T_2 = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{2bh^3}{9} = \frac{bh^3}{4}.$$

Für KL giebt Dreieck KDL (ähnlich wie bei T_1) den Wert $\frac{h\left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{96}$. Dreieck KLC

giebt ebenso viel, also wird für das ganze Dreieck $T_3 = \frac{hb^3}{48}$.

Fig. 40.



33) Begriff des polaren Trägheitsmomentes.

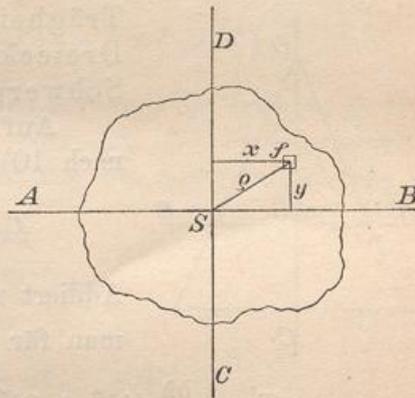
Man denke sich jedes Teilchen f einer Fläche mit dem Quadrate des Abstandes ϱ von einem festen Punkte multipliziert, dann ist das Produkt $f\varrho^2$ das polare Trägheitsmoment jedes Teilchens in Bezug auf den festen Punkt. Das polare Trägheitsmoment T_p der Gesamtfläche wird also definiert durch die Gleichung

$$T_p = \sum f\varrho^2.$$

34) **Satz.** Das polare Trägheitsmoment in Bezug auf einen Punkt ist gleich der Summe zweier axialen in Bezug auf Achsen, die sich in dem Punkte rechtwinklig schneiden.

Beweis. In Fig. 41 ist $\varrho^2 = x^2 + y^2$, folglich gilt für jedes Teilchen f die Gleichung $f\varrho^2 = fx^2 + fy^2$, also für die Gesamtfläche $\sum f\varrho^2 = \sum fx^2 + \sum fy^2$ oder $T_p = T_1 + T_2$.

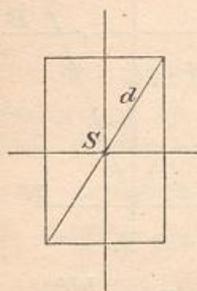
Fig. 41.



35) **Bemerkung.** Auch von dem polaren Trägheitsmomente gilt der Verschiebungssatz $T_p' = T_p + e^2 F$. Ist nämlich T_p das polare Moment für den Schwerpunkt, so ist dies gleich dem axialen in Bezug auf die Verschiebungslinie e als Achse, vermehrt um das Moment in Bezug auf die dazu senkrechte Schwerpunktsachse. Bei der Verschiebung ändert sich nur das letztere um $e^2 F$.

36) **Bemerkung.** Die Summe der axialen Trägheitsmomente einer Fläche in Bezug auf die Schenkel eines rechten Winkels bleibt ungeändert, wenn sich dieser in der Ebene um den Mittelpunkt dreht. Die Summe ist nämlich stets gleich dem polaren Trägheitsmomente in Bezug auf den Drehungspunkt.

Fig. 42.



37) **Aufgabe.** Wie groß ist das polare Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf den Schwerpunkt?

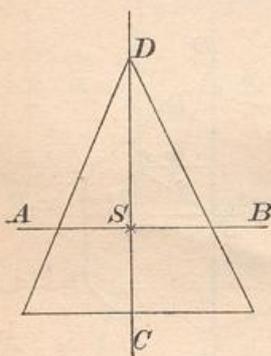
Auflösung. In Bezug auf die eine Mittellinie hat man $T_1 = \frac{bh^3}{12}$, in Bezug auf die andere $T_2 = \frac{hb^3}{12}$.

Demnach ist

$$T_p = T_1 + T_2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) = \frac{bh}{12}d^2 = \frac{Fd^2}{12},$$

wo d die Diagonale, F die Fläche bedeutet.

Fig. 43.



38) **Aufgabe.** Wie groß ist das polare Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis b und Höhe h für den Schwerpunkt und für die Spitze?

