



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Abschnitt IV. Centrifugal- und Trägheitsmomente für beliebige Achsen.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

## Abschnitt IV.

### Centrifugalmomente und Trägheitsmomente für beliebige Achsen.

109) In den vorigen Abschnitten wurden die Trägheitsmomente in Bezug auf besonders bequem liegende Achsen, meist Symmetrieachsen, berechnet. Gewisse Aufgaben der Festigkeitslehre und der Dynamik beanspruchen aber ihre Kenntnis für ganz beliebig liegende Achsen. Der Fall der Parallelverschiebung ist schon in Nr. 27) abgethan. Es fragt sich, welche Änderungen eintreten, wenn man die Achse um irgend einen Punkt dreht. Auf was es dabei ankommt, das ergibt sich aus folgender Aufgabe: Die Trägheitsmomente einer Fläche in Bezug auf zwei aufeinander senkrechte Achsen  $OA$  und  $OB$  seien bekannt; wie groß ist ihr Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse  $OA_1$ , die mit  $OA$  den Winkel  $\alpha$  bildet?

**Auflösung.**  $T_x = \sum fy^2$  und  $T_y = \sum fx^2$  seien die bekannten auf  $OA$  und  $OB$  bezogenen Trägheitsmomente einer gegebenen Fläche. In Figur 87 ist ein Flächenteilchen  $f$  dargestellt, dessen Entfernungen von diesen Achsen  $y$  und  $x$  sein mögen, während es von den neuen Achsen  $OA_1$  und  $OB_1$  die Entfernungen  $\eta$  und  $\xi$  hat. Dann ist

$$\eta = DE - CE = y \cos \alpha - x \sin \alpha,$$

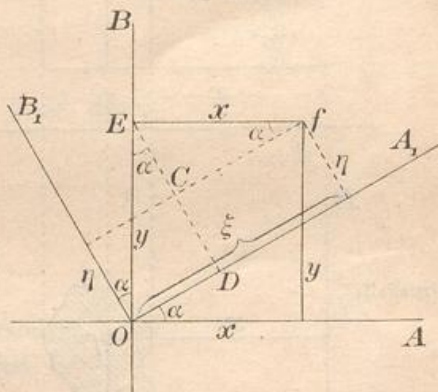
folglich

$$\eta^2 = y^2 \cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha$$

oder auch

$$\eta^2 = y^2 \cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha - xy \sin 2\alpha.$$

Fig. 87.



Folglich ist das Trägheitsmoment des Teilchens  $f$  in Bezug auf  $OA_1$

$$f\eta^2 = \cos^2\alpha fy^2 + \sin^2\alpha fx^2 - \sin 2\alpha fxy,$$

und das gesuchte Trägheitsmoment der Gesamtfläche

$$T_\xi = \sum f\eta^2 = \cos^2\alpha \sum fy^2 + \sin^2\alpha \sum fx^2 - \sin 2\alpha \sum fxy.$$

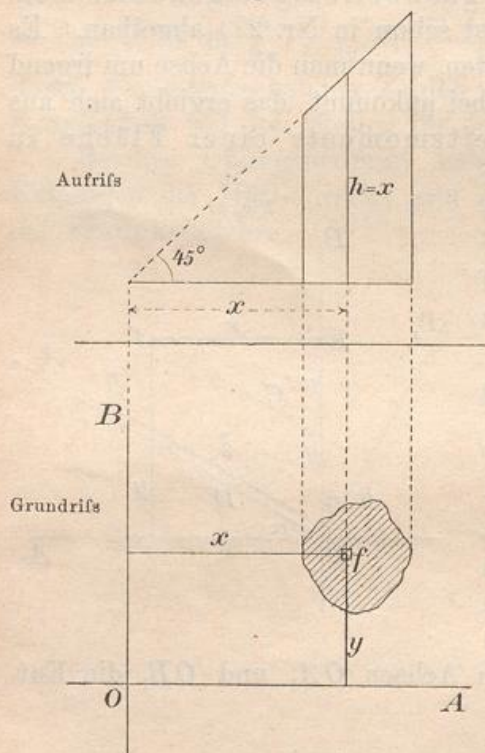
Bezeichnet man den Ausdruck  $\sum fxy$  mit  $M_{xy}$ , so hat man die Gleichung

$$T_\xi = \cos^2\alpha T_x + \sin^2\alpha T_y - \sin 2\alpha M_{xy}.$$

Der Ausdruck  $M_{xy}$  wird aus später anzugebenden Gründen der Dynamik als das Centrifugalmoment oder auch als das Deviationsmoment der gegebenen Fläche in Bezug auf die X-Achse und Y-Achse bezeichnet. Kann man ihn für eine gegebene Fläche berechnen, so ist die oben gestellte Aufgabe gelöst. Es wird sich aber zeigen, daß durch die Kenntnis der Centrifugalmomente noch eine ganze Reihe anderer

Aufgaben lösbar wird, so daß es sich der Mühe lohnt, sie genauer zu untersuchen.

Fig. 88.



110) Veranschaulichung des Centrifugalmomentes einer Fläche.

In Figur 88 ist eine Fläche  $F$  als Grundriß gezeichnet und auf ein Koordinatensystem  $OA$  und  $OB$  bezogen, so daß z. B. das Teilchen  $f$  von beiden Achsen die Entfernungen  $x$  und  $y$  hat. Nach Obigem handelt es sich darum, für den Ausdruck  $fxy$  eine Deutung zu finden.

Man denke sich über jedem Flächenteilchen  $f$  eine Säule von der Höhe  $x$ , also vom Inhalte  $fx$  errichtet, dann ist ihr statisches Moment in Bezug auf die Achse  $OA$  gleich  $fxy$ . Diese sämtlichen Säulen bilden aber einen senkrechten Cylinder (bzw. ein Prisma)

über der Fläche, der durch eine durch  $OB$  gehende und unter  $45^\circ$  geneigte Ebene schräg abgeschnitten ist. Dieser ist im Aufriß dargestellt.

Die Summe aller Ausdrücke  $axy$  bedeutet also das statische Moment des über der Fläche  $F$  stehenden und so abgesschrägten Cylinders in Bezug auf die Achse  $OA$ . Dies ist zugleich die Veranschaulichung des Centrifugalmomentes der Fläche  $F$  in Bezug auf die beiden Achsen.

Statt dessen hätte man über jedem Teilchen  $f$  auch eine Säule von der Höhe  $y$  errichten und das statische Moment in Bezug auf die Achse  $OB$  bilden können. Dies hätte ebenfalls  $axy$  gegeben. Schrägt man also den über  $F$  stehenden Körper durch eine Ebene ab, die unter der Neigung  $45^\circ$  durch  $OA$  geht und sucht man das statische Moment in Bezug auf  $OB$ , so findet man dasselbe Centrifugalmoment wie vorher.

Gerade wegen dieser Symmetrie gegen  $x$  und  $y$ , die in ihrer Bedeutung vertauscht werden dürfen, empfiehlt sich für das Centrifugalmoment die Bezeichnung  $M_{xy}$ .

Macht die Berechnung für die eine Auffassung Schwierigkeiten, so versuche man es mit der andern. Einige Beispiele werden dies näher erläutern.

111) Aufgabe. Das Centrifugalmoment des Rechtecks in Bezug auf dessen Seiten  $b$  und  $h$  zu bestimmen.

Auflösung. Geht die abschragende Fläche durch  $h$ , so ist der Inhalt des Körpers

$$J = (bh) \frac{b}{2} = \frac{b^2 h}{2}.$$

Das statische Moment in Bezug auf  $b$  ist dann

$$J \frac{h}{2} = \frac{b^2 h}{2} \frac{h}{2} = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Der Wert

$$M_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4}$$

ergibt sich auch bei der andern Auffassung, wo die Abschragung durch  $b$  gewählt ist.

112) Aufgabe. Das Centrifugalmoment der Kreisfläche in Bezug auf zwei einen rechten Winkel bildende Tangenten zu bestimmen.

Auflösung. Der Inhalt des Schrägkörpers wird bei beiden Auffassungen  $(r^2 \pi)r = r^3 \pi$ . Der Schwerpunktsabstand von der Momentachse ist  $r$ , also wird  $M_{xy} = r^3 \pi \cdot r = r^4 \pi = \frac{d^4 \pi}{16}$ .

Fig. 89.

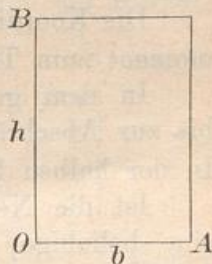
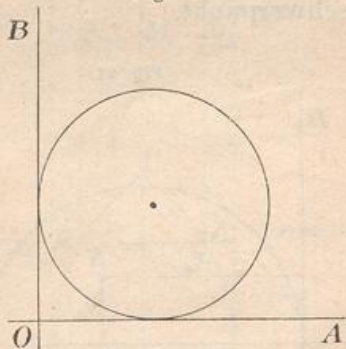


Fig. 90.



113) Anwendung des Centrifugalmomentes auf die Schwerpunktsbestimmung abgeschrägter Körper.

Über einer Fläche  $F$  stehe eine senkrechte Säule, die durch eine Ebene von zunächst  $45^\circ$  Neigung abgeschragt werde. Nach Nr. 21) ist ihr Inhalt  $J$  gleich dem statischen Momente  $M_y$  in Bezug auf die Schnittlinie  $OB$  der Schrägebene mit der Grundfläche, und die Schwerpunktsprojektion des Körpers hat nach Nr. 48) von  $OB$  die Entfernung

$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

wobei beide Momente auf  $OB$  bezogen sind.

Die andere Koordinate  $y_s$  wird mit Hülfe des Centrifugalmomentes berechnet, wenn man dieses selbständig ermitteln kann. Das statische Moment des Körpers in Bezug auf  $OA$  ist nämlich nach Nr. 110)

$$y_s \cdot J = M_{xy},$$

also erhält man

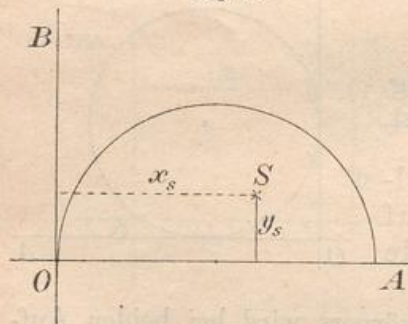
$$y_s = \frac{M_{xy}}{J} = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Die Koordinaten  $y_s$  und  $x_s$  verhalten sich also wie das Centrifugalmoment zum Trägheitsmoment.

In dem genannten Punkte ist auf der Grundfläche  $F$  ein Lot bis zur Abschrägungsfläche zu errichten, dessen Höhe gleich  $x_s$  wird. In der halben Höhe befindet sich der Körperschwerpunkt.

Ist die Neigung der schrägen Schnittebene nicht  $45^\circ$ , sondern eine beliebige, so bleiben die Koordinaten für die Projektion des Schwerpunktes dieselben. Die Höhe des zugehörigen Lotes wird  $x_s \cdot \tan \alpha$ . Im Halbierungspunkte desselben befindet sich der Körperschwerpunkt.

Fig. 91.



Damit ist zugleich die Lage der Resultante des seitlichen Wasserdrucks gegen beliebig gestaltete ebene Flächen vollständig bestimmt.

114) Aufgabe. Über einem Halbkreise mit dem Durchmesser  $OA$  stehe ein abgeschrägter Körper, dessen Schnittebene durch die Tangente  $OB$  geht. Der Schwerpunkt des Körpers soll bestimmt werden.

**Auflösung.** Die Koordinate  $x_s$  für die Projektion des Körperschwerpunktes wird

$$x_s = \frac{T_y}{J} = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{r^4 \pi}{8} + r^2 \cdot \frac{r^2 \pi}{2}}{\frac{r^2 \pi}{2} \cdot r} = \frac{5}{4} r.$$

Dagegen wird

$$y_s = \frac{M_{xy}}{J} = \frac{M_{xy}}{M_y}.$$

Hier handelt es sich um einen Fall, wo das Centrifugalmoment aus Symmetriegründen besser mit Hülfe der andern Abschrägung berechnet wird. Der Inhalt des neuen Körpers wird bei 45° Neigung der Schrägfläche nach Nr. 21)  $J = \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^3$ , der Hebelarm für das statische Moment in Bezug auf  $OB$  ist  $r$ , also ist  $M_{xy} = \frac{2}{3} r^4$ . So\*folgt schliesslich für den zuerst betrachteten Körper

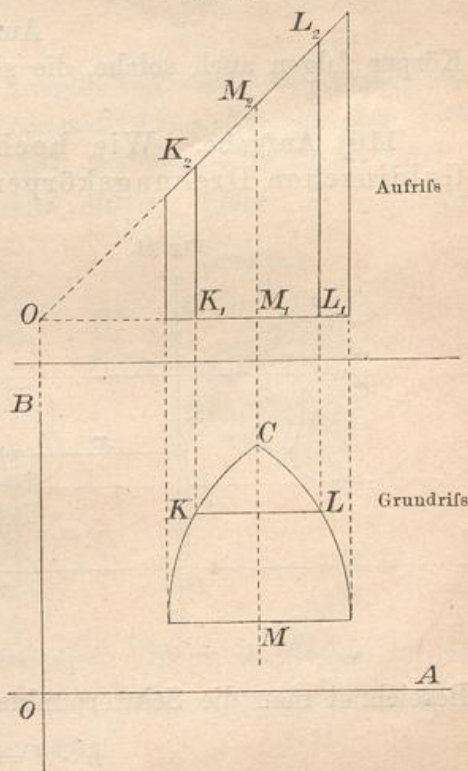
$$y_s = \frac{\frac{2}{3} r^4}{\frac{2}{3} r^3 \pi} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Das an der Stelle  $x_s, y_s$  errichtete Lot hat die Höhe  $\frac{5}{4} r$ . In der halben Höhe, d. h. in der Höhe  $\frac{5}{8} r$ , befindet sich der Körperschwerpunkt. Bei anderer Neigung ist mit  $\tan \alpha$  zu multiplizieren.

Der Abstand  $y_s$  entspricht dem des Schwerpunktes der Kreisfläche von  $OA$ . Es fragt sich, ob dies in allen Symmetriefällen stattfindet; wie sich sofort zeigen wird, ist diese Frage zu bejahen.

115) Der Fall der symmetrischen Fläche. Die im Grundrifs gezeichnete Fläche  $F$  sei symmetrisch gegen  $CM$ . Jeder Schnitt wie  $KL$  erscheint dann im Aufrifs als Trapez  $K_1 L_1 L_2 K_2$  mit der Mittellinie  $M_1 M_2$ . Das Moment dieses Schnittes in Bezug auf  $OA$  ist also ebenso groß, als ob über  $KL$  ein Rechteck von der Höhe  $M_1 M_2$  stände. Dies gilt für jeden der zu  $KL$  parallelen Schnitte, folglich ist das statische Moment des abgeschrägten Körpers in Bezug

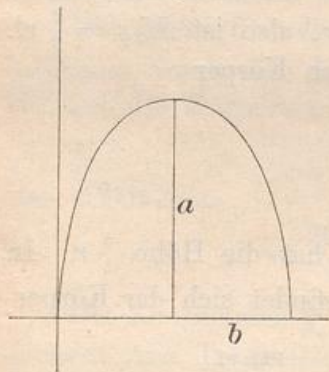
Fig. 92.



auf  $OA$  ebenso groß, als das der Säule von überall gleicher Höhe  $M_1 M_2$ . Folglich liegt die Schwerpunktsprojektion für den abgeschrägten Körper in derselben Entfernung  $y_s$ , wie bei der gewöhnlichen Säule, d. h. in der Schwerpunktsentfernung der Grundfläche. Dagegen hat  $x_s$  für beide Fälle verschiedene Lagen.

