



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Abschnitt V. Einige Hilfsmittel der Elementarmathematik. (Methode der unendlich dünnen Schichten.)

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

## Abschnitt V.

### Einige Hilfsmittel der Elementar-Mathematik.

(Methode der unendlich dünnen Schichten.)

154) Bisher kamen nur mathematische Vorkenntnisse zur Anwendung, die auf sämtlichen höheren Schulen erworben werden können. (Höchstens die Guldinsche Formel ist hier und dort noch vom Gymnasium ausgeschlossen.) Von jetzt ab sollen Fortschritte dadurch erzielt werden, daß auch die Newton-Simpsonsche Regel, die Schichtenformel oder Summenformel für ganze positive Exponenten und die Schichtenformel für gebrochene und für negative Exponenten zur Anwendung gelangen. In dem Methodischen Lehrbuche des Verfassers über die Elementarmathematik ist das Nötigste darüber gesagt, auch sind dort zahlreiche Beispiele gegeben, besonders im dritten Teile. Für Nichtbesitzer des Buches sei das Nötigste auch hier auszugsweise dargestellt. Jede der drei Formeln ist ein förmlicher Hebel der Elementarmathematik, mit dessen Hilfe weite Gebiete der Technik bezwungen werden können. Zum Schluß soll noch die erweiterte Simpsonregel für angenäherte Berechnungen erörtert werden.

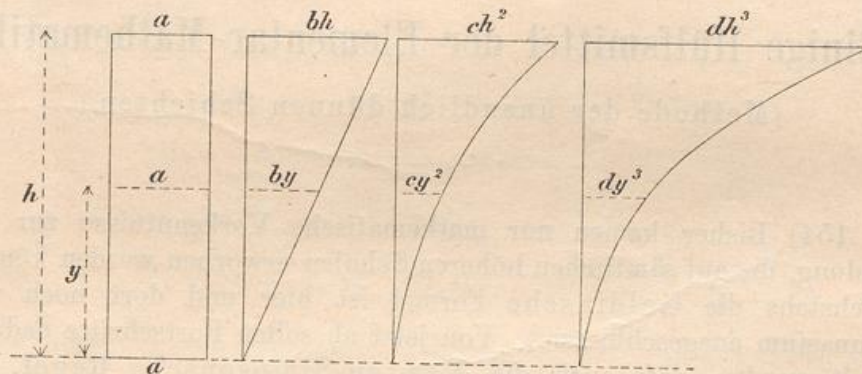
#### A. Die Newton-Simpsonsche Regel für Körper und Flächen und die Schichtenformel für Querschnitte bis zur dritten Ordnung.

155) Fig. 130 stellt den Aufrifs von vier Körpern gleicher Höhe dar. Der erste sei ein Prisma oder ein Cylinder, dessen Querschnittsfläche überall gleich  $a$  ist. Sein Inhalt ist  $ah$ . Der zweite sei ein Dreieckskörper, dessen Querschnittsfläche in jeder Höhe  $y$  gleich  $by$  sei, also in der Höhe  $h$  gleich  $bh$ . Sein Inhalt ist  $\frac{bh^2}{2}$ . Bei dem dritten nehme die Querschnittsfläche zu, wie bei einem geraden Kreiskegel oder einer geraden Pyramide, die auf die Spitze gestellt sind, d. h. die Querschnittsfläche soll proportional dem Quadrate der Höhe sein,



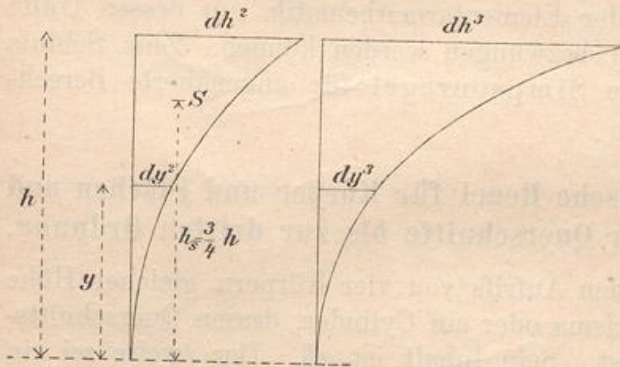
z. B. gleich  $cy^2$  in jeder Höhe  $y$ , gleich  $ch^2$  in der Höhe  $h$ . In der Zeichnung ist der Körper so gedacht, daß er als gerade Säule über der Zeichnungsebene steht und zwar über der gezeichneten Fläche, die nach dem Früheren auf der einen Seite parabolisch begrenzt sein muß. Der gezeichnete Körper, und der mit ihm verglichene Kegel, bzw. die mit ihm verglichene Pyramide haben sämtlich die Höhe  $h$  und die Grundfläche  $ch^2$ , ihre Querschnittsflächen sind in gleichen

Fig. 130.