Auflösung. Für den Schwerpunkt ist nach 10) und 13)

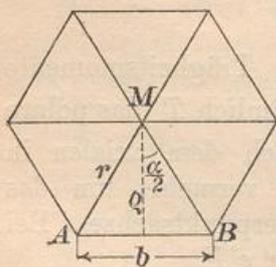
$$T_p = \frac{bh^3}{36} + \frac{hb^3}{48} = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2).$$

Addiert man dazu $\left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{bh}{2}$ oder $\frac{2}{9}bh^3$, so erhält man für die Spitze

$$T'_p = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2) + \frac{32}{144}bh^3 = \frac{bh}{48}(12h^2 + b^2).$$

39) **Aufgabe.** Wie groß ist das polare Trägheitsmoment des regelmäßigen n -Ecks mit Umfang u in Bezug auf den Schwerpunkt?

Fig. 44.



wo

$$T_p = \frac{b\varrho}{48}(12\varrho^2 + b^2),$$

$$\varrho = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2} \cot \frac{180^\circ}{n} \text{ ist.}$$

Führt man $u = nb$ ein, so ergibt sich für die Gesamtfläche

$$T_p = \frac{n \frac{u}{n} \rho}{48} \left(12 \rho^2 + \frac{u^2}{n^2} \right) = \frac{\rho u}{48} \left(\frac{u^2}{n^2} + 12 \rho^2 \right).$$

40) Folgerungen für den Kreis. Nimmt man im letzten Resultate n unendlich groß an, so wird $\frac{u^2}{n^2} = 0$, und das Polygon wird zum Kreise mit Umfang

$$u = 2 \rho \pi.$$

Das polare Trägheitsmoment des Kreises ist also in Bezug auf den Mittelpunkt

$$T_p = \frac{\rho (2 \rho \pi)}{48} 12 \rho^2 = \frac{\rho^4 \pi}{2} = \frac{\pi d^4}{32},$$

wo d den Durchmesser bedeutet.

Für den concentrischen Kreisring mit r und r_1 bzw. d und d_1 erhält man durch Subtraktion

$$T_p = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{2} (r^4 - r_1^4).$$

Das axiale Trägheitsmoment des Kreises ist halb so groß, als das polare, denn $T_p = T_1 + T_2$, oder, da die beiden letzten übereinstimmen, $T_p = 2 T_1$. Demnach ist für den Kreis mit Radius r und Durchmesser d

$$T = \frac{r^4 \pi}{4} = \frac{d^4 \pi}{64},$$

für den concentrischen Kreisring

$$T = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4).$$

41) Aufgabe. Die Trägheitsmomente einer Ellipse mit den Halbachsen a und b zu berechnen.

Auflösung. Für den Kreis mit Radius b ist in Bezug auf AB $T = \frac{\pi b^4}{4}$. Für die Ellipse ist jede

Querlinie $\frac{a}{b}$ mal so groß, wie die entsprechende des Kreises. Folglich ist für die Ellipse in Bezug auf AB

$$T = \frac{\pi b^4}{4} \frac{a}{b} = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Holz Müller, Ingenieur-Mathematik. I.

Fig. 45.

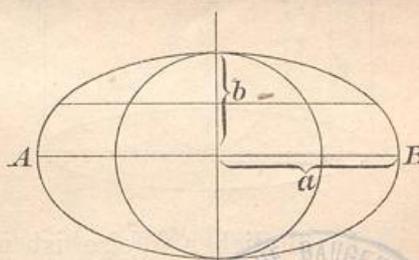
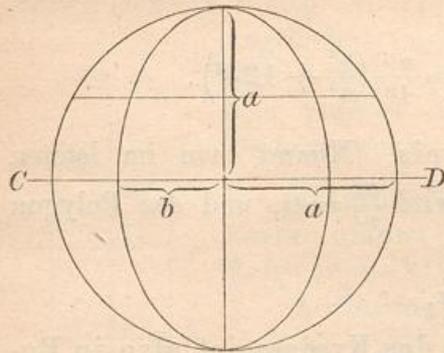


Fig. 46.