Im Falle der Symmetrie ist demnach das Centrifugalmoment besonders leicht zu berechnen. Man multipliziert den Inhalt des über  $F$  stehenden Körpers, der durch eine Ebene abgeschrägt ist, die selbst durch eine zur Symmetrieachse Parallele  $OB$  geht, mit dem Schwerpunktsabstande der Fläche von der zweiten Achse, so daß

Fig. 93.



$$M_{xy} = y_s J = y_s M_y$$

ist.

So erhält man z. B. für die vorige Halbkreisfläche sofort  $M_{xy} = \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{r^3\pi}{2} = \frac{2}{3} r^4$  ohne Benutzung der zweiten Abschrägung.

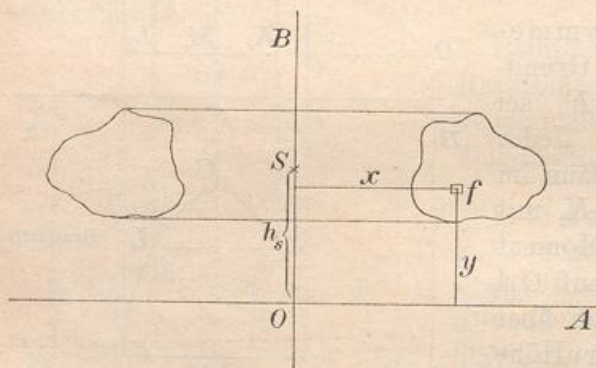
Ebenso folgt für die nebenstehende Halbellipse

$$M_{xy} = \frac{4a}{3\pi} \frac{ab\pi}{2} \cdot b = \frac{2}{3} a^2 b^2.$$

Aus den Anwendungen auf abgeschrägte Körper folgen auch solche, die sich auf Drehungskörper beziehen.

116) Aufgabe. Wie hoch liegt der Schwerpunkt eines Guldinschen Drehungskörpers?

Fig. 94.



**Auflösung.** Das Flächenelement  $f$  giebt bei der Drehung den Inhalt  $2\pi fx$ , sein statisches Moment in Bezug auf die durch  $OA$  dargestellte Grundebene ist also  $2\pi fxy$ , das statische Moment des Gesamtkörpers in Bezug auf die Grundebene wird also gleich  $2\pi \sum fxy$  oder  $2\pi M_{xy}$ .

Bezeichnet man die Schwerpunkts Höhe mit  $h_s$ , so erhält man

$$h_s \cdot J = 2\pi M_{xy}.$$

Da nach Guldin  $J = 2 \rho \pi F = 2 \pi M_y$  ist, wo  $M_y$  das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Achse  $OB$  bedeutet, so wird

$$h_s = \frac{2 \pi M_{xy}}{2 \pi M_y} = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Ebenso hoch liegt der Schwerpunkt für jeden Sektor eines solchen Körpers.

Ist der Sektorwinkel unendlich klein, so kann man den Sektor als abgeschrägten Körper im obigen Sinne betrachten. Darin liegt die Übereinstimmung der Resultate, die sich auch auf den Symmetriefall ausdehnen lassen.

117) Der Drehungskörper im Symmetriefalle.

Ist die Fläche symmetrisch gegen eine zur Drehungsachse parallele Gerade, so liegt der Schwerpunkt des Drehungskörpers ebenso hoch, wie der der erzeugenden Fläche. Der Beweis ergibt sich aus Obigem.

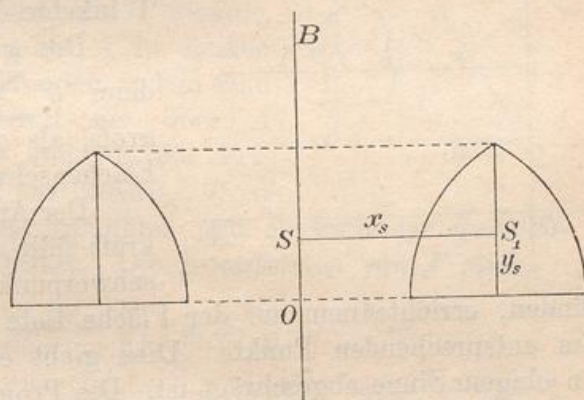


Fig. 95.

Hier findet also ein ähnliches Ausgleichen statt, wie vorher bei den Trapezflächen. (Dafs bei unsymmetrischen Flächen der Satz nicht mehr gilt, sieht man z. B. am geraden Kreiskegel, dessen Schwerpunktshöhe  $h_s = \frac{h}{4}$  ist, während die der Fläche  $h'_s = \frac{h}{3}$  ist.)

118) Deutungen des Centrifugalmomentes mit Hilfe der Dichtigkeit oder des spezifischen Gewichtes.

a) Statt über der Fläche  $F$  einen abgeschrägten Körper zu errichten, kann man eine Massenbelegung annehmen, deren Dichtigkeit in jedem Punkte z. B. proportional dem Abstände  $x$  von  $OB$  ist. Setzt man die Dichtigkeit gleich  $x$  selbst, so ist das statische Moment der so belegten Fläche in Bezug auf die Achse  $OA$  gleich  $\sum fxy = M_{xy}$ . Dabei kann man die Achsen in ihrer Bedeutung mit einander vertauschen.

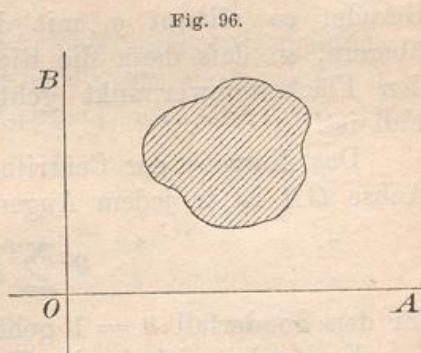
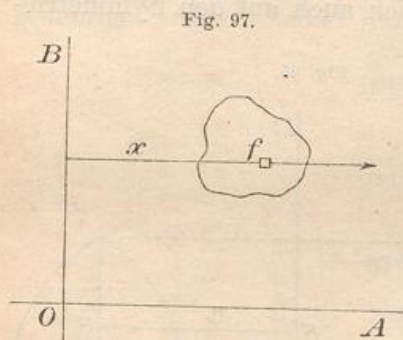


Fig. 96.



b) Statt dessen kann man den mittels  $OB$  abgesschrägten Körper beibehalten, aber seine Dichtigkeit proportional zu  $y$  setzen. Setzt man sie gleich  $y$ , so wird der Masseninhalte des Körpers gleich  $\sum fxy = M_{xy}$ .

119) Anwendung auf die Centrifugalkraft ebener Flächen. Man denke sich eine ebene Fläche homogen mit Masse belegt und um eine Achse  $OB$  ihrer Ebene gedreht. Jedes Teilchen  $f$  im



Abstände  $x$  von der Drehungsachse erhält dann eine Centrifugalkraft  $fx\vartheta^2$ , wo  $\vartheta$  die auf den Radius 1 reduzierte Winkelgeschwindigkeit ist.

Die gesamte Centrifugalkraft ist dann  $\vartheta^2 \sum fx = \vartheta^2 M_y$ , d. h. ebenso groß, als ob die gesamte Masse  $F$  im Flächenschwerpunkte vereinigt wäre.

Der Angriffspunkt der Centrifugalkraft fällt aber nicht mit dem Flächenschwerpunkte zusammen. Um ihn zu finden, errichte man auf der Fläche Lote gleich der Centrifugalkraft im entsprechenden Punkte. Dies giebt einen Diagrammkörper, der in obigem Sinne abgesschrägt ist. Die Projektion seines Schwerpunktes auf die Fläche  $F$  giebt den Angriffspunkt der Centrifugalkraft. Seine Koordinaten ergeben sich nach Nr. 113) aus

$$x_s = \frac{T_y}{M_y}, \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y}.$$

Ist die Fläche symmetrisch in Bezug auf eine zu  $OB$  parallele Gerade, so stimmt  $y_s$  mit dem Schwerpunktsabstande der Fläche überein, so daß dann die Richtungslinie der Centrifugalkraft durch den Flächenschwerpunkt geht, was durchaus nicht allgemein der Fall ist.

Das Moment der Centrifugalkraft in Bezug auf die Punkte der Achse  $OA$  ist in jedem Augenblicke gleich

$$\vartheta^2 \sum fxy = \vartheta^2 M_{xy},$$

für den Sonderfall  $\vartheta = 1$  geht dies in  $M_{xy}$  selbst über.

Es handelt sich in der That bei  $M_{xy}$  um ein bestimmtes Moment der Centrifugalkraft, so daß der Name Centrifugalmoment sehr bezeichnend ist.

Ist die Achse  $OB$  nicht fest und keine freiwillige Drehungsachse, so würde die Centrifugalkraft ein Umstürzen, also eine Abweichung

von der ursprünglichen Drehungsbewegung erstreben, so daß auch der Name Deviationsmoment brauchbar erscheint.

120) Beispiel des Dreiecks.

Ein Dreieck drehe sich um die Achse  $OB$ . Wie groß ist die entstehende Centrifugalkraft, und wo greift sie an?

a) Geometrische Behandlung. Man denke sich auf der Fläche Lote errichtet, die gleich den einzelnen Centrifugalkräften  $fx\vartheta^2$ , also proportional zum Abstände  $x$  sind. Der entstehende Diagrammkörper ist eine Pyramide, deren senkrechte Höhe im Punkte  $A$  zu denken ist. Ihr Schwerpunkt wird gefunden, indem man den Flächenschwerpunkt  $S$  mit der über  $A$  schwebenden Spitze verbindet und von der Verbindungslinie den vierten Teil abschneidet.  $P$  ist dann die Projektion des Schwerpunktes und zugleich der gesuchte Angriffspunkt der Centrifugalkraft. Die Koordinaten von  $P$  sind

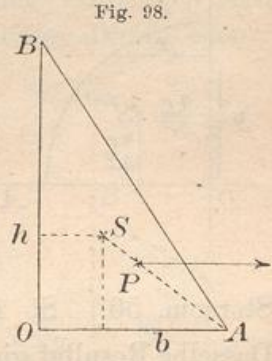


Fig. 98.

$$x_s = \frac{b}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} b = \frac{b}{3} + \frac{b}{6} = \frac{b}{2}; \quad y_s = \frac{h}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{4}.$$

In  $S$  hat man sich die Masse vereinigt zu denken, um die Centrifugalkraft  $m \frac{b}{3} \vartheta^2$  zu finden. Da aber die Fläche des Dreiecks als Masse betrachtet werden kann, so folgt  $m = \frac{bh}{2}$ , und man erhält als Centrifugalkraft

$$p = \frac{bh}{2} \cdot \frac{b}{3} \vartheta^2 = \frac{hb^2 \vartheta^2}{6}.$$

So wird  $S$  benutzt, um die Größe der Centrifugalkraft zu finden. Ihr Angriffspunkt aber hat ganz andere Koordinaten als  $S$ .

b) Behandlung mit Hilfe des Trägheits- und Centrifugalmoments.

$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{bh}{2} \cdot \frac{b}{3}} = \frac{b}{2}; \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\frac{b^2 h^2}{24}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{h}{4}.$$

Die Kraft wird ebenso berechnet wie vorher.

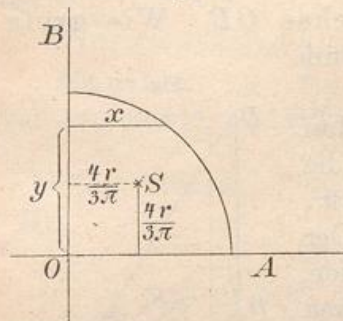
121) Beispiel des Viertelkreises, der sich um  $OB$  dreht.

Gemischte Behandlung. Der mittels  $OB$  abgeschrägte Körper hat den Inhalt

$$J = \frac{r^2 \pi}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{r^3}{3}.$$

(Ebenso groß ist das statische Moment  $M_y$  der Fläche.) Seine Schwerpunktsprojektion hat die Koordinaten

Fig. 99.



$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{r^4 \pi}{16}}{\frac{r^3}{3}} = \frac{3\pi}{16} r \quad \text{und} \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = ?$$

Hier versagen zunächst die bisherigen Methoden zur Berechnung von  $M_{xy}$ . Der Diagrammkörper der Centrifugalkraft (bei der Drehung um  $OB$ ) ist aber ein Sektor der Halbkugel, dessen Schwerpunkt mit dem der letzteren in derselben Höhe  $y_s = \frac{3}{8} r$  liegen muss. (Vgl. Method. Lehrbuch, II, Stereom. 56.) So findet man zugleich  $M_{xy} = y_s M_y = \frac{3}{8} r \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{r^4}{8}$ . Dasselbe Resultat giebt die später zu behandelnde Summenformel. Über jedem Schnitte  $x$  ist nämlich ein Dreieck vom Inhalte  $x \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$  zu denken, dessen statisches Moment in Bezug auf  $OA$  gleich  $\frac{x^2}{2} y$  ist. Dafür kann man schreiben

$$\frac{r^2 - y^2}{2} y = \frac{r^2}{2} y - \frac{y^3}{2}.$$

Nach der Summenformel ist dann das Moment von  $y = 0$  bis  $y = y_1$  gleich

$$\frac{r^2}{2} \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_1^4}{2 \cdot 4} = \frac{y_1^2}{8} (2r^2 - y_1^2).$$

Für  $y_1 = r$  wird dies

$$\frac{r^2}{8} (2r^2 - r^2) = \frac{r^4}{8} = M_{xy}.$$

Folglich ist

$$y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\frac{r^4}{8}}{\frac{r^3}{3}} = \frac{3}{8} r.$$

Wiederum haben die Koordinaten des Angriffspunktes nichts mit dem Flächenschwerpunkte  $S$  zu thun. Letzterer giebt als Größe der Centrifugalkraft

$$m \varrho \vartheta^2 = \frac{r^2 \pi}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} \vartheta^2 = M_y \vartheta^2 = \frac{r^3}{3} \vartheta^2.$$

Zugleich hat man gesehen, dass im allgemeinen Rechnungsmethoden zur Anwendung kommen müssen, wie sie später behandelt werden sollen.

Ein wirklicher Einblick in die Lehre von der Centrifugalkraft ist nur möglich auf Grund der Kenntnis der

Trägheits- und Centrifugalmomente, die uns die Koordinaten der Angriffspunkte geben. —

122) Fälle, in denen das Centrifugalmoment gleich Null oder gleich einer Konstanten wird.

Die allgemeine Bekanntschaft mit mechanischen Vorgängen läßt es bequem erscheinen, an der Hand der Centrifugalkraft ebener drehender Flächen einige besondere Fälle zu betrachten.

a) Hat die Fläche eine Symmetrieachse, und betrachtet man diese als Drehungsachse, so heben sich die Centrifugalkräfte je zweier symmetrischer Teilchen gegenseitig auf. Die Centrifugalkraft und ebenso das Centrifugalmoment wird gleich Null. Also:

Das Centrifugalmoment einer Fläche in Bezug auf eine Symmetrieachse und eine zu ihr Senkrechte ist stets gleich Null.

b) Denkt man sich die beiden symmetrischen Teile gegeneinander verschoben, wie in Figur 101, so ist die Summe der Centrifugalkräfte zwar noch immer gleich Null, da aber die Resultanten nicht in dieselbe Linie fallen, so entsteht ein Kräftepaar (Drehungspaar). Das Moment der Centrifugalkraft wird, wenn jede der Resultanten gleich  $p$  und ihre gegenseitige senkrechte Entfernung gleich  $e$  ist, in Bezug auf jeden Punkt der Achse  $OB$  gleich  $pe$ . Dabei ist es durchaus nicht nötig, daß die beiden gegeneinander verschobenen Teile ursprünglich symmetrisch waren, wenn nur die Achse durch den Schwerpunkt geht. Folglich:

Das Centrifugalmoment einer ebenen Fläche in Bezug auf eine Schwerpunktsachse und jede Normale der letzteren hat einen konstanten Wert. Beide Achsen sind dabei in der Ebene der Fläche zu denken.

c) Fälle, in denen das Centrifugalmoment gleich Null wird, kann man sich leicht konstruieren. So kann man z. B. Fig. 102 so einrichten, daß die vier einzelnen Centrifugalkräfte im Gleichgewichte

Fig. 100.