Höhen inhaltsgleich, folglich stimmen nach Cavalieri auch die körperlichen Inhalte überein. Jeder ist also, wie die Pyramide, vom Inhalt  $G \frac{h}{3}$  oder  $\frac{ch^3}{3}$ . (Die Parabel schneidet vom Rechteck den dritten Teil ab.) Bei dem vierten Körper sei die Querschnittsfläche proportional

Fig. 131.



der 3<sup>ten</sup> Potenz der Höhe, und zwar soll den Höhen  $y$  und  $h$  bzw.  $dy^3$  bzw.  $dh^3$  entsprechen. Daß er den Inhalt  $\frac{dh^4}{4}$  hat, läßt sich folgendermaßen zeigen: Figur 131 stellt den dritten und vierten Körper noch einmal dar, nur ist beim dritten  $d$  statt  $c$  geschrieben.

Nach Cavalieri liegt bei dem letzteren der Schwerpunkt, wie bei der Pyramide, in der Höhe  $\frac{3}{4}h$ . Das statische Moment des Körpers in Bezug auf die Grundfläche ist also  $M = J \frac{3}{4}h = \frac{dh^3}{3} \frac{3}{4}h = \frac{dh^4}{4}$ .

Das statische Moment der Fläche  $dy^2$  in Bezug auf die Grund-



fläche ist aber  $dy^2 \cdot y = dy^3$ , das der obersten Fläche  $dh^2 \cdot h = dh^3$ , und gerade so groß sind die entsprechenden Querschnittsflächen des daneben stehenden Körpers. Weil nun die Maßzahlen für die Querschnittsflächen des letzteren ebenso groß sind, wie die Maßzahlen der statischen Momente für die Flächen des vorigen, so muß die Maßzahl für den Inhalt des letzten Körpers dieselbe sein, wie die Maßzahl für das statische Moment des vorigen, nämlich  $\frac{dh^4}{4}$ .

So hat man zunächst folgenden Satz:

Ist der Querschnitt eines Körpers in jeder Höhe  $y$  von der Form  $q = a$ , oder  $q = by$ , oder  $q = cy^2$ , oder  $q = dy^3$ , so ist der Inhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe  $h$  genommen  $J = ah$  bzw.  $J = \frac{bh^2}{2}$ ,  $J = \frac{ch^3}{3}$ ,  $J = \frac{dh^4}{4}$ . Es wird sich unten zeigen, daß man ganz allgemein für jedes positive  $p$  sagen kann, zum Querschnitte  $q = ky^p$  gehöre der Inhalt  $J = \frac{kh^{p+1}}{p+1}$ .

Weil jede von diesen Formeln durch Betrachtung der Querschnittsflächen oder besser der unendlich dünnen Schichten gewonnen wird, deren Summe den körperlichen Inhalt giebt, kann man jede als eine Schichtenformel oder Summenformel bezeichnen.

156) Was von den vier gezeichneten Körpern gilt, gilt auch von ihren Aufrisflächen in Fig. 132. Also:

Ist die Querlinie einer ebenen Fläche in jeder Höhe  $y$  von der Länge  $q = a$ , oder  $q = by$  oder  $q = cy^2$  oder  $q = dy^3$ , so ist der Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe  $h$  genommen  $F = ah$  bzw.  $F = \frac{bh^2}{2}$ ,  $F = \frac{ch^3}{3}$ ,  $F = \frac{dh^4}{4}$ .