Für den Kreis mit Radius a ist in Bezug auf CD das Trägheitsmoment $T = \frac{\pi a^4}{4}$. Für die Ellipse ist jede Querlinie das $\frac{b}{a}$ -fache von der entsprechenden des Kreises. Für die Ellipse ist also in Bezug auf CD

$$T = \frac{\pi a^4}{4} \frac{b}{a} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Das Polarmoment der Ellipse ist

$$T_p = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{a b \pi}{4} (a^2 + b^2) = \frac{F}{4} (a^2 + b^2).$$

42) Veranschaulichung des polaren Trägheitsmomentes.

Fig. 47 stellt eine Kreisfläche dar, über der ein Cylinder von der Höhe r^2 errichtet ist. Über jedem Flächenteilchen f in der Entfernung ρ vom Mittelpunkte denke man sich eine Säule von der Höhe ρ^2 errichtet, so daß der Säulinhalt $f\rho^2$ ist. Dann liegen die Endpunkte der Lote in einer Fläche, die man als Drehungsparaboloid bezeichnet. Der Inhalt des Aufsenkörpers ist gleich $\sum f\rho^2$, stimmt also mit dem Trägheitsmomente überein, d. h. er ist gleich $\frac{r^4 \pi}{2}$, d. h. gleich der Hälfte des Cylinders.

Fig. 47.

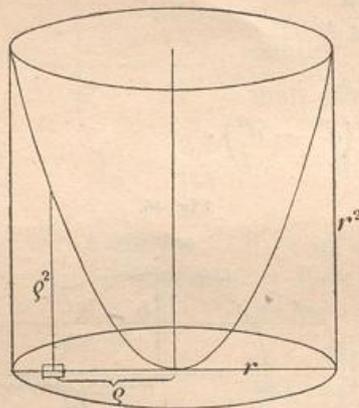
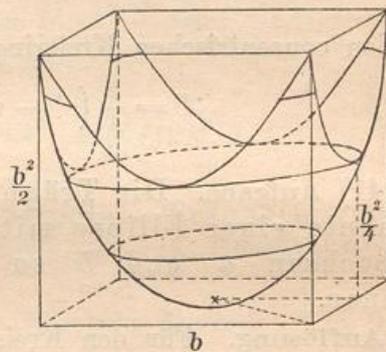


Fig. 48.



In ähnlicher Weise ist in Fig. 48 das polare Trägheitsmoment eines Quadrates veranschaulicht. Aus dem Außenraume des Drehungsparaboloids ist der entsprechende quadratische Cylinder ausgeschnitten. Der Aufsenkörper ist vom Inhalte

$$T_p = \frac{b b^3}{12} + \frac{b b^3}{12} = \frac{b^4}{6},$$

also, da das Prisma den Inhalt $\frac{b^4}{2}$ hat, gleich dem dritten Teile des Prismas*).

In entsprechender Weise läßt sich das polare Trägheitsmoment jeder Fläche durch einen Diagrammkörper veranschaulichen. Kennt man die polaren Trägheitsmomente, so kann man Sätze über den Inhalt von Körpern aussprechen, die in solcher Weise parabolisch begrenzt sind. Ist die Parabel von der Form $y = \rho^2$, so ist der Inhalt der parabolisch begrenzten Säule gleich dem polaren Trägheitsmomente T_p in Bezug auf den Berührungspunkt der parabolischen Fläche. Ist sie von der Form $y = a\rho^2$, so der Inhalt gleich aT_p .

43) Zusammenhang des polaren Trägheitsmomentes mit den Trägheitsmomenten der Dynamik. In der Dynamik handelt es sich nicht um Flächenteilchen, sondern um Massenteilchen. An Stelle der fz^2 und $f\rho^2$ treten Größen mz^2 bzw. $m\rho^2$, an Stelle der Gesamtfläche tritt eine Gesamtmasse.

So war z. B. für den Kreis das polare Trägheitsmoment $T_p = \frac{r^4\pi}{2} = (r^2\pi) \frac{r^2}{2} = F \frac{r^2}{2}$. Setzt man an Stelle von F die Masse m , mit der die Fläche homogen belegt zu denken ist, so ergibt sich $T = m \frac{r^2}{2}$ als das dynamische Trägheitsmoment einer Kreisscheibe von der Masse m in Bezug auf das Lot im Mittelpunkte.