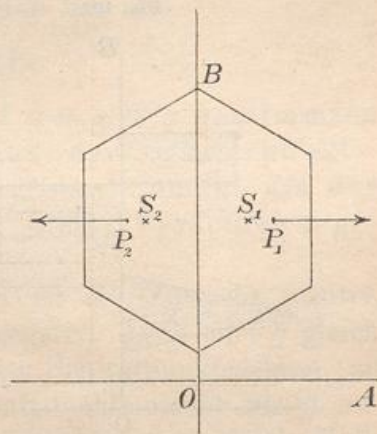
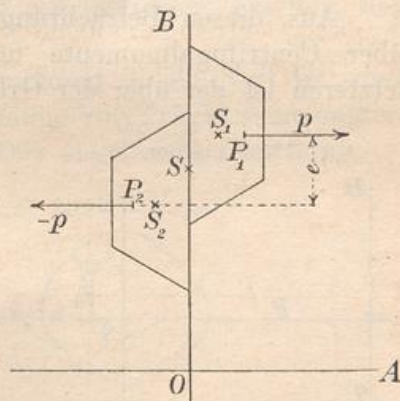


Fig. 101.



stehen, d. h. dafs das Moment des Kräftepaars der Centrifugalkräfte gleich Null wird.

d) Es giebt rechtsdrehende und linksdrehende Kräftepaare. Faßt man das Moment der ersteren als positiv auf, so ist das der letzteren negativ. Demnach kann auch das Centrifugalmoment einer Fläche in Bezug auf zwei Achsen negativ sein. Man hat dann nur nötig, die eine Achse als entgegengesetzt gerichtet aufzufassen, um ein positives Moment zu erhalten.

Fig. 102.

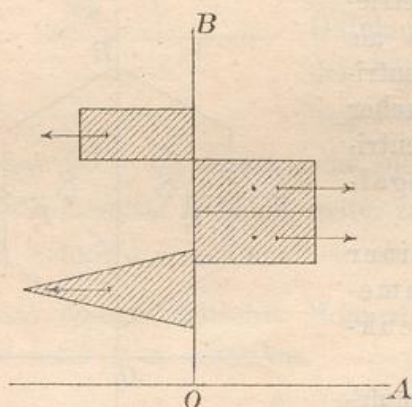
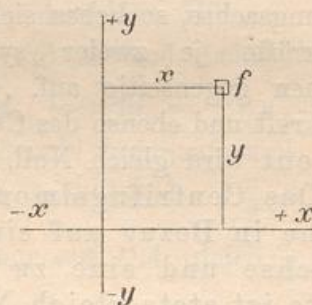


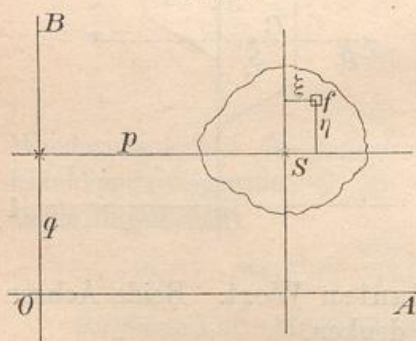
Fig. 103.



Liegt ein Flächenteilchen im ersten oder dritten Quadranten, so ist sein Centrifugalmoment positiv. Liegt es im zweiten oder vierten, so ist es negativ. Ebenso ist es bei der gesamten Fläche leicht zu entscheiden, ob in Bezug auf die Koordinatenachsen ihr Moment positiv oder negativ ist.

Aus diesen Betrachtungen mechanischer Art lassen sich Sätze über Centrifugalmomente und abgeschrägte Körper ableiten. Bei letzteren ist der über der Grundrifsebene liegende Teil als positiv, der andere als negativ aufzufassen.

Fig. 104.



Der unter b) angedeutete Satz ist ein Sonderfall eines allgemeineren Verschiebungssatzes, der sich folgendermaßen ergibt.

123) Verschiebungssatz für das Centrifugalmoment.

Das Centrifugalmoment für zwei aufeinander senkrechte Schwerpunktsachsen einer Fläche sei bekannt. Man suche das Centrifugalmoment für zwei parallele Achsen  $OA$  und  $OB$ , wobei  $O$  in Bezug auf  $S$  die Koordinaten  $-p$ ,  $-q$  habe. Waren die ursprünglichen Koordinaten eines Flächenteilchens  $f$  durch  $\xi$  und  $\eta$

gegeben, so sind die neuen Koordinaten  $x = p + \xi$ ,  $y = q + \eta$ , und das Produkt  $xy$  wird gleich  $(p + \xi)(q + \eta) = pq + \xi\eta + p\eta + q\xi$ , so daß

$$\sum fxy = pq \sum f + \sum f\xi\eta + p \sum f\eta + q \sum f\xi$$

wird. Der erste Posten giebt  $pqF$ , der zweite ist das ursprüngliche Centrifugalmoment  $M_{\xi\eta}$ , der dritte wird Null, da es sich um das statische Moment in Bezug auf eine Schwerpunktsachse handelt. Ebenso verschwindet der letzte Posten. Man hat also

$$M_{xy} = M_{\xi\eta} + pqF.$$

Folglich: Bei der durch  $x = \xi + p$  und  $y = \eta + q$  bestimmten Parallelverschiebung der Achsen aus der Schwerpunktslage wächst das ursprüngliche Centrifugalmoment um das Produkt aus der Fläche  $F$  und dem Verschiebungsrechteck  $pq$ .

Haben  $p$  und  $q$  gleiche Zeichen, so ist der Zuwachs positiv, haben sie verschiedene Zeichen, so ist er negativ. Ist  $p$  oder  $q$  gleich Null, d. h. verschiebt sich nur die eine der Schwerpunktsachsen, so ist der Zuwachs gleich Null, und das Centrifugalmoment bleibt unverändert. War das ursprüngliche Centrifugalmoment gleich Null, was bei Symmetriechsen stets der Fall ist, so ist

$$M_{xy} = pqF,$$

was bequem ausgewertet werden kann. (Später wird sich zeigen, daß dies bei jeder Mittelpunktsachse regelmässiger Flächen der Fall ist.)

Die Fälle, in denen das Centrifugalmoment gleich Null ist, sind von besonderer Wichtigkeit für die Berechnung von Trägheitsmomenten für beliebige Achsen, denn die in Nr. 109) abgeleitete Gleichung

$$T_{\xi} = \cos^2 \alpha T_x + \sin^2 \alpha T_y - \sin 2\alpha M_{xy}$$

geht dann über in die einfachere Form

$$T_{\xi} = \cos^2 \alpha T_x + \sin^2 \alpha T_y.$$

#### 124) Der Trägheitsradius.

Für das Rechteck war in Bezug auf die Seite  $b$  das Trägheitsmoment  $T = \frac{bh^3}{3}$ . Man kann fragen, in welcher Entfernung von  $b$  man sich die gesamte Fläche (Masse) concentrirt denken müsse, damit das Trägheitsmoment dasselbe sei. Man erreicht dies, indem man  $Fq^2 = T$ , also hier  $bhq^2 = \frac{bh^3}{3}$  setzt. Für das Rechteck folgt

daraus  $\varrho^2 = \frac{h^2}{3}$ , oder  $\varrho = \frac{h}{\sqrt{3}}$ . Allgemein erhält man für jede beliebige Fläche

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}}.$$

Für die Mittellinie des Rechtecks erhält man

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h}{6}\sqrt{3}.$$

Beim Kreise ergibt sich in Bezug auf den Durchmesser

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{r^4\pi}{4r^2\pi}} = \frac{r}{2}.$$

Den so bestimmten Radius nennt man den Radius des Trägheitsmomentes oder kurz den Trägheitsradius.

Entsprechende Betrachtungen kann man für das polare Trägheitsmoment anstellen, wo sich ergibt

$$\varrho = \sqrt{\frac{T_p}{F}}.$$

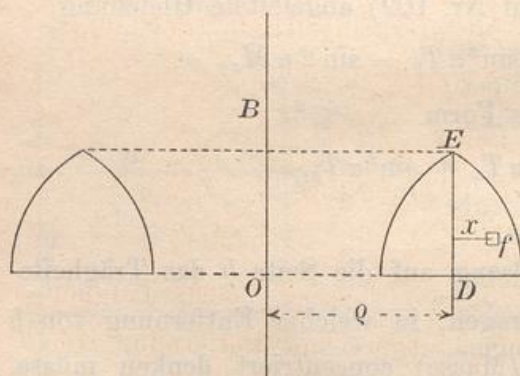
So ist z. B. für die Kreisfläche

$$\varrho = \sqrt{\frac{r^4\pi}{2r^2\pi}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Der Trägheitsradius dient zur Vereinfachung von Rechnungen und Formeln.

Ein Beispiel für seine Verwendung bietet die folgende Aufgabe.

Fig. 105.



125) **Aufgabe.** Ein ringförmiger Körper entstehe durch Drehung einer symmetrischen Fläche um eine zur Symmetrieachse parallele Gerade. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Drehungskörpers in Bezug auf diese Achse?

**Auflösung.** Jedes Flächenelement  $f$  in der Entfernung  $\varrho + x$  von der Achse  $OB$  gibt nach Guldin einen Ring vom Inhalte  $2(\varrho + x)\pi f$ . Ist  $m$  die Masse dieses Ringes, so ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf  $OB$  gleich

$m(\varrho + x)^2$ , also ist, da die Masse  $m$  mathematisch genommen mit dem Inhalte übereinstimmt, das Trägheitsmoment gleich

$$2(\varrho + x)\pi f(\varrho + x)^2 = 2\pi f(\varrho + x)^3$$

oder gleich

$$2\pi f(\varrho^3 + 3\varrho^2x + 3\varrho x^2 + x^3).$$

Aus Symmetriegründen gehört zu jedem Teilchen  $f$  in der Entfernung  $\varrho + x$  ein entsprechendes in der Entfernung  $\varrho - x$ , und für dieses ergibt sich ebenso ein Partialring vom Trägheitsmomente

$$2\pi f(\varrho^3 - 3\varrho^2x + 3\varrho x^2 - x^3).$$

Beide Partialringe zusammen haben also das Trägheitsmoment

$$2\pi f(2\varrho^3 + 6\varrho^2x^2).$$

Für das gesamte Trägheitsmoment

$$T = \sum 2\pi f\varrho^3 + \sum 6\pi f\varrho^2x + \sum 6\pi f\varrho x^2 + \sum 2\pi fx^3$$

folgt daraus, daß Glieder mit ungeraden Potenzen von  $x$  wegfallen und nur die mit geraden Potenzen stehen bleiben. Demnach wird

$$T = 2\pi\varrho^3 \sum f + 6\pi\varrho \sum fx^2.$$

Hier bedeutet  $\sum f$  die Fläche  $F$  und  $\sum fx^2$  ihr Trägheitsmoment  $T_1$  in Bezug auf die Symmetriachse. Führt man den Trägheitsradius  $\varrho_1$  dieser Fläche mit Hilfe der Gleichung  $\varrho_1^2 F = T_1$  ein, so folgt

$$T = 2\pi\varrho F\varrho^2 + 6\pi\varrho F\varrho_1^2,$$

oder, da  $2\pi\varrho F = J$  ist,

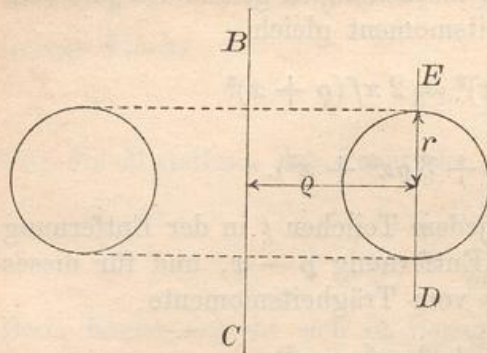
$$T = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2).$$

In Worten läßt sich der Satz ausdrücken:

Entsteht ein Ringkörper durch Drehung einer symmetrischen Fläche um eine zur Symmetrielinie parallele Achse, so ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsachse gleich  $J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$ , wo  $J$  den Inhalt des Körpers,  $\varrho$  den Abstand der Symmetrielinie von der Achse,  $\varrho_1$  den Trägheitsradius der Fläche in Bezug auf die Symmetrielinie bedeutet. Der Trägheitsradius des Körpers ist also gleich  $\sqrt{\varrho^2 + 3\varrho_1^2}$ .



Fig. 106.



126) Beispiel des Ringkörpers mit Kreisquerschnitt. Hier ist der Inhalt

$$J = 2 \varrho \pi r^2 \pi = 2 \varrho r^2 \pi^2.$$

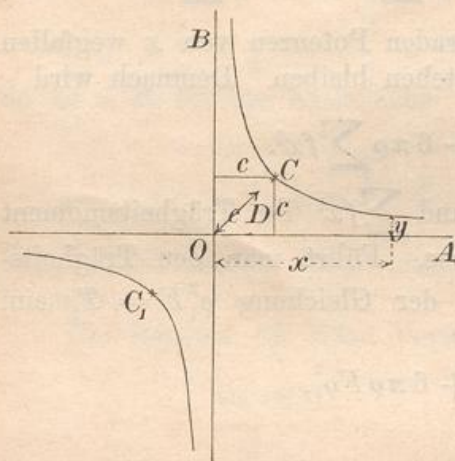
In Bezug auf  $DE$  ist für die Fläche des Kreises  $T_1 = \frac{r^4 \pi}{4}$ , aus  $\varrho_1^2 F = T_1$  oder  $\varrho_1^2 \cdot r^2 \pi = \frac{r^4 \pi}{4}$  folgt  $\varrho_1^2 = \frac{r^2}{4}$ . Demnach wird das Trägheitsmoment des Körpers

$$T = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) = 2 \varrho r^2 \pi^2 \left( \varrho^2 + \frac{3r^2}{4} \right).$$

127) Der Radius des Centrifugalmomentes.

Ebenso könnte man fragen, wo man sich die gesamte Fläche (Masse) vereinigt denken müsse, um in Bezug auf zwei Achsen  $OA$  und  $OB$  dasselbe Centrifugalmoment zu erhalten. Dann hätte man zu setzen

Fig. 107.



$$F \cdot x \cdot y = M_{xy},$$

oder

$$xy = \frac{M_{xy}}{F}.$$

Ist der Ausdruck rechts positiv, so sind im ersten und dritten Quadranten unendlich viele Stellen möglich, da zwei veränderliche Größen  $x$  und  $y$  vorhanden sind. Die gesuchten Punkte liegen auf

einer gleichseitigen Hyperbel mit dem konstanten Rechteck  $xy = \frac{M_{xy}}{F}$ . Eins dieser Rechtecke ist ein Quadrat vom Inhalte

$$c^2 = \frac{M_{xy}}{F},$$

seine Seite ist

$$c = \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}}.$$

Die Ecke  $C$  ist symmetrisch gegen beide Achsen und wird am bequemsten für die Anbringung der Masse  $F$  sein. Nur noch  $C_1$  würde ebenso bequem liegen. Die positive GröÙe  $c$  bezeichnet man als den Radius

des Centrifugalmoments. Man pflegt zum Zwecke graphischer Darstellungen  $c$  als  $OD$  auf  $OC$  abzutragen, was ganz naturgemäß der Symmetrie gegen die beiden Achsen entspricht.

Ist dagegen die rechte Seite von  $xy = \frac{M_{xy}}{F}$  negativ, so würden die entsprechenden Punkte im zweiten und vierten Quadranten liegen, wobei es sich um ein Quadrat mit den Seiten  $+c$  und  $-c$  handeln würde. Da jetzt  $c = \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}}$  imaginär sein würde, könnte man von einem reellen Radius des Centrifugalmoments nicht mehr reden. In solchen Fällen ist es besser, die positive Richtung z. B. der X-Achse entgegengesetzt anzunehmen und so das Imaginäre zu vermeiden. Hier sollen solche Fälle möglichst ausgeschieden werden. Die Darstellung beschränkt sich also auf zwei Quadranten.