Mit anderen Worten: Die Parabel 0<sup>ter</sup>, 1<sup>ter</sup>, 2<sup>ter</sup>, 3<sup>ter</sup> Ordnung schneidet vom Rechteck den 1<sup>ten</sup>, 2<sup>ten</sup>, 3<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup> Teil ab  $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ . Hier sind also zwei Gerade als Parabeln 0<sup>ter</sup> bzw. 1<sup>ter</sup> Ordnung bezeichnet worden.

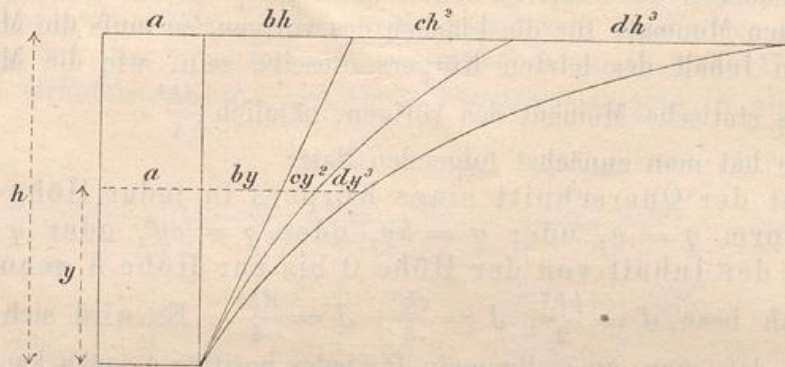
Dies gilt auch dann, wenn man jeden Querschnitt in seinem Niveau irgendwie verschiebt. So kann z. B. die linke Grenzlinie auch eine schräge Gerade, oder eine Parabel 2<sup>ter</sup> oder 3<sup>ter</sup> Ordnung sein, an die sich dann die horizontalen Schnitte anzulegen haben. Dadurch wird nun die folgende Betrachtung ermöglicht.

157) Denkt man sich die in gleichen Höhen liegenden Schichten der vier Körper vereinigt, so entsteht ein Körper, dessen Querschnittsfläche in jeder Höhe  $y$  ist  $q = a + by + cy^2 + dy^3$ . Sein Inhalt aber muß sein  $J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$ .



Nach Cavalieri muß dieses Resultat allgemeine Geltung haben. So erhält man den

Fig. 132.



Satz: Hat ein Körper in jeder Höhe  $y$  den Querschnitt

$$1) \quad q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist sein Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe  $h$  gerechnet

$$2) \quad J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

158) Ebenso gilt der

Satz: Hat eine ebene Fläche in jeder Höhe  $y$  die Querlinie

$$1) \quad q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist ihr Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe  $h$  gerechnet

$$2) \quad F = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

Jede Formel 2) soll als die Schichtenformel (Summenformel) für Körper bzw. Flächen bis zur dritten Ordnung bezeichnet werden.

159) Es läßt sich nun zeigen, daß damit auch die Simpson-Newton'sche Regel bewiesen ist, welche lautet:

Hat ein Körper in jeder Höhe  $y$  die Querschnittsfläche

$$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist sein Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe  $h$  berechnet



$$J = \frac{h}{6} [U + O + 4M],$$

wo  $U$  den Unterschnitt,  $O$  den Oberschnitt,  $M$  den Mittelschnitt bedeutet.

**Beweis.** In Fig. 132 ist der Unterschnitt, d. h. der Schnitt für die Höhe  $y = 0$ ,  $U = a$ , der Oberschnitt  $O = a + bh + ch^2 + dh^3$ , der Mittelschnitt  $M = a + b \frac{h}{2} + c \left(\frac{h}{2}\right)^2 + d \left(\frac{h}{2}\right)^3 = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}$ .

Setzt man dies in  $\frac{h}{6} [U + O + 4M]$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{h}{6} \left[ a + (a + bh + ch^2 + dh^3) + 4 \left( a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8} \right) \right] \\ = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}. \end{aligned}$$

Letzteres ist aber nach Nr. 157 der Inhalt  $J$ , folglich ist

$$\frac{h}{6} [U + O + 4M] = J.$$

160) Ebenso gilt für Flächen der Satz:

Hat eine Fläche in jeder Höhe  $y$  eine Querlinie von der Länge

$$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist ihr Inhalt, von der Höhe Null bis zur Höhe  $h$  gerechnet,

$$F = \frac{h}{6} [u + o + 4m],$$

wo  $u$  die unterste,  $o$  die oberste,  $m$  die in halber Höhe liegende Querlinie bedeutet.