Für das Rechteck mit der Diagonale d war das polare Trägheitsmoment $T_p = bh \frac{d^2}{12} = F \frac{d^2}{12}$. Demnach ist $m \frac{d^2}{12}$ das dynamische

Fig. 49.

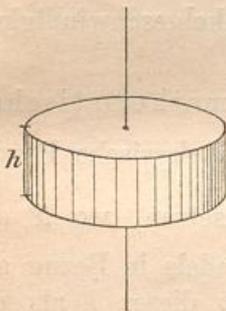


Fig. 50.

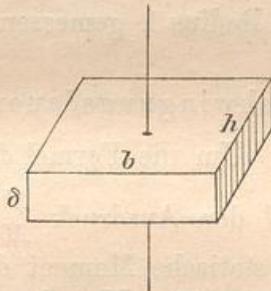
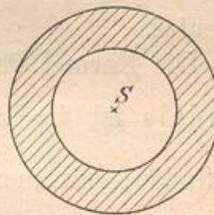


Fig. 51.



Trägheitsmoment einer Rechteckscheibe in Bezug auf das Lot im Mittelpunkte der Rechtecksfläche.

*) Man denke sich ein Gefäß von quadratischem Querschnitt auf der Centrifugalmaschine in Drehung versetzt, so daß die Wasseroberfläche sich parabolisch einstellt. Ist das Gefäß zum 3^{ten} Teile gefüllt, so nimmt der Trichter in dem Momente, wo er den Boden berührt, die oben gezeichnete Gestalt an.

Für einen concentrischen Kreisring war

$$T_p = (r^4 - r_1^4) \frac{\pi}{2} = (r^2 + r_1^2)(r^2 - r_1^2) \frac{\pi}{2} = \frac{r^2 + r_1^2}{2} \cdot F.$$

Demnach ist für den entsprechenden scheibenförmigen Ringkörper das dynamische Trägheitsmoment gleich $m \frac{r^2 + r_1^2}{2}$.

Das mathematische Trägheitsmoment T verhält sich also zum dynamischen T' wie die Fläche F zur Masse m . Ganz allgemein folgt aus

$$T : T' = F : m,$$

dafs

$$T' = \frac{Tm}{F}.$$

44) Einige Anwendungen. In der Mechanik wird gezeigt, dafs das Trägheitsmoment bei beschleunigten Drehungsbewegungen dieselbe Rolle spielt, wie die träge Masse m bei beschleunigten geradlinigen Bewegungen. Bei den letzteren ist die Beschleunigung $g = \frac{m}{p}$, wo p die Triebkraft, m die zu bewegende Masse ist. Ebenso ist bei Drehungen die am Radius 1 zu messende Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{pr}{T'} = \frac{M}{T'},$$

wo $pr = M$ das statische Moment der Triebkraft, T' das dynamische Trägheitsmoment der zu drehenden Masse ist. Die Arbeitswucht (Energie) der geradlinig bewegten Masse ist dort $m \frac{v^2}{2}$, wo v die Geschwindigkeit bedeutet. Bei drehenden Körpern dagegen ist sie $E = T \frac{\vartheta^2}{2}$, wo ϑ die am Radius 1 gemessene Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Die Formel für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ist $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Um die Formel für das physische Pendel zu finden, hat man für l den Ausdruck $\frac{T}{M}$ einzusetzen, wo T das Trägheitsmoment, M das statische Moment des Pendels in Bezug auf die Schwerpunktsachse bedeutet. Man bezeichnet dieses l als die reduzierte Pendellänge.

Erhält ein freischwebender Körper einen excentrischen Stofs, so ist im Anfange die Bewegung identisch mit der Drehung um eine Achse, die von der Richtungslinie des Stofses die Entfernung $\frac{T}{M}$ hat. Daraus berechnet man das Mafs der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes und der drehenden nach dem Stofse.