128) Beispiel des Rechtecks.

In Bezug auf die Achsen  $OA$  und  $OB$  war

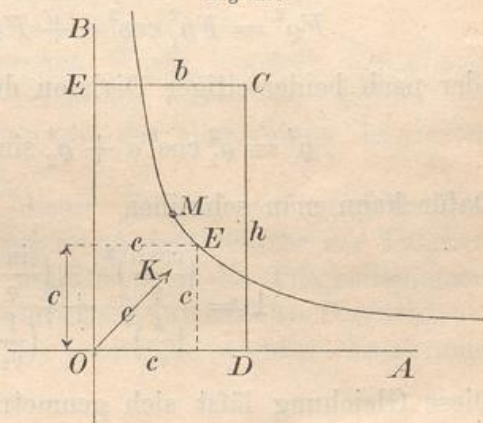
$$M_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4},$$

so daß

$$c^2 = xy = \frac{M_{xy}}{F} = \frac{b^2 h^2}{4bh} = \frac{bh}{4} = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

ist. Demnach geht die gleichseitige Hyperbel durch den Mittelpunkt  $M$  des Rechtecks, und  $c$  ist mittlere Proportionale zwischen  $\frac{b}{2}$  und  $\frac{h}{2}$ . Auf der Winkelhalbierenden  $OE$  ist  $OK = c$  abzutragen.

Fig. 108.



129) Beispiel des Viertelkreises.

Nach Nr. 121 ist in Bezug auf  $OA$  und  $OB$

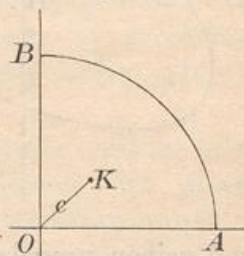
$$M_{xy} = \frac{r^4}{8}.$$

Es folgt

$$c^2 = xy = \frac{M_{xy}}{F} = \frac{\frac{r^4}{8}}{\frac{r^2 \pi}{4}} = \frac{r^2}{2\pi},$$

also  $c = \frac{r}{\sqrt{2\pi}}$  ist in  $O$  als Winkelhalbierende einzutragen.

Fig. 109.



## 130) Satz von der Trägheitsellipse.

In Abschnitt 109 war gezeigt worden, dass man aus den Trägheitsmomenten  $T_x$  und  $T_y$  einer Fläche das Trägheitsmoment  $T_\xi$  für eine um  $\alpha$  gegen  $OA$  gedrehte Achse mit Hilfe folgender Gleichung findet:

$$T_\xi = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy},$$

wo  $M_{xy}$  das Centrifugalmoment in Bezug auf die ursprünglichen Achsen ist. Führt man für  $T_\xi$ ,  $T_x$  und  $T_y$  die Trägheitsradien  $\varrho$ ,  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  ein, so hat man zu setzen  $T_\xi = F\varrho^2$ ,  $T_x = F\varrho_1^2$ ,  $T_y = F\varrho_2^2$ . Für das Centrifugalmoment werde der Radius  $c$  durch die Gleichung  $M_{xy} = Fc^2 \sin \alpha \cos \alpha$  eingesetzt. Dadurch geht die Gleichung über in

$$F\varrho^2 = F\varrho_1^2 \cos^2 \alpha + F\varrho_2^2 \sin^2 \alpha - Fc^2 \sin 2\alpha,$$

oder nach beiderseitiger Division durch  $F$  in

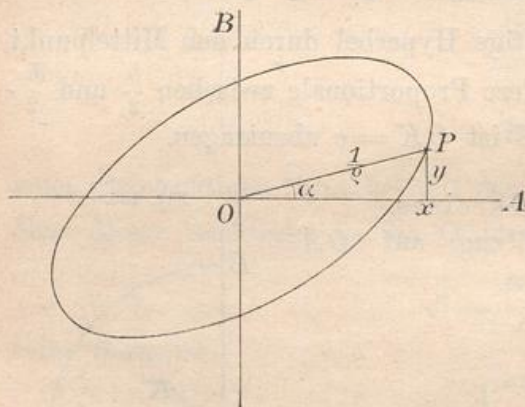
$$\varrho^2 = \varrho_1^2 \cos^2 \alpha + \varrho_2^2 \sin^2 \alpha - 2c^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Dafür kann man schreiben

$$1 = \frac{\left(\frac{\cos \alpha}{\varrho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sin \alpha}{\varrho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^2} - \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\varrho} \frac{\cos \alpha}{\varrho}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}.$$

Diese Gleichung lässt sich geometrisch veranschaulichen. Man setze die veränderliche, von  $\alpha$  abhängige GröÙe  $\frac{\cos \alpha}{\varrho} = x$  und  $\frac{\sin \alpha}{\varrho} = y$ .

Fig. 110.



Dies sind dann die Koordinaten eines Punktes  $P$ , für den  $OP = \frac{1}{\varrho}$  und  $\sphericalangle POA = \alpha$  ist. Setzt man außerdem die Konstanten  $\frac{1}{\varrho_1} = a_1$  und  $\frac{1}{\varrho_2} = b_1$ , so geht die obige Gleichung über in

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{2xy}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} = 1.$$

Bildet man also für jeden Winkel  $\alpha$  den Trägheitsradius  $\varrho$  und seinen umgekehrten Werth  $\frac{1}{\varrho}$ , und trägt man den letzteren auf dem freien Schenkel von  $\alpha$  ab, so bilden die Endpunkte  $P$  die durch die letzte Gleichung dargestellte Kurve.

Diese ist vom zweiten Grade, also Gleichung eines Kegelschnitts. Vertauscht man in der Gleichung  $+x$  mit  $-x$  und zugleich  $+y$  mit  $-y$ , so ändert sie sich nicht, folglich ist sie eine Mittelpunktsgleichung, und  $O$  ist Mittelpunkt des Kegelschnitts. Da ferner das Trägheitsmoment der Fläche für keine durch  $O$  gehende Achse verschwinden kann (denn  $\sum f\xi^2$  besteht aus lauter positiven Teilen), so kann  $\frac{1}{e}$  für keine durch  $O$  gehende Achse unendlich groß werden. Der Kegelschnitt ist demnach eine Ellipse. Also:

Berechnet man die reciproken Werte der Trägheitsmomente einer Fläche  $F$  für sämtliche durch einen Punkt  $O$  gehenden Achsen, und trägt man diese Werte auf den Achsen ab, so bilden die Endpunkte eine Ellipse.

Diese ist die sogenannte Trägheitsellipse.

(Hätte man nicht die reciproken Werte, sondern die  $\rho$  selbst abgetragen, so hätte man die reciproke Kurve der Ellipse, eine gewisse Kurve 4<sup>ten</sup> Grades erhalten, die der allgemeinen Anschauung weniger geläufig ist.)

Hat man die Hauptachsen dieser Ellipse, so kennt man alle ihre Durchmesser, folglich auch die reciproken Werthe der Trägheitsmomente für sämtliche Achsen, folglich auch die Trägheitsmomente selbst. Man hat also eine sehr einfache graphische Darstellung. Gleichzeitig aber lassen sich sofort zahlreiche wichtige Folgerungen ablesen.

### 131) Folgerungen.

a) Die Ellipse hat einen größten und einen kleinsten Durchmesser, die auf einander senkrecht stehen. Dem ersteren entspricht das Minimum, dem letzteren das Maximum des Trägheitsmomentes. Die Minimal- und Maximalachse stehen also auf einander senkrecht.

Man bezeichnet beide als die Hauptträgheitsachsen der Fläche für den betreffenden Punkt  $O$ .

b) Je zwei Ellipsendurchmesser, die symmetrisch gegen die beiden Hauptachsen liegen, sind einander gleich. Folglich: Symmetrisch gegen die Hauptachsen liegenden Achsen entsprechen gleiche Trägheitsmomente.

c) Von den so zusammengehörigen Durchmesserpaaren bildet nur eines einen rechten Winkel, das den Winkel der Hauptachsen halbierende. Folglich: Sind die Trägheitsmomente in Bezug auf zwei durch  $O$  gehende und aufeinander senkrecht stehende Achsen einander gleich, so findet man durch Halbierung der Schnittwinkel der letzteren die Haupt-

trägheitsachsen. Der Kürze halber sollen die Achsen der gleichen Trägheitsmomente als Gleichheitsachsen bezeichnet werden.

d) Sind mehr als zwei Ellipsendurchmesser einander gleich, so ist die Ellipse ein Kreis. Folglich: Stimmen die Trägheitsmomente in Bezug auf mehr als zwei durch  $O$  gehende Achsen überein, so stimmen sie für sämtliche überein. (Später wird sich zeigen, daß für jede beliebig gestaltete ebene Fläche zwei Punkte existieren, für deren Strahlenbüschel sämtliche Trägheitsmomente der Fläche übereinstimmen. Dies sind die sogenannten Fixpunkte.)

e) Ist eine der durch  $O$  gehenden Achsen Symmetrieachse der Fläche  $F$ , so ist sie auch Symmetrieachse der Trägheitsellipse. Folglich: Eine Symmetrieachse einer Fläche ist stets eine der Hauptachsen der Trägheitsellipse, also liegt entweder der Fall des Maximums, oder der des Minimums vor. Gerade dieser Umstand erspart zahlreiche Rechnungen.

f) Die Summe zweier Trägheitsmomente für auf einander senkrechte Achsen ist konstant, nämlich gleich dem zugehörigen Polarmomente. Folglich muß für die Ellipse folgender Satz existieren: Die Summe der Quadrate der reciproken Werte für je zwei auf einander senkrechte Halbmesser der Ellipse ist konstant, nämlich gleich  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ .

132) Die Centralellipse. Die dem Schwerpunkte einer Fläche entsprechende Ellipse heißt die Centralellipse. Sie ist von besonderer Wichtigkeit, weil von ihr aus alle anderen Trägheitsmomente durch Verschiebung ( $T_1 = T + e^2 F$ ) gefunden werden können.

Auch von ihr gelten die letzten Symmetriebemerkungen.

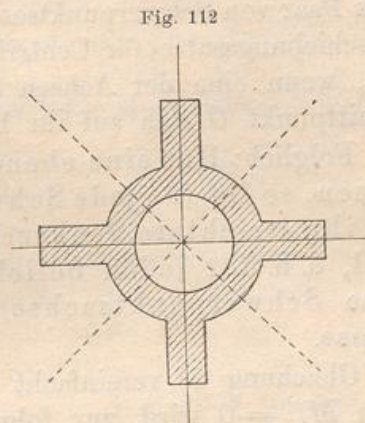
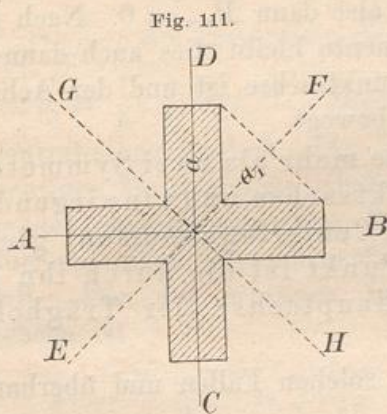
Von besonderer Wichtigkeit ist folgendes:

Hat eine Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist die Centralellipse ein Kreis.

In diesem Falle braucht man also nur ein einziges Trägheitsmoment wirklich zu berechnen. Dies gilt nicht nur von den regelmäßigen Polygonen, sondern auch von zahlreichen anderen ebenen Gebilden, die für die Technik wichtig sind. Hierher gehören z. B. die Kreuzquerschnitte und die Schnitte gewisser Säulen und Flügelachsen. Davon wurde im Abschnitt 65 Gebrauch gemacht.

Für die Biegungs- und Strebfestigkeit lassen sich daraus sofort wichtige Folgerungen ablesen. Für die erstere ist der Ausdruck  $\frac{T}{a}$  maßgebend, wo  $a$  die Entfernung der äußersten Fasern von der

Biegungsachse ist, für die andere der Ausdruck  $T$  selbst, der hier für alle Achsen derselbe ist. Für Figur 111 z. B. ist  $\frac{T}{a}$  in Bezug auf die



Achse  $AB$  kleiner als  $\frac{T}{a_1}$  in Bezug auf die Achse  $GH$ , die letztere Biegungsachse ist also für Biegungsbeanspruchung die günstigere. Entsprechendes gilt für Figur 112.

133) Lage der Hauptachsen für beliebige Trägheitsellipsen.

Die Gleichung einer Trägheitsellipse einer Fläche für einen beliebigen Punkt ergab sich aus

1) 
$$I_z = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

als

2) 
$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 2c^2 xy = 1.$$

Hätte in der ersten Gleichung für jedes  $\alpha$  der dritte Posten gefehlt, d. h. wäre  $M_{xy} = 0$  gewesen, so hätte er auch in der andern Gleichung gefehlt und man hätte die einfachste Gleichung der Ellipse erhalten. Folglich:

Ist für die beiden gewählten Achsen das Centrifugalmoment der Fläche gleich Null, so ist die Gleichung der Trägheitsellipse von der Form

3) 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo  $a$  und  $b$  Hauptachsen der Ellipse sind.

Umgekehrt folgt daraus, daß das Centrifugalmoment in Bezug auf die Hauptachsen der Trägheitsellipse gleich Null ist.

Dies ist z. B. der Fall für jede Symmetrieachse einer Fläche und eine auf der ersteren senkrecht stehende Achse.

Hat ferner die Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist die Centraellipse ein Kreis und man darf je zwei beliebige auf einander senkrechte Schwerpunktsachsen als Hauptachsen betrachten. Für jedes Paar von Schwerpunktsachsen ist also dann  $M_{xy} = 0$ . Nach dem Verschiebungssatze für Centrifugalmomente bleibt dies auch dann der Fall, wenn eine der Achsen Schwerpunktsachse ist und der Achsen-schnittpunkt  $O$  sich auf ihr beliebig bewegt.

Folglich: Hat eine ebene Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist für jede Schwerpunktsachse und eine irgendwo auf ihr errichtete Senkrechte das Centrifugalmoment gleich Null, d. h. für jeden beliebigen Punkt ist die durch ihn gelegte Schwerpunktsachse eine Hauptachse der Trägheitsellipse.

Gleichung 1) vereinfacht sich in solchen Fällen und überhaupt, wenn  $M_{xy} = 0$  wird, zur folgenden:

$$4) \quad T_{\xi} = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha,$$

bezw.

$$5) \quad \varrho^2 = \varrho_1^2 \cos^2 \alpha + \varrho_2^2 \sin^2 \alpha,$$

und dabei sind  $T_x$  und  $T_y$  Minimal- bzw. Maximalmomente, je nachdem das eine oder das andere das kleinere ist.

134) **Aufgabe.**  $T_x$  und  $T_y$  seien das minimale und maximale Trägheitsmoment für eine Fläche  $F$  und für das Strahlenbündel eines beliebigen Punktes  $O$ . Wie groß sind die Momente für die Winkelhalbierenden der Hauptachsen?

**Auflösung.** In Gleichung 4) ist  $\alpha = 45^\circ$  einzuführen. Dies giebt

$$T_{\xi} = T_x \cos^2 45^\circ + T_y \sin^2 45^\circ = \frac{T_x + T_y}{2}.$$

Dasselbe gilt für den Winkel  $-45^\circ$ .

Folglich: Das Trägheitsmoment für die Gleichheitsachsen ist das arithmetische Mittel der beiden Grenzmomente. (Letzterer Ausdruck soll Abkürzung für die Worte Maximal- und Minimalmoment bedeuten.)

Folglich: Das Trägheitsmoment für die Gleichheitsachsen ist gleich der Hälfte des zugehörigen Polarmomentes.