161) Selbstverständlich können bei beiden Sätzen beliebig viele der Faktoren  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  gleich Null sein. Demnach wird bald die Schichtenformel, bald die Simpsonsche Regel das Bequemere sein.

Während, wie sich zeigen wird, die Schichtenformel über die 3<sup>te</sup> Ordnung hinaus weiter gilt, ist dies bei der Simpsonregel nicht der Fall. Diese gilt z. B. nicht mehr für den Körper mit Querschnittsformel  $q = dy^4$ . Bei diesem würde sie geben

$$J = \frac{h}{6} \left[ 0 + dh^4 + 4 \left( \frac{d}{2} \right)^4 \right] = \frac{h}{6} \left[ dh^4 + \frac{dh^4}{4} \right] = \frac{5}{24} dh^5,$$

was falsch ist, da nach der später zu beweisenden richtigen Formel  $\frac{dh^5}{5}$  oder  $\frac{5}{25} dh^5$  herauskommen müßte. Hier also könnte die Simpson-Newton'sche Regel höchstens als rohe Annäherungsformel gebraucht werden.



Sobald es sich um ganze positive Exponenten handelt und in der Querschnittsformel der dritte Grad nicht überstiegen wird, kann die Simpsonsche Regel angewandt werden, sonst ist ihre Anwendung nicht zulässig.

162) Bezüglich der Summenformel ist noch Folgendes zu bemerken.  
Aus

$$\overset{h_2}{F}_0 = \frac{ah_2}{1} + \frac{bh_2^2}{2} + \frac{ch_2^3}{3} + \frac{dh_2^4}{4}$$

und

$$\overset{h_1}{F}_0 = \frac{ah_1}{1} + \frac{bh_1^2}{2} + \frac{ch_1^3}{3} + \frac{dh_1^4}{4}$$

folgt durch beiderseitige Subtraktion als Fläche von  $h_1$  bis  $h_2$

$$\overset{h_2}{F}_{h_1} = \frac{a(h_2 - h_1)}{1} + \frac{b(h_2^2 - h_1^2)}{2} + \frac{c(h_2^3 - h_1^3)}{3} + \frac{d(h_2^4 - h_1^4)}{4},$$

wofür man wohl auch abgekürzt schreibt

$$\overset{h_2}{F}_{h_1} = \left| \begin{array}{c} y = h_2 \\ \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4} \\ y = h_1 \end{array} \right|.$$

Damit werden die Parallelschichten der entsprechenden Körper und Flächen in der Regel bequemer, als mit der Simpsonschen Regel, berechnet, weil bei dieser der Mittelschnitt besonderer Berechnung bedarf, die hier überflüssig ist.

Für die einfachen Parabeln bis zur dritten Ordnung sind die entsprechenden Inhaltsformeln:

$$\overset{h_2}{F}_{h_1} = a \frac{h_2 - h_1}{1}, \quad \overset{h_2}{F}_{h_1} = b \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}, \quad \overset{h_2}{F}_{h_1} = c \frac{h_2^3 - h_1^3}{3}, \quad \overset{h_2}{F}_{h_1} = d \frac{h_2^4 - h_1^4}{4}.$$

163) Die Anwendungen auf Flächen sind znnächst von geringerer Bedeutung. Dagegen lassen sich, wie im 2<sup>ten</sup> und 3<sup>ten</sup> Bande des Methodischen Lehrbuchs gezeigt wird, zahlreiche Körper auf dem vorgeschlagenen Wege berechnen. Von dem Prisma, dem Dachkörper und der Pyramide abgesehen, handelt es sich z. B. um Pyramidenstumpf, Kegelstumpf, Prisma mit ebenen und windschiefen Seitenflächen, mit geradlinig oder krummlinig begrenzten Grundflächen, um die Kugel mit ihren Segmenten und Parallelschichten, das Drehungsellipsoid und dreiachsige Ellipsoid mit Segmenten und Parallelschichten, um die Parallelschichten des einmanteligen Drehungshyperboloids und des einmanteligen dreiachsigen Hyperboloids, um die Segmente und Schichten des zweimanteligen Hyperboloids und um einige Arten von Drehungsparaboloiden höherer Ordnung.