45) Zusammenhang des axialen Trägheitsmomentes mit Problemen der Mechanik. Auch das axiale Trägheitsmoment einer Fläche kann mit dem dynamischen in die besprochenen Beziehungen gesetzt werden, nur ist dabei die Scheibe unendlich dünn zu denken, d. h. die Fläche selbst ist mit hypothetischer Massenbelegung zu versehen. Auch dann gelten die Formeln $\gamma = \frac{M}{T}$, $E = \frac{T\vartheta^2}{2}$, $l = \frac{T}{M}$. Die Drehung geschieht dabei stets um eine in der Ebene liegende Achse.

Von Bedeutung ist noch eine hydrostatische Anwendung. Die Resultante des Wasserdrucks gegen eine senkrechte Seitenwand liegt in der Tiefe $h = \frac{T}{M}$, wo T das Trägheitsmoment der Fläche, M ihr statisches Moment in Bezug auf die Schnittlinie mit der Wasseroberfläche ist. Ähnliches gilt von schrägliegenden Druckflächen.

Die wichtigste Anwendung des axialen Trägheitsmomentes ebener Flächen geschieht aber in der Festigkeitslehre. So ist z. B. die Tragfähigkeit eines Freitragers von Länge l und von rechteckigem Querschnitt mit Grundlinie b und Höhe h

$$P = \frac{ST}{l \frac{h}{2}} = \frac{S \frac{bh^3}{12}}{l \frac{h}{2}} = \frac{Sbh^2}{6l},$$

wo S die zulässige Spannung für die Flächeneinheit bedeutet.

Die allgemeine Formel lautet

$$P = \frac{ST}{la},$$

wo a den Abstand der äußersten Randfaser von der durch den Schwerpunkt des Querschnittes gelegten horizontalen Biegungsachse bedeutet. Den Ausdruck $\frac{T}{a}$ bezeichnet man als Widerstandsmoment W (oder auch als Querschnittsmodul Z). Es ist z. B. für das Rechteck

$$W = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}, \text{ für den Kreis ist } W = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ für den Kreisring}$$

$$W = \frac{\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4)}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi (d^4 - d_1^4)}{32d}. \text{ Für die Strebfestigkeit ist } W \text{ von}$$

entsprechender Bedeutung.

46) Zusammenhang des polaren Trägheitsmomentes mit der Festigkeitslehre.

Ist PR das eine Triebwelle verdrehende Moment, so ist die

Gleichgewichtsgleichung der Festigkeitslehre $PR = SW_p$, wo S die zulässige Schubspannung für die Flächeneinheit, W_p den Ausdruck $\frac{T_p}{a}$, das polare Widerstandsmoment, bedeutet. Für den Kreis z. B. ist

$$W_p = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16},$$

für das Quadrat

$$W_p = \frac{\frac{b^4}{6}}{b\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{6\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}}.$$

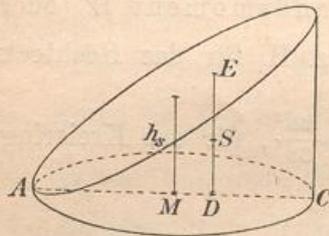
Dafs auch die Verdrehung der Welle von W_p abhängig ist, soll unten angedeutet werden.

Bemerkung. Diese Bedeutung für die Festigkeitslehre allein würde hinreichen, das Studium der betrachteten Momente als besonders wichtig erscheinen zu lassen. Sie sind aber auch unentbehrlich für gewisse mathematische Berechnungen, die wiederum für die Mechanik von Wichtigkeit sind. Auch dafür sollen einige Beispiele gegeben werden. Es wird sich besonders um abgeschrägte Säulen und um Drehungskörper handeln.

47) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Cylinderhufs zu bestimmen.

Auflösung. Ist die Schrägfläche unter 45° geneigt, so ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf die durch A gehende Schnittlinie der beiden Ebenen gleich dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf diese Achse; d. h.