135) **Aufgabe.** Die Centraellipse des Rechtecks zu berechnen und ihr Trägheitsmoment für die entsprechenden Gleichheitsachsen zu entwickeln.

Das Maximalmoment für Figur 113 ist  $\frac{bh^3}{12}$ , das Minimal-

moment  $\frac{hb^3}{12}$ , die Trägheitsradien sind  $\varrho_2 = \sqrt{\frac{bh^3}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$  und  $\varrho_1 = \frac{b}{\sqrt{12}}$ , die reciproken Werthe sind  $a_1 = \frac{\sqrt{12}}{b}$ ,  $b_1 = \frac{\sqrt{12}}{h}$ , so daß  $a_1 : b_1 = \frac{1}{b} : \frac{1}{h} = h : b$ . Die einbeschriebene Hauptellipse ist also der Centraellipse ähnlich. Um letztere im richtigen Maßstabe zu erhalten, würde es der Feststellung einer Einheit bedürfen, wovon jetzt abgesehen werden soll. Für die schrägen Gleichheitsachsen ist

$$\begin{aligned}
 T_{\xi} &= \frac{T_x + T_y}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{hb^3}{12} + \frac{bh^3}{12} \right) \\
 &= \frac{bh}{24} (b^2 + h^2) = \frac{F}{24} d^2,
 \end{aligned}$$

wo  $F$  die Fläche des Rechtecks,  $d$  seine Diagonale ist.

(Bei Millimetermaß fallen für die gebräuchlichen Querschnitte die Halbachsen äußerst klein aus. Wäre z. B.  $h = 100$  mm, so würde  $a = \frac{\sqrt{12}}{100}$  kaum sichtbar sein.

Ist allgemeiner die Länge 1 gegeben, und hat man  $\varrho_1 = \frac{b}{\sqrt{12}}$  gezeichnet, so findet man  $a_1 = \frac{1}{\varrho_1}$  mit Hilfe der Proportion  $\varrho_1 : 1 = 1 : a_1$ . Ebenso ist es mit  $\varrho_2 = \frac{h}{\sqrt{12}}$  und  $\varrho_2 : 1 = 1 : b_1$ .

136) Aufgabe. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf seine Diagonale  $d$ ?

Auflösung. Aus

$$T_{\xi} = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha$$

folgt, da

$$\sin \alpha = \frac{h}{d}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{d}$$

und

$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

ist,

$$T_{\xi} = \frac{bh^3 b^2}{12 d^2} + \frac{hb^3 h^2}{12 d^2} = \frac{b^3 h^3}{6 d^2} = \frac{b^3 h^3}{6 (b^2 + h^2)},$$

was auch mit Hilfe des Dreiecks gefunden werden konnte. [Jedes Diagonaldreieck giebt  $\frac{dl^3}{12}$ , die Gesamtfigur also  $\frac{dl^3}{6}$ . Nun ist aber

Fig. 113.

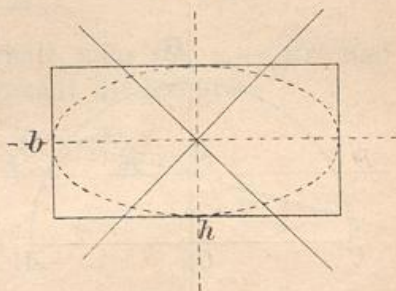
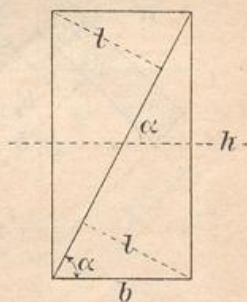


Fig. 114.





$dl = bh$ , also  $l = \frac{bh}{d}$ , folglich  $T_{\xi} = \frac{d}{6} \frac{b^3 h^3}{d^3} = \frac{b^3 h^3}{6 d^2}$ . Kommt es auf grössere Genauigkeit nicht an, so kann man das Resultat an Fig. 113 ablesen.

137) Aufgabe. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Halbkreises für beliebige Schwerpunktsachsen?

In Bezug auf  $DE$  ist nach 68)

$$T_x = r^4 \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) = r^4 \pi \left( \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2} \right).$$

In Bezug auf  $OB$  ist

$$T_y = \frac{r^4 \pi}{8},$$

folglich für die unter  $\alpha$  geneigte Schwerpunktsachse

$$T_{\xi} = r^4 \pi \left( \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2} \right) \cos^2 \alpha + \frac{r^4 \pi}{8} \sin^2 \alpha.$$

Für  $\alpha = 45^\circ$  erhält man z. B.

$$T_{\xi} = \frac{r^4 \pi}{2} \left[ \frac{1}{4} - \frac{8}{9\pi^2} \right].$$

$T_y$  ist das Maximal-,  $T_x$  das Minimalmoment, die Centralellipse hat also ihre Brennpunkte auf  $DE$ ;  $BO$  ist also die günstigere Biegungsachse für die Festigkeit.

138) Beispiel des symmetrischen Winkeleisens.

Es war in Nr. 59)

$$T_x = \frac{1}{24} \left[ (b_1 + b_2)^4 - b_1^4 - 2b_2^4 \right]$$

$$- h_s'^2 (b^2 - b_1^2),$$

$$T_y = \frac{(b_1 + b_2)^4 - b_1^4}{12}$$

$$- 2 \left[ \frac{b_2^4}{12} + \frac{1}{2} (b_1 + b_2)^2 b_2^2 \right].$$

Dies sind die Grenzmomente, denn die Winkelhalbierenden geben Gleichheitsachsen. Für diese ist demnach

$$T_{\xi} = \frac{T_x + T_y}{2},$$

wodurch sich das Resultat 58) bei Fig. 64 bestätigen muss.

Fig. 115.

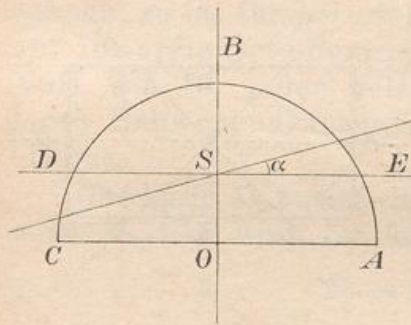
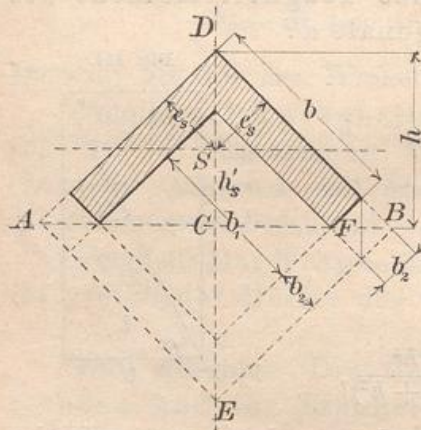


Fig. 116.



139) Ausgang von den Gleichheitsachsen.

Für die Gleichheitsachsen ist  $T_x = T_y$ , wofür der Gleichheit halber  $T_g$  geschrieben werden soll. Für die Achse, die um  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse gedreht ist, gilt jetzt nach Nr. 109 die Gleichung

$$\begin{aligned} T_{\xi} &= T_g \cos^2 \alpha + T_g \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy} \\ &= T_g (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \sin 2\alpha M_{xy}, \end{aligned}$$

folglich

$$T_{\xi} = T_g - \sin 2\alpha M_{xy}.$$

Nimmt man  $M_{xy}$  als positiv an, so erhält man für  $\alpha = 45^\circ$  und  $\alpha = -45^\circ$  das Minimal- und Maximalmoment in der Form

$$T_1 = T_g - M_{xy}, \quad T_2 = T_g + M_{xy}.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion

$$M_{xy} = \frac{T_2 - T_1}{2}.$$

Folglich: Das Centrifugalmoment in Bezug auf die Gleichheitsachsen ist gleich der halben Differenz der beiden Grenzmomente.

Namentlich bei einfach symmetrischen Querschnitten giebt dies mancherlei Rechnungserleichterungen. Für das vorige Beispiel z. B. ergibt sich für die Gleichheitsachsen (abgesehen vom Vorzeichen)

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2}.$$

140) Drehung der Achse des Centrifugalmomentes.

In beistehender Figur ist

$$\xi = OE + CD = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$\eta = FC - FE = y \cos \alpha - x \sin \alpha,$$

also

$$\begin{aligned} \xi \eta &= xy \cos^2 \alpha - xy \sin^2 \alpha \\ &\quad + y^2 \sin \alpha \cos \alpha - x^2 \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

folglich

$$\sum f \xi \eta = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sum fxy + \sin \alpha \cos \alpha \left[ \sum fy^2 - \sum fx^2 \right],$$

oder

$$1) \quad M_{\xi \eta} = \cos 2\alpha M_{xy} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (T_x - T_y).$$

Kennt man also das Centrifugalmoment und die beiden Trägheitsmomente in Bezug auf zwei zu einander senkrechte

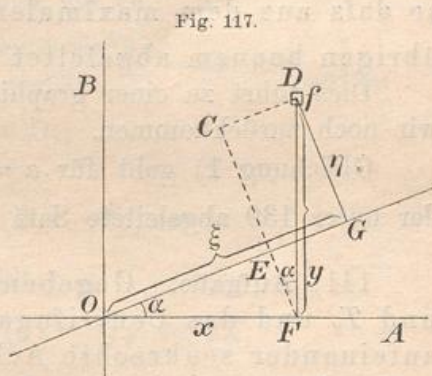


Fig. 117.

Achsen, so erhält man durch Gleichung 1) das Centrifugalmoment für die um  $\alpha$  gedrehte Achse.

Danach wird  $M_{\xi\eta} = 0$  für

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha (T_y - T_x) = \cos 2\alpha M_{xy}$$

oder für

$$2) \quad \tan 2\alpha = \frac{2M_{xy}}{T_y - T_x},$$

woraus sich die Richtungen für die beiden Hauptachsen ergeben.

Geht man umgekehrt von den Hauptachsen aus, für die  $M_{xy} = 0$  ist, so vereinfacht sich Gleichung 1) zu

$$3) \quad M_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (T_1 - T_2),$$

wo  $T_1$  und  $T_2$  Grenzmomente sind. Den Maximalwert hat man bei den Achsenrichtungen  $\alpha = \pm 45^\circ$ , nämlich

$$4) \quad M_{\xi\eta} = \frac{T_1 - T_2}{2},$$

so daß der Maximalwert des Centrifugalmomentes den Gleichheitsachsen angehört und daher auf einer der Hauptachsen graphisch darzustellen ist.

Geht man von den Gleichheitsachsen aus, so erhält man aus 1) die Gleichung

$$5) \quad M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha M_{xy},$$

so daß aus dem maximalen Centrifugalmoment  $\frac{T_1 - T_2}{2}$  alle übrigen bequem abgeleitet werden können.

Dies führt zu einer graphischen Darstellung aller Werte, auf die wir noch zurückkommen.

Gleichung 1) geht für  $\alpha = 45^\circ$  über in  $M_{\xi\eta} = \frac{T_x - T_y}{2}$ , worin der unter 139 abgeleitete Satz als besonderer Fall enthalten ist.

141) **Aufgabe.** Gegeben seien die Trägheitsmomente  $T_x$  und  $T_y$  und das Centrifugalmoment  $M_{xy}$  in Bezug auf zwei aufeinander senkrechte Achsen. Die Hauptträgheitsachsen sollen bestimmt und die Grenzwerte des Trägheitsmomentes sollen berechnet werden.

**Auflösung.** Man erhält die Hauptachsen, wenn  $M_{\xi\eta} = 0$  wird, also nach vorigem Abschnitt für

$$1) \quad \tan 2\alpha = \frac{2M_{xy}}{T_y - T_x},$$

woraus sich die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$  ergeben.

Diese Werte sind in die Bestimmungsgleichung

$$2) \quad T_{\xi} = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

einzusetzen, und so erhält man die beiden Grenzwerte.

Um jedoch nicht verschiedene Winkel  $\alpha$  und  $2\alpha$  in der Formel zu haben und um statt der verschiedenen Funktionen nur eine zu erhalten, setze man nach bekannten Formeln

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

und schreibe Gleichung 1) in der Form

$$1*) \quad \sin 2\alpha = \frac{2 M_{xy} \cos 2\alpha}{T_y - T_x}.$$

Dadurch geht 2) über in

$$T_{\xi} = T_x \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + T_y \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{2 M_{xy}^2 \cos 2\alpha}{T_y - T_x}$$

oder in

$$T_{\xi} = \frac{1}{2}(T_y + T_x) - \frac{1}{2}(T_y - T_x) \cos 2\alpha - \frac{2 M_{xy}^2 \cos 2\alpha}{T_y - T_x}$$

oder in

$$T_{\xi} = \frac{1}{2}(T_y + T_x) - \frac{1}{2}(T_y - T_x) \cos 2\alpha \left[ 1 + \frac{4 M_{xy}^2}{(T_y - T_x)^2} \right]$$

oder unter Benutzung von Gleichung 1)

$$T_{\xi} = \frac{1}{2}(T_y + T_x) - \frac{1}{2}(T_y - T_x) \cos 2\alpha [1 + \tan^2 2\alpha].$$

Die beiden letzten Faktoren formen sich um zu

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha \left[ 1 + \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} \right] &= \cos 2\alpha \frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \cos 2\alpha \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \\ &= \frac{1}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha, \end{aligned}$$

so dafs wird

$$3) \quad T_{\xi} = \frac{1}{2}(T_x + T_y) + \frac{1}{2}(T_x - T_y) \sec 2\alpha.$$

Setzt man  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$  ein, so erhält man

$$4) \quad T_{\eta} = \frac{1}{2}(T_x + T_y) - \frac{1}{2}(T_x - T_y) \sec 2\alpha.$$

Durch 3) und 4) findet man die Grenzwerte des Trägheitsmomentes, den Hülfswinkel  $\alpha$  mittelst der Gleichung 1\*). Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Auf dasselbe Resultat führt die später zu behandelnde Maximal- und Minimal-Methode. Damit ist eine der wichtigsten Aufgaben der Festigkeitslehre gelöst, denn an der Trägheitsellipse erkennt man z. B. sofort, dafs ein auf Strebfestigkeit beanspruchter Stab senkrecht gegen die kleine Achse standhält, in ihrer Richtung aber biegend nachgiebt.

## 142) Die Curve der Radien des Centrifugalmomentes.

In Nr. 140 war zur Berechnung des Centrifugalmomentes für die um  $\alpha$  gedrehten Achsen folgende Formel angewandt:

$$1) \quad M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha M_{xy} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (T_y - T_x).$$

Führt man die Radien der Momente durch die Gleichungen

$$F\lambda^2 = M_{\xi\eta}, \quad F\lambda_1^2 = M_{xy}, \quad F\varrho_1^2 = T_x, \quad F\varrho_2^2 = T_y$$

ein und dividiert man beiderseits durch  $F$ , so entsteht die Gleichung

$$2) \quad \lambda^2 = \lambda_1^2 \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \sin 2\alpha.$$

Sind hier  $T_x$  und  $T_y$  die beiden Grenzmomente, sind also die Achsen die Hauptachsen, so ist  $M_{xy} = 0$ , also auch  $\lambda_1 = 0$ , die Gleichung vereinfacht sich also zu

$$3) \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \sin 2\alpha.$$

Hier seien die Benennungen wieder so gewählt, daß  $\varrho_2 > \varrho_1$  ist. Dann bilde man

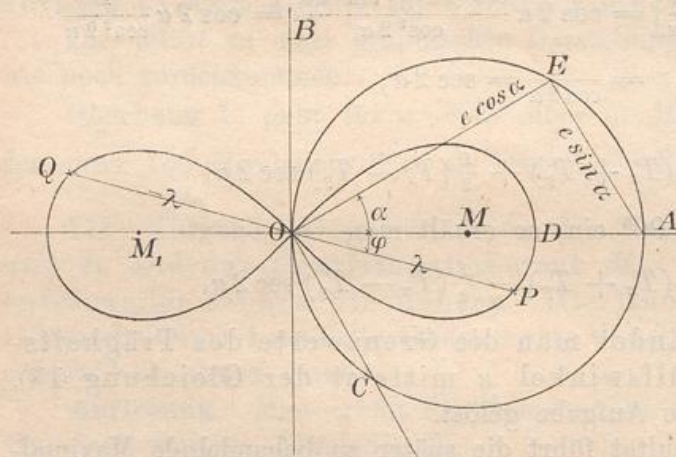
$$4) \quad \varrho_2^2 - \varrho_1^2 = e^2,$$

so daß sich ergibt

$$5) \quad \lambda^2 = \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha = (e \sin \alpha) (e \cos \alpha),$$

so daß  $\lambda$  mittlere Proportionale zwischen  $e \sin \alpha$  und  $e \cos \alpha$  ist.