164) Die Formeln lassen aber noch anderweitige Deutungen zu.

Ist

$$1) \quad q = a + by + cy^2 + dy^3$$

das statische Moment des Flächen- oder Körperquerschnitts in Bezug auf die Basis, so ist

$$2) \quad \frac{M}{0} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

das gesamte statische Moment der Fläche, von 0 bis  $h$  genommen.

Ist 1) die Formel für das Trägheitsmoment der Fläche oder des Körpers in Bezug auf die Basis, so ist

$$3) \quad \frac{T}{0} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

das gesamte Trägheitsmoment in Bezug auf die Basis.

Ist 1) die Formel für den Querschnitt des Arbeitsdiagramms, bedeutet es also die Größe der Kraft an der Stelle  $y$ , so ist

$$4) \quad \frac{A}{0} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

die gesamte Arbeit längs des Weges 0 bis  $h$ .

Ist 1) das Gewicht des Querschnitts in der Höhe  $y$ , so ist das Gesamtgewicht

$$5) \quad \frac{P}{0} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

165) Beispiel des Trapezes.

Der Querschnitt in Höhe  $y$  ist für das nebenstehende Trapez

$$1) \quad x = b + \frac{b_1 - b}{h} y,$$

wie sich aus der Zerlegung in Parallelogramm (Rechteck) und Dreieck ergibt.

Das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die Grundlinie ist

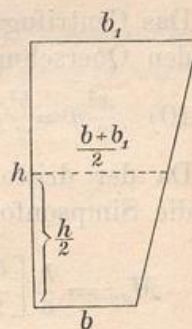
$$2) \quad xy = by + \frac{b_1 - b}{h} y^2,$$

das entsprechende Trägheitsmoment

$$3) \quad xy^2 = by^2 + \frac{b_1 - b}{h} y^3.$$

Da keine dieser Querschnittsformeln den dritten Grad übersteigt, so darf auf sämtliche die Simpsonsche Formel angewandt werden. Die Fläche wird nach 1)

Fig. 132b.





$$4) \quad F = \frac{h}{6} \left[ b + b_1 + 4 \frac{b + b_1}{2} \right] = \frac{h}{6} [3b + 3b_1] = \frac{h}{2} (b + b_1).$$

Das statische Moment wird

$$5) \quad M_u = \frac{h}{6} \left[ b \cdot 0 + b_1 h + 4 \frac{b + b_1}{2} \frac{h}{2} \right] = \frac{h^2}{6} [b_1 + (b + b_1)] = \frac{h^2}{6} (b + 2b_1).$$

Das Trägheitsmoment der Fläche wird

$$6) \quad T_u = \frac{h}{6} \left[ b \cdot 0^2 + b_1 h^2 + 4 \frac{b + b_1}{2} \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] = \frac{h^3}{6} \left[ b_1 + \frac{b + b_1}{2} \right] = \frac{h^3}{12} [b + 3b_1].$$

Daraus ergibt sich die Schwerpunkthöhe

$$7) \quad h_s = \frac{M_u}{F} = \frac{h (b + 2b_1)}{3 (b + b_1)},$$

der Trägheitsradius in Bezug auf die X-Achse

$$8) \quad \rho_x = \sqrt{\frac{T_u}{F}} = h \sqrt{\frac{b + 3b}{6 (b + b_1)}},$$

die Höhe des Schwingungspunktes bei Drehung um dieselbe Achse

$$9) \quad h_m = \frac{T_u}{M_u} = \frac{h (b + 3b_1)}{2 (b + 2b_1)}.$$

Einfacher würde die Summenformel aus 1) geben:

$$\frac{h}{0} = \frac{bh}{1} + \frac{b_1 - b}{h} \frac{h^2}{2} = h \frac{b + b_1}{2}.$$

Aus 2) würde folgen

$$M_u = \frac{bh^2}{2} + \frac{b_1 - b}{h} \frac{h^3}{3} = \frac{h^2}{6} (b + 2b_1).$$

Aus 3) erhält man

$$T_u = \frac{bh^3}{3} + \frac{b_1 - b}{h} \frac{h^4}{4} = \frac{h^3}{12} (b + 3b_1).$$