Fig. 52.



$$T = \frac{r^4\pi}{4} + (r^2)r^2\pi = \frac{5}{4}r^4\pi.$$

Der Inhalt des Körpers aber ist gleich dem statischen Momente der Grundfläche in Bezug auf jene Achse, d. h.

$$M = (r^2\pi)r = r^3\pi = J.$$

Ist nun D die Projektion des Körperschwerpunktes S , so ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf die Schnittlinie zugleich $AD \cdot J$ oder $AD \cdot M$, also ist, wenn $AD = e$ gesetzt wird, $e \cdot M = T$, folglich

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{5}{4}r^4\pi}{r^3\pi} = \frac{5}{4}r.$$

In dieser Entfernung ist ein Lot DE zu errichten, in dessen Halbierungspunkte der Körperschwerpunkt liegt.

Ist die Schrägebene nicht unter 45° , sondern unter einem beliebigen Winkel α geneigt, so ist der Körperinhalt $J = M \cdot \tan \alpha$, sein statisches Moment also $T \cdot \tan \alpha$. Die Entfernung AD wird

$$e = \frac{T \tan \alpha}{M \tan \alpha} = \frac{T}{M},$$

wie vorher.

48) **Folgerung.** Die Formel $e = \frac{T}{M}$ für die Entfernung der Schwerpunktsprojektion gilt in derselben Weise für jeden abgescrängten Körper. Für regelmässige und symmetrische Grundflächen ist so der Schwerpunkt des abgescrängten Körpers leicht zu bestimmen. Bei beliebig gestalteten Flächen muß für die Lage von D noch eine zweite Koordinate bestimmt werden, was mit Hilfe der später zu besprechenden Centrifugalmomente geschieht.

Aber nicht nur für abgescrängte Körper gilt diese Bestimmung, sondern, wie gezeigt werden soll, mit entsprechender Änderung auch für Sektoren von Drehungskörpern.

49) **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt des in Figur 53 dargestellten halben Drehungskörpers mit kreisförmigem Querschnitt?

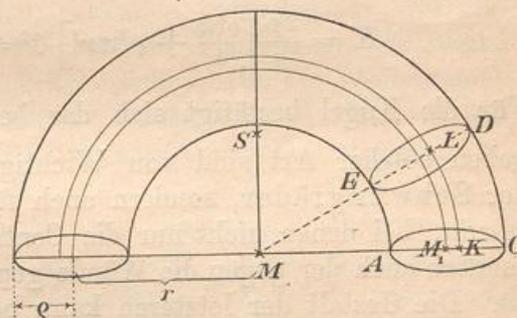
Auflösung. Jeder kleine Sektor $ACDE$ läßt sich als abgescrängter Cylinder betrachten. Sind r und ϱ die Radien, so hat die Schwerlinie KL eine Entfernung e von M , die sich aus

$$\begin{aligned} e = \frac{T}{M} &= \frac{\frac{\varrho^4 \pi}{4} + \varrho^2 \pi \cdot r^2}{\varrho^2 \pi \cdot r} \\ &= \frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r} \end{aligned}$$

berechnet. Auf dem mit diesem Radius e um M geschlagenen Kreise liegen die Schwerpunkte der sämtlichen kleinen Sektoren. Der Schwerpunkt des Körpers fällt also mit dem dieses Halbkreisbogens zusammen. Demnach ist (vgl. Nr. 9)

$$MS = \frac{2e}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{T}{M} = \frac{2}{\pi} \frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r} = \frac{\varrho^2 + 4r^2}{2r\pi}.$$

Fig. 53.



Wichtiger ist das allgemeine Resultat, daß für halbe Rotationskörper von beliebigem Hauptschnitt

$$MS = \frac{2}{\pi} \frac{T}{M}$$

die Entfernung des Schwerpunktes vom Centrum ist.

In diesem Punkte ist die Masse des halben Rotationskörpers vereinigt zu denken, wenn man berechnen will, durch welche Centrifugalkraft die eine Hälfte des ganzen Körpers von der andern abgerissen werden soll, sobald er schnell um seine Hauptachse dreht.