Fig. 118.



Dies führt zu folgender Konstruktion für den Radius des Centrifugalmomentes für gegebenen Winkel  $\alpha$  und  $\alpha - 90^\circ$  und bei gegebenem Maximal-Radius  $\varrho_1$  und Minimal-Radius  $\varrho_2$ .

Man bilde  $OA = e = \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}$  und schlage den zu  $OA$

als Durchmesser gehörigen Kreis, ziehe die Sehnen  $OE$  und  $OC$  unter  $\alpha^\circ$  und  $\alpha^\circ - 90^\circ$  Neigung und verbinde  $E$  mit  $A$ . Zu  $AE = e \sin \alpha$  und  $OE = e \cos \alpha$  bilde man die mittlere Proportionale

$\lambda$  und trage sie von  $O$  aus als Halbierende  $OP$  des Winkels  $EOC$  ein. Dann ist  $OP$  der Radius des gesuchten Centrifugalmomentes.

Bezeichnet man den Winkel  $AOP$  mit  $\varphi$ , so ist  $\varphi = \alpha - 45^\circ$ , also  $\alpha = \varphi + 45^\circ$ , so daß Gleichung 3) übergeht in

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \sin(2\varphi + 90^\circ) = \frac{1}{2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \sin(90^\circ - 2\varphi)$$

oder in

$$6) \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \cos 2\varphi = \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi.$$

Da jetzt  $\lambda$  und  $\varphi$  zusammengehören, was bei  $\lambda$  und  $\alpha$  nicht der Fall war, so kann man 6) als Gleichung der gesuchten Kurve in Polarkoordinaten betrachten.

In Gleichung 6) liegt aber eine neuere und einfachere Konstruktion für den Radius  $\lambda$  des Centrifugalmomentes.

Man zeichne denselben Kreis wie vorher und trage  $MOC = 2\varphi$  ein. Als Winkelhalbierende trage man die mittlere Proportionale zwischen  $OM$  und  $OC$  ein, was  $OP = \lambda$  giebt. Dies ist der Radius des Centrifugalmomentes für die beiden unter  $\pm 45^\circ$  gegen  $OP$  geneigten Achsen.

**Beweis.** Nach der Konstruktion ist

$$OM : OP = OP : OC,$$

also

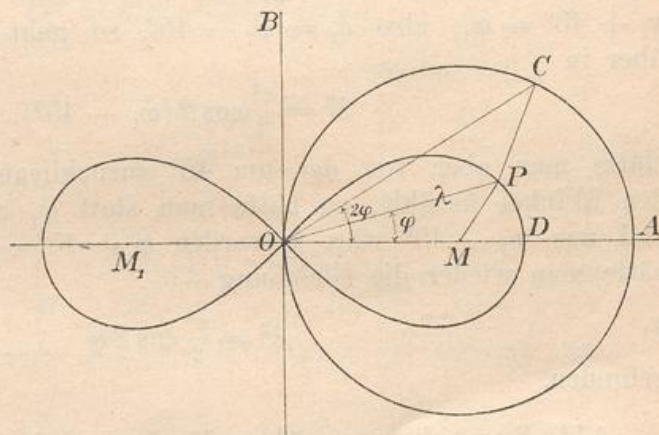
$$OP^2 = OM \cdot OC = OM \cdot OA \cos 2\varphi = \frac{e}{2} (e \cos 2\varphi) = \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi.$$

Dies stimmt mit der Gleichung 6) überein.

Man achte auf die Ähnlichkeit der Dreiecke  $OMP$  und  $OMC$ . Das in dieser Konstruktion liegende Abbildungsprinzip wird uns noch mehrfach beschäftigen.

Trägt man  $OP$  auch in entgegengesetzter Richtung ab, was der Gleichung  $c = \pm \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}}$  entspricht, so bilden die Endpunkte aller so konstruierten Radien  $OP$  eine schleifenförmige Kurve, die sogenannte

Fig. 119.



Lemniskate, genauer bezeichnet, die gleichseitige Lemniskate, über die später eingehender zu sprechen sein wird.

143) Dasselbe Resultat hätte man gefunden, wenn man von den Gleichheitsachsen ausgegangen wäre. Für diese geht, da für sie  $T_x = T_y$ , also  $\varrho_1 = \varrho_2$  ist, Gleichung 2) über in

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 \cos 2\alpha_1 = \frac{e^2}{2} \cos 2\alpha_1,$$

denn jetzt ist  $\lambda_1^2$  gleich dem Maximalwerte  $\frac{e^2}{2}$ , also  $\lambda_1 = e\sqrt{\frac{1}{2}} = OD$  in Fig. 119 und  $\lambda$  wäre aufzutragen gewesen auf die Gerade, die den Winkel zwischen  $\alpha_1$  und  $\alpha_1 + 90^\circ$ , die also mit der einen Gleichheitsachse den Winkel  $\frac{\alpha_1 + (\alpha_1 + 90^\circ)}{2} = \alpha_1 + 45^\circ$  bildet. Setzt man  $\alpha_1 + 45^\circ = \varphi_1$ , also  $\alpha_1 = \varphi_1 - 45^\circ$ , so geht die Gleichung für  $\lambda$  über in

$$\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 2(\varphi_1 - 45^\circ).$$

Hätte man aber von der um  $45^\circ$  zurückliegenden Hauptachse aus den Winkel gezählt, so hätte man statt  $\varphi_1$  zu schreiben  $\varphi + 45^\circ$  und aus  $\varphi_1 - 45^\circ$  wäre geworden  $\varphi + 45^\circ - 45^\circ = \varphi$ . Demnach hätte man wieder die Gleichung

$$6) \quad \lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi$$

gefunden.

144) Bemerkungen über die Lemniskate des Centrifugalmomentes.

$OA$  und  $OB$  sind die Hauptachsen der Trägheitsellipse. Da  $\varrho_2 > \varrho_1$  angenommen war, ist  $\frac{1}{\varrho_2} < \frac{1}{\varrho_1}$ , d. h. die große Achse der Trägheitsellipse fällt in die Richtung  $OA$ , die kleine in die Richtung  $OB$ . Man bezeichnet die Punkte  $M$  und  $M_1$  als Brennpunkte der Lemniskate. Für  $\varphi = 0$  ist  $\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 0 = \frac{e^2}{2}$ , dies giebt den Maximalwert  $OD = e\sqrt{\frac{1}{2}} = OA\sqrt{\frac{1}{2}}$  für den Radius des Centrifugalmomentes. Für  $\varphi = \pm 45^\circ$  erhält man

$$\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 90^\circ = 0.$$

Demnach geben die Richtungen  $\pm 45^\circ$  unendlich kleine Sehnen, d. h. Tangenten. Im Punkte  $O$  haben also die Tangenten der Lemniskate die Richtungen  $\pm 45^\circ$ . Es verhält sich

$$OM : OD = \frac{e}{2} : \frac{e}{2}\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}.$$

Durch Gleichung 6) war die Lemniskate in Polarkoordinaten dargestellt. In gewöhnlichen Koordinaten würde sie folgendermaßen zu bilden sein. Es ist

$$x^2 + y^2 = \lambda^2, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\lambda} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\lambda} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

also

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Gleichung 6) geht aber über in

$$x^2 + y^2 = \frac{e^2 x^2 - y^2}{2 x^2 + y^2}$$

oder in

$$7) \quad (x^2 + y^2)^2 = \frac{e^2}{2} (x^2 - y^2).$$

Fig. 120.

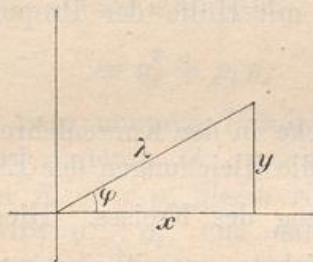
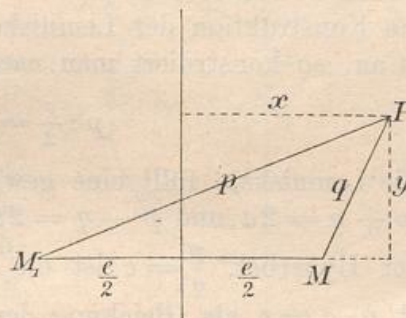


Fig. 121.



Die Haupteigenschaft der Curve ergibt sich aus Folgendem:  
Man verbinde einen Lemniskatenpunkt  $P$  mit  $M$  und  $M_1$ , dann ist

$$p^2 = \left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$q^2 = \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + y^2,$$

folglich

$$\begin{aligned} p^2 q^2 &= \left[\left(x^2 + y^2 + \frac{e^2}{4}\right) + ex\right] \cdot \left[\left(x^2 + y^2 + \frac{e^2}{4}\right) - ex\right] \\ &= \left(x^2 + y^2 + \frac{e^2}{4}\right)^2 - e^2 x^2 \end{aligned}$$

oder

$$p^2 q^2 = (x^2 + y^2)^2 + \frac{e^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{e^4}{16} - e^2 x^2.$$

Nach Gleichung 7) ist aber für die Lemniskatenpunkte

$$0 = (x^2 + y^2)^2 - \frac{e^2}{2} (x^2 - y^2).$$



Durch Subtraktion folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$p^2 q^2 = e^2 x^2 + \frac{e^4}{16} - e^2 x^2 = \frac{e^4}{16},$$

also ist

$$8) \quad pq = \frac{e^2}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Das Produkt der „Brennstrahlen“ einer Lemniskate ist also eine konstante Gröfse.

Ist  $\lambda_m$  der Maximalbetrag für den Radius des Centrifugalmomentes, so ist  $\lambda_m = e\sqrt{\frac{1}{2}}$ , man kann also auch schreiben

$$pq = \frac{(\lambda_m \sqrt{2})^2}{4} = \frac{\lambda_m^2}{2}.$$

Aus der Eigenschaft 8), welche die Lemniskate als besonderen Fall der Cassinischen Kurven  $pq = a^2$  erscheinen läßt, folgt eine weitere einfache Konstruktion der Lemniskate. Nimmt man nämlich  $p$  willkürlich an, so konstruiert man nach 8)  $q$  mit Hülfe der Proportion

$$p : \frac{e}{2} = \frac{e}{2} : q.$$

Die Lemniskate füllt eine gewisse Lücke in der Kurvenlehre aus, denn  $p + q = 2a$  und  $p - q = 2a$  sind die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel,  $\frac{p}{q} = c$  ist die Gleichung des Kreises. Hier erscheint  $p \cdot q = c$  als Gleichung der Lemniskate, womit eine gewisse Gruppe von Kurven abgeschlossen ist. — Später soll näher auf diese Kurve eingegangen werden.

145) Die Fixpunkte oder die Punkte konstanten Trägheitsmomentes.

Die durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenachsen seien die Achsen kleinsten und größten Trägheitsmomentes  $T_x$  und  $T_y$ . Auf der  $Y$ -Achse trage man die Entfernungen  $SC_1$  und  $SC_2$  gleich  $\sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} = \pm e$  ab. Dann wird behauptet,  $C_1$  und  $C_2$  seien für die beliebig gestaltete Fläche  $F$  die Punkte konstanten Trägheitsmomentes.

**Beweis.** Für jede Achse, die mit der Hauptachse  $X$  den Winkel  $\alpha$  bildet, ist, da für die Hauptachse  $M_{xy} = 0$  ist, nach Nr. 133

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha,$$

also ist für die parallele um  $p$  entfernte Achse  $KL$  nach dem Verschiebungssatze (wo  $F$  sich weghebt)

$$\varrho^2 = \varrho_\alpha^2 + p^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha + p^2.$$

Sind nun  $p_1$  und  $p_2$  die von  $C_1$  und  $C_2$  auf die neue Achse gefällten Lote, so ist

$$p_1 = p - e \cos \alpha, \quad p_2 = p + e \cos \alpha,$$

folglich

$$p_1 p_2 = p^2 - e^2 \cos^2 \alpha,$$

folglich

$$\begin{aligned} p^2 &= p_1 p_2 + e^2 \cos^2 \alpha \\ &= p_1 p_2 + (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha \\ &+ p_1 p_2 + \varrho_2^2 \cos^2 \alpha - \varrho_1^2 \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= \varrho_2^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + p_1 p_2 \\ &= \varrho_2^2 + p_1 p_2. \end{aligned}$$

Legt man nun die Parallele durch  $C_1$  oder durch  $C_2$ , so wird entweder  $p_1$  oder  $p_2$  gleich Null, d. h. es wird  $\varrho = \varrho_2$ , und dabei ist  $\alpha$  ganz gleichgiltig.

Folglich: Legt man durch die Fixpunkte  $C_1$  und  $C_2$  beliebig gerichtete Achsen, so ist für sämtliche das Trägheitsmoment gleich groß und ergibt sich aus dem Radius  $\varrho_2$  des maximalen Trägheitsmomentes.

Für beide Fixpunkte gehen also die Trägheitsellipsen in Kreise über.

Kennt man die Lage der Fixpunkte, so berechnet sich das Trägheitsmoment für jede beliebige Achse der Ebenen mit Hilfe der Gleichung

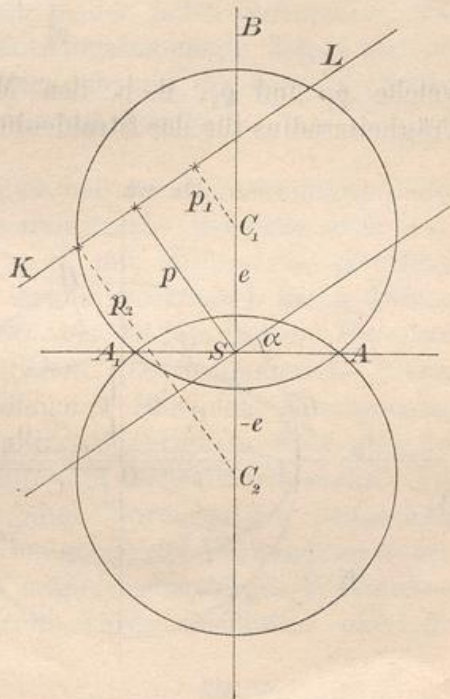
$$\varrho^2 = \varrho_2^2 + p_1 p_2,$$

wo  $p_1$  und  $p_2$  die Entfernungen der Geraden von den Fixpunkten sind.

(Der zweite Posten ist positiv, wenn  $p_1$  und  $p_2$  gleichgerichtet sind, negativ bei entgegengesetzter Richtung.)

Der große Vorteil liegt darin, dass jetzt goniometrische Funktionen überflüssig sind, und dass auch graphisch verfahren werden kann.

Fig. 122.