Das Centrifugalmoment in Bezug auf die Geraden  $b$  und  $h$  würde für den Querschnitt werden

$$10) \quad \frac{x^2}{2} y = \frac{b^2}{2} y + 2 \frac{b_1 - b}{h} \frac{by^2}{2} + \frac{(b_1 - b)^2}{h^2} \frac{y^3}{2} = \frac{b^2}{2} y + \frac{bb_1 - b^2}{h} y^2 + \frac{(b_1 - b)^2}{h^2} \frac{y^3}{2}.$$

Da der dritte Grad nicht überstiegen wird, liesse sich auch hierauf die Simpsonformel anwenden. Sie würde geben

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{h}{6} \left[ \frac{b^2}{2} 0 + \frac{b_1^2}{2} h + \frac{4}{2} \left( \frac{b + b_1}{2} \right)^2 \frac{h}{2} \right] = \frac{h}{6} \left[ \frac{b_1^2}{2} h + \frac{(b + b_1)^2 h}{4} \right] \\ &= \frac{h^2}{24} [2b_1^2 + b^2 + 2bb_1 + b_1^2] \end{aligned}$$

oder

$$11) \quad M_{xy} = \frac{h^2}{24} [b^2 + 2bb_1 + 3b_1^2].$$



Die Schichtenformel würde geben

$$\frac{b^2 h^2}{2 \cdot 2} + \frac{bb_1 - b^2 h^3}{h \cdot 3} + \frac{(b_1 - b)^2 h^4}{h^2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{h^2}{24} [6b^2 + 8bb_1 - 8b^2 + 3b_1^2 + 3b^2 - 6bb_1]$$

oder

$$M_{xy} = \frac{h^2}{24} [b^2 + 2bb_1 + 3b_1^2].$$

166) Beispiel der Parabel  $x = \frac{cy^2}{h^2}$ .

Das statische Moment und das Trägheitsmoment des Querschnitts würde für die Grundfläche werden  $\frac{cy^3}{h^2}$ ,  $\frac{cy^4}{h^2}$ , das Centrifugalmoment würde sein  $\frac{x^2}{2} y = \frac{c^2 y^4}{h^4} \frac{y}{2} = \frac{c^2 y^5}{2h^4}$ . Die Simpsonsche Regel ist also hier nur für die Berechnung der Fläche und des statischen Momentes zu gebrauchen, denn alles Übrige übersteigt den dritten Grad. Das Resultat würde werden

$$F = \frac{h}{6} [0 + c + 4 \frac{c}{4}] = \frac{2}{3} ch; \quad M_u = \frac{h}{6} [0 \cdot 0 + ch + 4 \frac{c}{4} \frac{h}{2}] = \frac{ch^2}{4}.$$

Die übrigen Dinge können erst im Abschnitt B behandelt werden.

167) Die Gleichung einer Kurve sei

$$x^2 = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Der durch Drehung um die Y-Achse aus ihr entstehende Körper hat die Querschnittsformel

$$q_y = x^2 \pi = a\pi + b\pi y + c\pi y^2 + d\pi y^3.$$

Da der dritte Grad nicht überstiegen wird, kann sowohl die Simpsonsche Regel als auch die Summenformel angewandt werden. Der Inhalt wird

$$J = \pi \left[ \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} \right].$$

Im besonderen Falle  $x^2 = dy^3$  handelt es sich um die sogenannte semikubische oder Neilsche Parabel. Die allgemeinere Curve wird bisweilen als Neiloide bezeichnet, während andere den entsprechenden Drehungskörper mit dem Namen Neiloid belegen.

168) Ist die Gleichung von der Form

$$x^2 = a + by + cy^2,$$

so erhält der Drehungskörper den Inhalt

$$J = \pi \left[ \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} \right].$$

Der Querschnitt hat in Bezug auf die Grundfläche das statische Moment



$$x^2 y = \pi (ay + by^2 + cy^3),$$

demnach ist die Simpsonsche Regel anwendbar auf die Berechnung des statischen Momentes

$$M_u = \pi \left( \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} \right).$$

Ist endlich die Curvengleichung von der Form

$$x^2 = a + by,$$

so läßt sich auch das Trägheitsmoment  $T_u$  des Drehungskörpers mit Hilfe jener Regel berechnen. Die Resultate werden

$$J = \pi \left( \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} \right), \quad M_u = \pi \left( \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} \right), \quad T_u = \pi \left( \frac{ah}{3} + \frac{bh^4}{4} \right).$$

Die angegebenen Beschränkungen, die z. B. die Anwendung auf das Trägheitsmoment der Kugel ausschließen, lassen die Ausdehnung der Schichtenformel auf höhere Potenzen als wünschenswert erscheinen. Diese soll in Abschnitt B. durchgeführt werden.