Ist ϑ die am Einheitskreise gemessene Winkelgeschwindigkeit, so ist diese Centrifugalkraft

$$K = m \cdot \overline{MS} \cdot \vartheta^2 = m \frac{2}{\pi} \frac{T}{M} \vartheta^2.$$

Hier ist $m = \frac{p}{g} = \frac{J \cdot p'}{g}$, wenn J der Inhalt, p' das spezifische Gewicht des halben Körpers ist. Nun ist aber nach Guldin $J = \frac{2r\pi \cdot F}{2}$ und das Moment $M = F \cdot r$, also ist

$$K = \frac{r\pi F p'}{g} \frac{2}{\pi} \frac{T}{Fr} \vartheta^2 = 2 \frac{p'}{g} T \vartheta^2.$$

Zur Kenntnis der Beanspruchung eines beliebig gestalteten Schwungringes durch die Centrifugalkraft reicht also die Kenntnis des Trägheitsmomentes der erzeugenden Fläche, der Winkelgeschwindigkeit und des spezifischen Gewichtes p' aus.

Der vorher behandelte Körper mit kreisförmigem Querschnitt wird also beansprucht durch

$$K = \frac{2p'}{g} \left[\frac{\varrho^4 \pi}{4} + \varrho^2 \pi r^2 \right] \vartheta^2 = \frac{\varrho^2 \pi p'}{2g} (\varrho^2 + 4r^2) \vartheta^2.$$

Für die Kugel bestätigt sich das bekannte Resultat $\frac{p}{g} \frac{r^4 \pi \vartheta^2}{4}$. Aufgaben solcher Art sind von Wichtigkeit nicht nur für die Theorie der Schwungräder, sondern auch für die der sogenannten Centrifugen, bei denen nicht nur die Centrifugalkraft des halben Gefäßes, sondern auch der gegen die Wände geprefsten Flüssigkeit zu berechnen ist. Die Gestalt der letzteren kann bei großen Geschwindigkeiten als Rotationskörper eines Kreissegmentes betrachtet werden, wenn das Gefäß kugelförmig begrenzt ist.

50) Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Meridiankeils der Kugel zu bestimmen.

Auflösung. In Bezug auf DE ist das statische Moment der

Halbkreisfläche $M = \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^3$, das Trägheitsmoment ist $T = \frac{r^4 \pi}{8}$, folglich

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{r^4 \pi}{8}}{\frac{2}{3} r^3} = \frac{3\pi}{16} r.$$

Mit diesem Radius e ist ein Kreisbogen KL zu schlagen, dessen Schwerpunkt mit dem des Körpers übereinstimmt. Die Schwerpunktsentfernung AS wird $\frac{e \cdot s}{\widehat{b}}$, wo s die Sehne KL , \widehat{b} den Bogen

KL bedeutet. Ist nun der Keilwinkel gleich α° , so ist $\widehat{b} = e\pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$, dagegen die Sehne $s = 2e \sin \frac{\alpha}{2}$, also

$$AS = \frac{e \cdot 2e \sin \frac{\alpha}{2}}{e\pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}} = \frac{360 e \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha} = \frac{360 \cdot 3\pi r \sin \frac{\alpha}{2}}{16 \pi \alpha}$$

oder

$$AS = \frac{135}{2} \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

Ist z. B. $\alpha = 180^\circ$, so wird $AS = \frac{135}{2} \cdot \frac{r}{180^\circ} = \frac{3}{8} r$, was mit der bekannten Entfernung des Halbkugelschwerpunktes übereinstimmt.

An diesen Beispielen wird man erkennen, von welcher Wichtigkeit es ist, von beliebig gestalteten ebenen Flächen die statischen Momente, die axialen und polaren Trägheitsmomente, die Widerstandsmomente und die Schwerpunktslagen zu bestimmen. In Nachstehendem sind zunächst einige der wichtigeren Querschnittsformen der Technik in diesem Sinne behandelt.

Auf jeden dieser Querschnitte läßt sich ein parabolisch begrenzter Diagrammkörper nach Art der Figuren 32, 33, 47 und 48 aufsetzen, dessen Inhalt gleich dem axialen oder polaren Trägheitsmomente ist. Seine korrekte Konstruktion bietet eine vortreffliche Übung des räumlichen Vorstellungsvermögens. In der Abhandlung des Herrn Bantlin, die in den Vorbemerkungen genannt ist, findet man eine lehrreiche Sammlung solcher Zeichnungen.

Fig. 54.