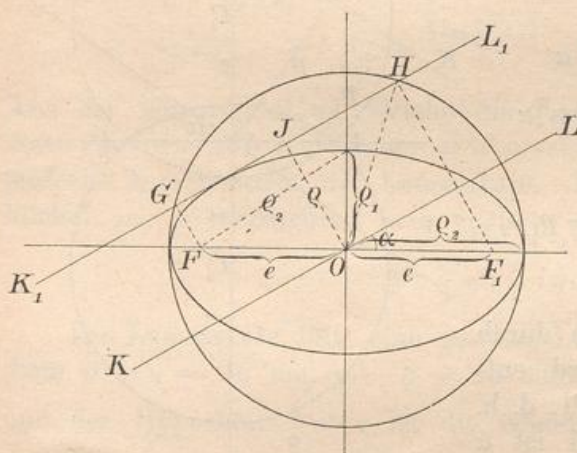


146) Die Culmansche Trägheitsellipse. Es sei erwähnt, daß im Anschluß an Clebsch durch Culmann eine zweite Trägheitsellipse eingeführt worden ist, deren bisher absichtlich nicht gedacht wurde. Es handelt sich um die Ellipse

$$\frac{x^2}{\varrho_2^2} + \frac{y^2}{\varrho_1^2} = 1,$$

welche  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ , d. h. den Maximal- und den Minimalwert des Trägheitsradius für das Strahlenbüschel durch einen beliebigen Punkt  $O$  zu Achsen hat.

Fig. 123.



Ihre Bedeutung ergibt sich aus folgender Betrachtung.

In Fig. 123 ist ein Kreis mit Radius  $\varrho_2$  und die Culmannsche Ellipse für einen beliebigen Punkt  $O$  der Ebene gezeichnet. Durch  $O$  ist eine beliebige Gerade  $KL$  mit Neigung  $\alpha$  gezeichnet. Legt man durch die mittels  $e = \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}$  konstruierten Brennpunkte  $F$  und  $F_1$  Senkrechte zu

ihr, so geben die Schnitte  $G$  und  $H$  mit dem Kreise bekanntlich eine Tangente der Ellipse. (Vergl. Meth. Lehrbuch II, Ster. 14.) Es wird behauptet,  $OJ$  sei der Trägheitsradius für  $KL$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} OJ^2 &= OH^2 - JH^2 = \varrho_2^2 - (OF_1 \cdot \cos \alpha)^2 = \varrho_2^2 - e^2 \cos^2 \alpha \\ &= \varrho_2^2 - (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \cos^2 \alpha = \varrho_2^2 (1 - \cos^2 \alpha) + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha \\ &= \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Es ist aber auch für die unter  $\alpha$  geneigte Gerade nach Nr. 133

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha,$$

also ist  $OJ^2 = \varrho^2$  und  $OJ = \varrho$ .

Folglich: Berechnet man für jede durch  $O$  gehende Gerade das Trägheitsmoment der Fläche  $F$ , und zieht man für jede eine Parallele in dem berechneten Abstände, so umhüllen die Parallelen die Culmannsche Trägheitsellipse.

Diese Ellipse ist namentlich in graphischer Hinsicht von Wichtigkeit, und sie wird hier nur vorläufig erwähnt, um Verwechslungen vorzubeugen. Ist  $O$  der Schwerpunkt  $S$ , so hat man die Culmannsche Centralellipse.

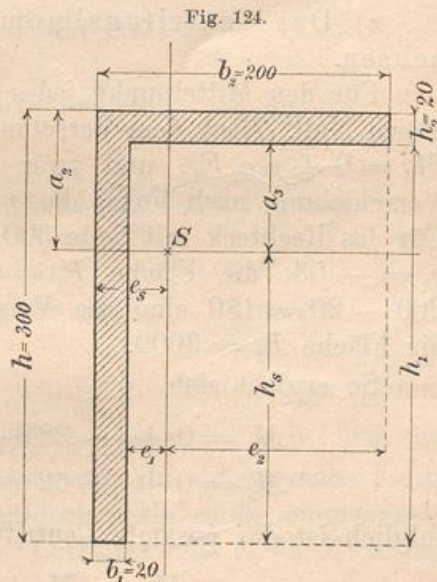
Die Culmannsche Trägheitsellipse ist ähnlich und ähnlich liegend zur ersten Ellipse. Die Mittelpunkte beider fallen zusammen. Die Brennpunkte der Lemniskate des Centrifugalmoments liegen auf der großen Achse beider Ellipsen, die Fixpunkte auf der kleinen. Später soll die zweite Ellipse eingehend behandelt werden.

147) Um zu erkennen, auf was es bei den Berechnungen dieses Kapitels ankommt, muß man einige numerische Beispiele nach jeder Richtung hin durchrechnen. Wird z. B. mit Millimetern gerechnet, so nimmt die Trägheitsellipse erster Art mikroskopisch kleine Dimensionen an, so daß man sie in 1000- bis 10 000-fachem Maßstabe zeichnen muß, um sie zu veranschaulichen. Die Culmannsche Ellipse dagegen erhält brauchbare Dimensionen. Für den Maschinenbau sind solche Berechnungen von geringerer Wichtigkeit, wohl aber für die Eisenkonstruktionen des Hochbau- und Brückenbauwesens. Für die dort auftretenden Querschnitte sind Normalprofile festgestellt. Jedes derselben kann als lehrreiches Übungsbeispiel Verwendung finden. Im nachstehenden Abschnitte ist ein ungleichschenkliges Winkeleisen numerisch behandelt. Ein Normalprofil wurde absichtlich nicht genommen, um gewisse Eigentümlichkeiten schärfer hervortreten zu lassen.

Abgesehen von der rein praktischen Verwertung für die Festigkeitslehre lassen sich aber viele physikalische Betrachtungen über die Theorie der Drehung, der Centrifugalkraft, der Pendelschwingungen, des Stosses, des Wasserdrucks u. dgl. mit jedem solchen Beispiele verbinden.

148) Beispiel des ungleichschenkligen Winkeleisens.

Gegeben sei  $h = 300$  mm,  $h_2 = 20$  mm  $= b_1$ ,  $b_2 = 200$  mm. Die Hauptaufgabe soll darin bestehen, die Lage der Hauptträgheitsachsen für den Schwerpunkt zu bestimmen und daraus gewisse Schlüsse zu ziehen. Der Einfachheit halber sind die Resultate jedesmal auf ganze Millimeter abgerundet. Dadurch treten



Ungenauigkeiten in die Rechnung, die praktisch ohne Belang sind, da der homogene Charakter des Materials doch niemals verbürgt werden kann.

a) Schwerpunktsbestimmung. Die Koordinaten des Schwerpunkts werden nach Nr. 3)

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2 h_1 + h_2)}{2 (b_1 h_1 + b_2 h_2)} = \frac{20 \cdot 280^2 + 200 \cdot 20 (560 + 20)}{2 (20 \cdot 280 + 200 \cdot 20)}$$

$$= \frac{3\,888\,000}{19\,200} = \sim 203 \text{ mm},$$

$$e_s = \frac{b_1^2 h_1 + b_2 h_2}{2 (b_1 h_1 + b_2 h_2)} = \frac{20^2 \cdot 280 + 200^2 \cdot 20}{2 (20 \cdot 280 + 200 \cdot 20)} = \frac{912\,000}{19\,200} = \sim 48 \text{ mm}.$$

b) Die Trägheitsmomente  $T_x$  und  $T_y$  werden nach Nr. 61)

$$T_x = \frac{1}{3} [b_1 h_s^3 + b_2 a_2^3 - b_3 a_3^3]$$

$$= \frac{1}{3} [20 \cdot 203^3 + 200 \cdot 97^3 - 180 \cdot 77^3] = \sim 89\,220\,000.$$

$$T_y = \frac{1}{3} [h e_s^3 - h_1 e_1^3 + h_2 e_2^3]$$

$$= \frac{1}{3} [300 \cdot 48^3 - 280 \cdot 28^3 + 20 \cdot 152^3] = \sim 32\,420\,000.$$

Demnach ist das polare Trägheitsmoment für den Schwerpunkt

$$T_p = 121\,640\,000.$$

c) Das Centrifugalmoment  $M_{xy}$  für die Schwerpunktsachsen.

Für den Mittelpunkt jedes Rechtecks ist das Centrifugalmoment gleich Null. Nach dem Verschiebungssatze ist dann  $M_1 = 0 + p_1 q_1 F_1$ ,  $M_2 = 0 + p_2 q_2 F_2$ , und zwar sind die  $p$  positiv einzustellen bei Verschiebung nach links, die  $q$  positiv bei Verschiebung nach unten. Für das Rechteck mit Seite 300 sind die Verschiebungen  $p_1 = -38$ ,  $q_1 = -53$ , die Fläche  $F_1 = 6000$ . Für das Rechteck mit Seite  $200 - 20 = 180$  sind die Verschiebungen  $p_2 = +62$ ,  $q_2 = +87$ , die Fläche  $F_2 = 3600$ .

So ergibt sich

$$M_1 = 0 + (-38)(-53)6000 = 12\,080\,000,$$

$$M_2 = 0 + (+62)(+87)3600 = 19\,420\,000,$$

folglich ist das gesamte Centrifugalmoment

$$M_{xy} = M_1 + M_2 = 31\,500\,000.$$

d) Die Lage der Hauptträgheitsachsen.

Nach Nr. 140 ist

$$\tan 2\alpha = \frac{2 M_{xy}}{T_y - T_x} = \frac{63\,000\,000}{-56\,800\,000} = -\frac{630}{568}.$$

$\lg \frac{630}{568} = \lg \tan \xi = 0,04499$ , also gehört zum positiven Bruche im ersten Quadranten der Winkel  $\xi = 47^\circ 58'$ , zum negativen Bruche also im zweiten Quadranten der Winkel  $2\alpha = 132^\circ 2'$ , so daß  $\alpha = 66^\circ 1'$  ist. Folglich:

Die eine Hauptachse der Trägheit ist unter  $66^\circ 1'$  gegen die positive Richtung der X-Achse geneigt. Die andere steht senkrecht dagegen.

e) Das maximale und das minimale Trägheitsmoment.

Nach Nr. 141) wird für die beiden Grenzmomente

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_x + T_y}{2} \pm \frac{T_x - T_y}{2} \sec 2\alpha \\ &= 60\,820\,000 \pm \frac{28\,400\,000}{\cos 132^\circ 2'} = 60\,820\,000 \mp 42\,420\,000. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$T_{\max} = 103\,240\,000, \quad T_{\min} = 18\,400\,000.$$

Die Summe beider gibt selbstverständlich wieder  $T_p$ .

f) Das maximale Centrifugalmoment für das Strahlenbüschel durch  $S$  ist

$$M_{\max} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} = 42\,420\,000.$$

g) Die Grenzwerte der Trägheitsradien.

$$\rho_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max}}{F}} = \sqrt{\frac{103\,240\,000}{9\,600}} = 103,71 \text{ mm} = \sim 104 \text{ mm},$$

$$\rho_{\min} = \sqrt{\frac{T_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{18\,400\,000}{9\,600}} = 43,78 \text{ mm} = \sim 44 \text{ mm}.$$

h) Die erste Centralellipse würde die Halbachsen  $\frac{1}{104}$  mm und  $\frac{1}{44}$  mm erhalten, so daß ihre graphische Darstellung bei den angenommenen Maßen nicht praktisch erscheint. In umstehender Figur ist sie im willkürlich gewählten 10 000-fachen Maßstabe eingetragen, was  $b = 96$  mm,  $a = 227$  mm giebt. Letzteres fällt in die Richtung  $KL$ , ersteres in die Richtung  $MN$ .

Hauptachse ist das Verhältnis  $104 : 44$  oder  $26 : 11$  oder etwa  $5 : 2$  für beide Achsen.

Man erkennt für die Festigkeitslehre sofort Folgendes: Bei Strebbeanspruchung giebt das Winkeleisen in der Richtung  $MN$  nach, hält aber stand in der Richtung  $KL$ . Die Tragfähigkeit im einfachsten Einspannungsfalle ist, wie die Festigkeitslehre zeigt, höchstens

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{T \cdot E}{l^2},$$

wo  $P$  die Tragfähigkeit,  $E$  der Elasticitätsmodul des Materials,  $l$  die Höhe ist. (Alles auf Kilogramme und Millimeter reduziert.)

Bei Biegungsbeanspruchung durch ein in senkrechter Ebene wirkendes Kräftepaar würde es am günstigsten sein,  $MN$  horizontal anzubringen. Im Falle des Freitragers würde die Grenze der Tragfähigkeit sein  $P = \frac{SW}{l}$ , wo  $S$  die zulässige Spannung des Materials,

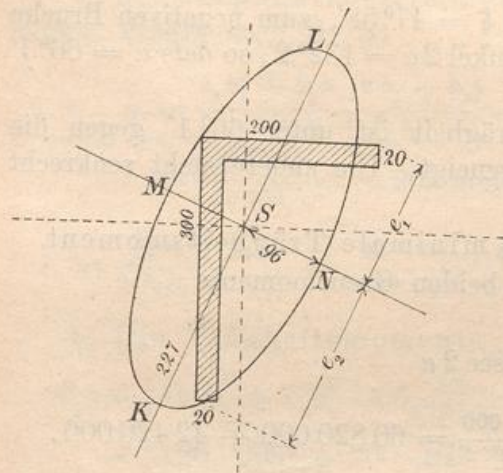
$l$  die Länge des Freitragers,  $W = \frac{J}{e_1}$  bzw.  $W = \frac{J}{e_2}$  das Widerstandsmoment (auch Querschnittsmodul  $Z$  genannt) des Querschnitts bedeutet.  $MN$  ist bei dieser Belastungsart neutrale Achse,  $e_1$  und  $e_2$  sind die Entfernungen der äußersten Fasern des Materials, wo die Zug- und Druckspannung am stärksten werden. Welcher von den beiden Moduln zu wählen ist, hängt von den Tragmoduln des Materials für Zug und Druck ab.

Die Festigkeitslehre zeigt ferner Folgendes. Wird der Freitragger in beliebiger Lage eingemauert, z. B. in der gezeichneten, und wirkt das Kräftepaar in senkrechter Ebene, so gilt als neutrale Achse der zu dieser Ebene konjugierte Durchmesser der Ellipse, dessen Richtung sich aus der Tangente im Schnittpunkte ergibt.

Denkt man sich den Querschnitt homogen mit Masse belegt und um eine in seiner Ebene liegende Schwerpunktsachse gedreht, so setzt er der beschleunigten Drehung den größten Widerstand entgegen, wenn  $MN$  Drehungsachse ist, den geringsten, wenn  $KL$  als solche gewählt wird. Die entsprechende Energie wird im ersten Falle  $T \frac{\vartheta^2}{2}_{\max}$ , im andern  $T \frac{\vartheta^2}{2}_{\min}$ , wo  $\vartheta$  die Winkelgeschwindigkeit ist.

Aus der Drehung um eine Achse, die in  $S$  auf der Querschnitts-

Fig. 125.



ebene senkrecht steht, wird die Centrifugalkraft gleich Null, die Energie wird  $T_p \frac{\dot{\vartheta}^2}{2}$ .

i) Die Culmannsche Trägheitsellipse. Ihre lange Hauptachse fällt mit der der ersten Trägheitsellipse zusammen, der sie ähnlich ist. Die Hauptachse  $a_1 = 104$  mm fällt in die Richtung  $MN$ . Die Brennpunkte  $F$  und  $F_1$  liegen in den Entfernungen

$$e = \sqrt{\varrho_{\max}^2 - \varrho_{\min}^2} = \sqrt{104^2 - 44^2} = \sim \pm 94 \text{ mm}$$

von  $S$  auf  $MN$ .

Trägt man diese Entfernungen von  $S$  aus auf  $KL$  ab, so findet man die Fixpunkte  $C$  und  $C_1$  des Querschnittes. Für diese sind also die Trägheitsellipsen Kreise vom Radius  $\varrho = 104$  mm. Für

beliebig gerichtete durch  $C$  und  $C_1$  gehende Achsen sind die Trägheitsmomente gleich  $T = 103\,240\,000$ . Man erhält den Trägheitsradius für eine beliebige Achse der Ebene durch die Gleichung

$$\varrho_{\max}^2 = \varrho^2 + p_1 p_2 = 104^2 + p_1 p_2,$$

wo  $p_1$  und  $p_2$  die von den Fixpunkten aus auf die neue Achse gefällten Lote sind.