169) Noch sei darauf aufmerksam gemacht, daß bei der Curvengleichung  $x = \frac{1}{y}$  das statische Moment des Querschnitts

$$xy = \frac{1}{y} y = 1,$$

sein Trägheitsmoment  $xy^2 = \frac{1}{y} y^2 = y$  wird, so daß sich für die beiden letzten die Simpsonsche Regel anwenden läßt. Bei der Gleichung  $x = \frac{1}{y^2}$ , die dem Gravitationsgesetze entspricht, ist das Trägheitsmoment des Querschnitts der Diagrammkurve

$$xy^2 = \frac{1}{y^2} \cdot y^2 = 1$$

der entsprechenden Behandlung zugänglich.

170) Eine weitere Deutung ergibt sich folgendermaßen:

Die Gleichung einer Kurve sei

$$x = k + \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4}.$$

In der Höhe  $y$  hat sie eine Tangente, die gegen die  $Y$ -Achse eine gewisse Neigung  $\alpha$  hat. Diese berechnet sich nach dem Anhang von Teil 3 des Methodischen Lehrbuchs Seite 132 nach der Formel

$$\tan \alpha = a + \frac{2by}{2} + \frac{3cy^2}{3} + \frac{4dy^3}{4}$$



oder nach

$$\tan \alpha = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Folglich: Deutet man die Gleichung

$$1) \quad q = a + by + cy^2 + dy^3$$

als die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels, den die geometrische Tangente einer gewissen Kurve in der Höhe  $y$  genommen gegen die  $Y$ -Achse hat, so ist die Gleichung der Kurve

$$x = \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4}.$$

Hierzu kann aber noch eine Konstante  $k$  kommen, deren Gröfse nur von der Wahl des Niveaus für die  $X$ -Achse abhängt, die also für die Gestalt der Kurve ohne Bedeutung ist.

### B. Die Schichtenformel für ganze positive Exponenten von beliebiger Gröfse.

171) Figur 133 stelle eine Parabel ganzzahliger Ordnung dar, die einem Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $h$  eingeschrieben ist. Ihre Gleichung sei

$$x = \frac{b}{h^p} y^p,$$

was für  $y = 0$  den Querschnitt 0, für  $x = h$  den Querschnitt

$$\frac{b}{h^p} h^p = b$$

gibt, wie es nach der Figur auch sein muß.

Man denke sich die Höhe  $h$  in  $n$  gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte Parallele gelegt. Die Streifen mögen, wie in der Figur, zu Rechtecken ergänzt werden. Jedes dieser Rechtecke

hat die Höhe  $\frac{h}{n}$ , die Grundlinien aber sind nach der Formel  $x = \frac{b}{h^p} y^p$  der Reihe nach

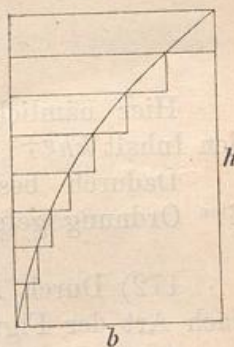
$$\frac{b}{h^p} \left(\frac{h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p} \left(\frac{2h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p} \left(\frac{3h}{n}\right)^p, \quad \dots, \quad \frac{b}{h^p} \left(\frac{nh}{n}\right)^p$$

oder

$$\frac{1^p}{n^p} b, \quad \frac{2^p}{n^p} b, \quad \frac{3^p}{n^p} b, \quad \dots, \quad \frac{n^p}{n^p} b,$$

so dafs die Summe der Rechtecksinhalte wird

Fig. 133.