Für jede durch  $S$  gehende Achse findet man den Trägheitsradius, indem man auf die parallele Tangente der zweiten Ellipse ein Lot fällt.

k) Die Lemniskate der Centrifugalmomente für je zwei Schwerpunktsachsen.

Ihre Brennpunkte fallen in die Richtung  $MN$  und haben von  $S$  die Entfernung  $\pm \frac{e}{2} = \pm \frac{94}{2} = \pm 47$ . Der größte Halbmesser  $SG$  wird gleich  $e\sqrt{\frac{1}{2}} = 94\sqrt{\frac{1}{2}} = \sim 66 \text{ mm} = \lambda$ .

Da  $\lambda^2 F = M_{\max}$  werden muß, so ergibt sich hier eine wichtige Rechnungsprobe. Man erhält in der That den früheren Werth  $\lambda^2 \cdot 9600 = 42\,420\,000$ .

Einige Punkte der Lemniskate hätte man aus dem Obigen ableiten können. Für die unter  $45^\circ$  geneigte Gerade hätte man als

Ihre lange Haupt-

Fig. 126.

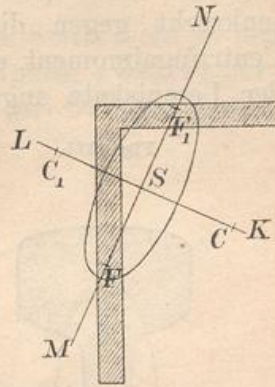
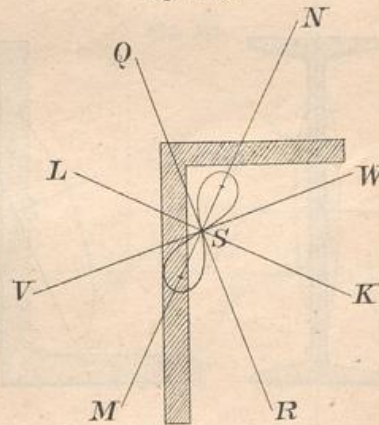


Fig. 127a.





Radius des Centrifugalmoments gefunden  $\lambda_{xy} = \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}} = \sqrt{\frac{31\,500\,000}{9600}} = \sim 57 \text{ mm}$ . Dies muß mit der Zeichnung übereinstimmen und giebt durch Symmetrie noch drei andere Punkte der Kurve.

1) Bei der Drehung um irgend eine in der Querschnittsebene liegende Schwerpunktsachse entsteht im allgemeinen ein aus zwei senkrecht gegen diese gerichteten Centrifugalkräften zu bildendes Centrifugalmoment, dessen Größe durch den winkelhalbierenden Radius der Lemniskate angegeben wird. Dieser Radius ist gleich Null in

Fig. 127 b.

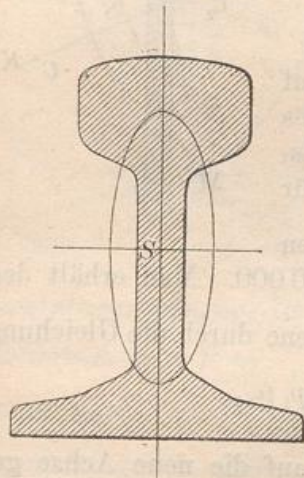
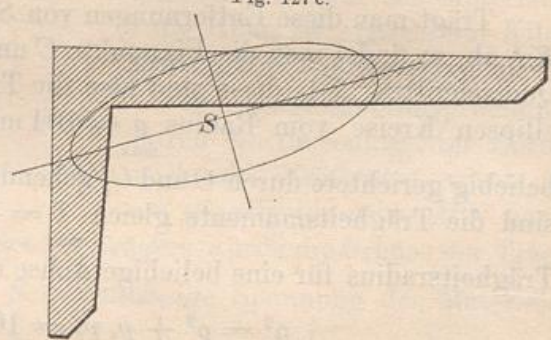


Fig. 127 c.



den Richtungen der Tangente  $RQ$  und  $VW$ , folglich ist das Centrifugalmoment gleich Null für die Hauptachsen  $KL$  und  $MN$ . Diese

Fig. 127 d.

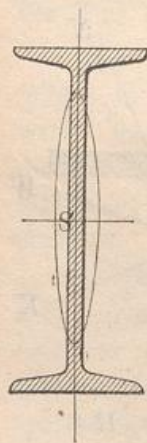


Fig. 127 e.

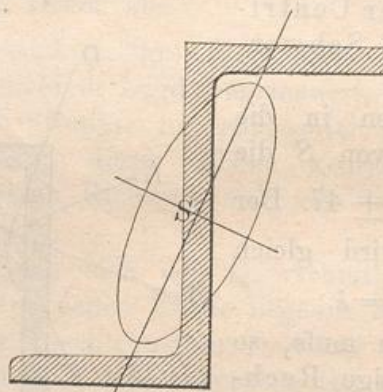
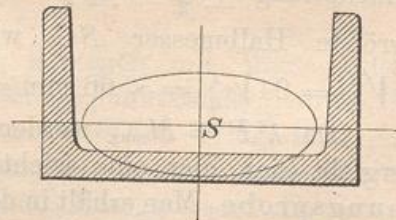


Fig. 127 f.



sind also freie Achsen des Querschnittes. Die dritte freie Achse ist das in  $S$  auf der Querschnittsebene errichtete Lot.

m) Auf andere Aufgaben der Mechanik, bei denen es sich um Pendelschwingungen, excentrischen Stofs, um Mittelpunkt des Wasserdrucks und dgl. handelt, sei gelegentlich dieses Übungsbeispiels nur kurz hingedeutet, da sie nur für die Übung im Ansatz, nicht aber für die Praxis Wert haben.

149) Im Anschluss an Culmanns Graphische Statik sind in den nebenstehenden Figuren noch einige Centralellipsen zweiter Art für gewisse Querschnitte skizziert worden, die für Übungsbeispiele brauchbar sind.

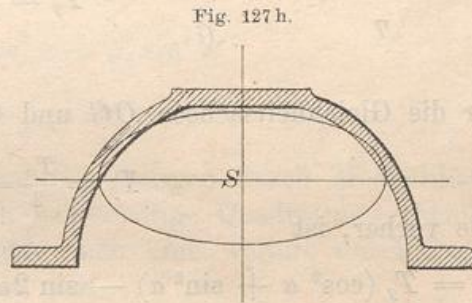
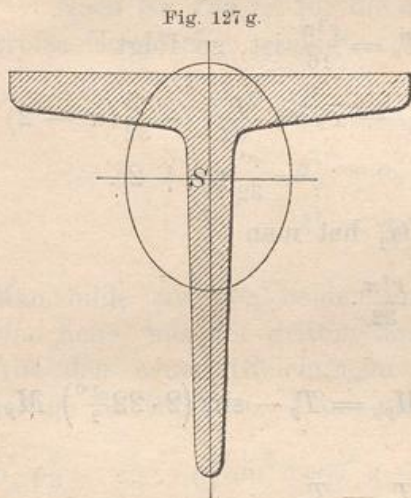


Fig. 127<sup>b</sup> stellt den Querschnitt einer Schiene dar, Fig. 127<sup>c</sup> ein Winkeleisen, Fig. 127<sup>d</sup> ein  $\Gamma$ -Eisen, Fig. 127<sup>e</sup> ein Z-Eisen, Fig. 127<sup>f</sup> ein U-Eisen, Fig. 127<sup>g</sup> ein T-Eisen, Fig. 127<sup>h</sup> ein Quadrant-Eisen, auch Zores-Eisen genannt.

150) **Aufgabe.** Die Grenzträgheitsmomente des Viertelkreises für den Mittelpunkt zu berechnen.

Aus  $T_x = T_y = \frac{r^4 \pi}{16}$  folgt nach der Gleichung

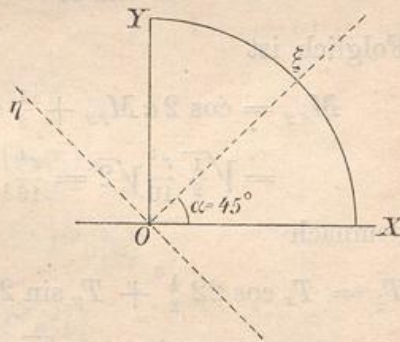
$$T_\alpha = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

für den  $\sphericalangle \alpha = 45^\circ$

$$T_\xi = T_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \sin 2\alpha M_{xy} = T_x - \sin 2\alpha M_{xy}.$$

Nun ist aber  $M_{xy} = \frac{r^4}{8}$ , folglich

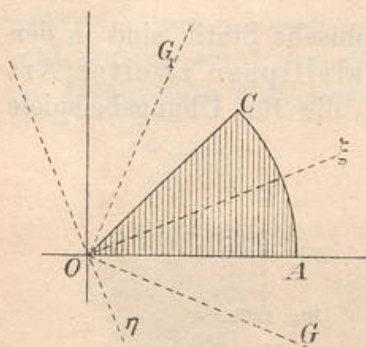
Fig. 128.



$$T_{\xi} = \frac{r^4 \pi}{16} - \sin(2 \cdot 45^\circ) M_{xy} = \frac{r^4 \pi}{16} - \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{16} (\pi - 2) = T_{\min},$$

$$T_{\eta} = \frac{r^4 \pi}{16} - \sin(-90^\circ) M_{xy} = \frac{r^4 \pi}{16} + \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{16} (\pi + 2) = T_{\max}.$$

Fig. 129.



151) Aufgabe. Dasselbe für den Achtelkreis.

Nach vorigem Abschnitt folgt aus  $T_{\xi}$  für  $T_x$  die Hälfte, also

$$T_x = \frac{r^4}{32} (\pi - 2).$$

Da aber  $T_p = \frac{r^4 \pi}{16}$  ist, so folgt

$$T_y = T_p - T_x = \frac{2r^4 \pi}{32} - \frac{r^4}{32} (\pi - 2)$$

$$= \frac{r^4}{32} (\pi + 2).$$

Für die Gleichheitsachsen  $OG$  und  $OG_1$  hat man

$$T_g = \frac{T_p}{2} = \frac{r^4 \pi}{32}.$$

Wie vorher, ist

$$T_x = T_g (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \sin 2\alpha M_{gg} = T_g - \sin(2 \cdot 22 \frac{1}{2}^\circ) M_{gg},$$

folglich

$$M_{gg} \sin 45^\circ = T_g - T_x$$

und das Maximum des Centrifugalmomentes für  $O$

$$M_{gg} = \frac{T_g - T_x}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{r^4 \pi}{32} - \frac{r^4}{32} (\pi - 2)}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{r^4}{16} \sqrt{2}.$$

Folglich ist

$$M_{xy} = \cos 2\alpha M_{gg} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (T_g - T_g) = \cos 45^\circ \cdot \frac{r^4}{16} \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{r^4}{16} \sqrt{2} = \frac{r^4}{16},$$

demnach

$$T_{\xi} = T_x \cos 22 \frac{1}{2}^\circ + T_y \sin 22 \frac{1}{2}^\circ - \sin 45^\circ M_{xy} = \frac{r^4}{32} (\pi - 2) \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$+ \frac{r^4}{32} (\pi + 2) \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{r^4}{16} = \frac{r^4 \pi}{32} - \frac{r^4}{16} \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{r^4}{16} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{r^4 \pi}{32} - \frac{r^4 \pi}{8} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{r^4}{32} (\pi - 2\sqrt{2}) = T_{\min},$$

dagegen

$$I_p - I_{\min} = \frac{2r^4\pi}{32} - \frac{r^4}{32}(\pi - 2\sqrt{2}) = \frac{r^4}{32}(\pi + 2\sqrt{2}) = I_{\max}.$$

Diese Resultate werden sich später in einer allgemeinen Formel bestätigen.

152) Eine brauchbare Beziehung zwischen dem Trägheitsmoment und dem Centrifugalmoment ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Nach Nr. 133 ist für die um  $\alpha$  und die um  $\beta = \alpha + 90^\circ$  gegen die große Hauptachse geneigten Achsen

$$q_\alpha^2 = q_2^2 \sin^2 \alpha + q_1^2 \cos^2 \alpha$$

$$q_\beta^2 = q_2^2 \cos^2 \alpha + q_1^2 \sin^2 \alpha$$

$$\lambda^2 = (q_2^2 - q_1^2) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Man bilde aus den beiden ersten Gleichungen durch Multiplikation eine neue, aus der dritten durch beiderseitige Quadrierung ebenfalls. Aus den neuen Gleichungen bilde man eine weitere durch beiderseitige Subtraktion. Dann erhält man

$$\begin{aligned} q_\alpha^2 q_\beta^2 - \lambda^4 &= q_2^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + q_2^2 q_1^2 (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + q_1^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &\quad - [q_2^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2q_2^2 q_1^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + q_1^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] \\ &= q_1^2 q_2^2 (\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ &= q_1^2 q_2^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = q_1^2 q_2^2. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\lambda^4 = q_\alpha^2 q_\beta^2 - q_1^2 q_2^2$$

oder

$$\lambda^4 = (q_\alpha q_\beta)^2 - (q_1 q_2)^2.$$

Daraus folgt z. B.

$$F^2 \lambda^4 = F q_\alpha^2 \cdot F q_\beta^2 - F^2 q_1^2 q_2^2$$

oder

$$M_{xy}^2 = T_\alpha T_\beta - F^2 q_1^2 q_2^2.$$

Von der letzteren Beziehung soll später eine wichtige Anwendung gemacht werden.

153) Zu den rein mathematischen Aufgaben, die durch die Ergebnisse der vorstehenden Abschnitte lösbar geworden sind, gehören solche über ganz beliebig abgeschrägte Körper, z. B. folgende: Der Normalschnitt eines Körpers sei ein Halbkreis, der Körper werde durch eine ganz beliebige Ebene abgeschragt. Sein Schwerpunkt soll bestimmt werden. Dasselbe ist für den Fall zu leisten, daß er oben und unten durch ganz willkürlich geneigte Ebenen abgeschragt wird. Aufgaben physikalischer Art wurden bereits mehrfach angedeutet.

Nach Nr. 133 ist für die am  $a$  und die um  $a + 2b$  gegen die große Hauptachse geneigten Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  die

$$e^2 = a^2 \sin^2 \alpha + 2ab \sin \alpha \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha$$

$$e^2 = a^2 \sin^2 \beta + 2ab \sin \beta \cos \beta + b^2 \cos^2 \beta$$

Man bilde aus den beiden ersten Gleichungen durch Multiplikation eine neue, aus der dritten durch Addition der beiden ersten. Aus den neuen Gleichungen bilde man eine weitere durch beiderseitige Subtraktion. Dann erhält man

$$e^2 \cos^2 \alpha - e^2 \cos^2 \beta = a^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \cos^2 \beta) + 2ab (\sin \alpha \cos^3 \alpha - \sin \beta \cos^3 \beta) + b^2 (\cos^4 \alpha - \cos^4 \beta)$$

Dannach ist

$$e^2 \cos^2 \alpha - e^2 \cos^2 \beta = a^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \cos^2 \beta) + 2ab (\sin \alpha \cos^3 \alpha - \sin \beta \cos^3 \beta) + b^2 (\cos^4 \alpha - \cos^4 \beta)$$

oder

$$\lambda^2 = (e \cos \alpha)^2 - (e \cos \beta)^2$$

Daraus folgt  $\lambda = B$

$$F^2 \lambda^2 = F^2 \cos^2 \alpha - F^2 \cos^2 \beta$$

$$M^2 = T^2 \lambda^2 - F^2 \cos^2 \beta$$

Von dieser letzten Beziehung soll weiter eine wichtige Anwendung gemacht werden.