$$\frac{h}{n} \frac{1^p}{n^p} b + \frac{h}{n} \frac{2^p}{n^p} b + \frac{h}{n} \frac{3^p}{n^p} b + \dots + \frac{h}{n} \frac{n^p}{n^p} b$$

oder

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} bh.$$

Macht man nun  $n$  unendlich groß, die Höhe der Streifen also unendlich klein, so fallen erstens die störenden Treppenträume weg, zweitens wird nach Band II des Methodischen Lehrbuchs, Arithm. Nr. 38,

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \quad \text{für } n = \infty$$

und demnach wird die schraffierte Fläche von der Höhe 0 bis zur Höhe  $h$

$$\int_0^h F = \frac{bh}{p+1}.$$

Also: Die Parabel  $p^{\text{ter}}$  Ordnung  $x = \frac{b}{h^p} y^p$  schneidet von dem zugehörigen Rechteck den  $(p+1)^{\text{ten}}$  Teil, d. h. die Fläche  $\frac{bh}{p+1}$  ab.

Folglich: Die Parabel  $p^{\text{ter}}$  Ordnung  $x = ky^p$  hat von der Höhe 0 bis zur Höhe  $h$  den Inhalt

$$\int_0^h F = k \frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

Hier nämlich würde das Rechteck die Seiten  $h$  und  $kh^p$ , also den Inhalt  $kh^{p+1}$  haben, von dem der  $(p+1)^{\text{te}}$  Teil abgeschnitten ist. Dadurch bestätigen sich zunächst die schon vorher bis zur 3<sup>ten</sup> Ordnung gefundenen Resultate.

172) Durch Aneinandersetzen der Streifen parabolischer Flächen nach Art der Figur 132 erhält man folgende allgemeine Sätze:

**Satz:** Berechnet sich die Querlinie einer ebenen Fläche für jede Höhe  $y$  nach der Formel

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots + ky^p,$$

so ist ihr Inhalt, von der Höhe  $y = 0$  bis zur Höhe  $y = h$  gerechnet,

$$\int_0^h F = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \dots + k \frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

**Satz:** Berechnet sich die Querschnittsfläche eines Körpers für jede Höhe  $y$  nach der Formel



$$q = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots + ky^p$$

so ist sein Inhalt, von der Höhe  $y = 0$  bis zur Höhe  $y = h$  gerechnet,

$$\int_0^h = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \dots + k \frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

173) Durch diese Formel wird ein Bereich beherrscht, der weit über den der Simpsonschen Regel hinausgeht. Die Zahl der Glieder darf unter gewissen Bedingungen sogar bis ins Unendliche gehen.

Ist z. B. der Querschnitt durch folgende unendliche Reihe dargestellt

$$1) \quad q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \dots \text{ in infinitum,}$$

so folgt daraus

$$2) \quad \int_0^h = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \frac{eh^5}{5} + \dots \text{ in infinitum,}$$

nur muß der Konvergenzbereich beider Reihen eingehalten werden.

Die Formeln können auf alle Funktionen angewandt werden, die sich in konvergenten Potenzreihen entwickeln lassen.

Dies gilt z. B. von der geometrischen Reihe, also von der Kurve

$$x = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots \quad \text{für } y \text{ absolut } < 1,$$

von der Exponentialreihe, also von der logarithmischen Linie

$$x = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

und zwar für jedes  $y$ ; ferner von der logarithmischen Linie

$$x = \text{elg } y = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \dots \quad \text{für } y \text{ absolut } < 1,$$

von der Kettenlinie

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 1 + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{y^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots,$$

von der Sinuskurve

$$x = \sin y = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots,$$

von Kurven, deren Gleichung mit dem binomischen Lehrsatz zusammenhängt, wie

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2}y^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \dots \end{aligned}$$

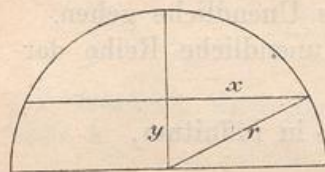
für  $y$  absolut  $< 1$ .



Diese Bemerkungen mögen vorläufig hinreichen, von der weitgehenden Bedeutung des Verfahrens ein Bild zu geben, denn die obigen Deutungen bleiben hier sämtlich erhalten. Einige Beispiele werden die Sache näher erläutern.

174) Anwendungen auf die Halbkugel und die ganze Kugel.

Fig. 134.



Inhalt der Halbkugel

a) Inhaltsberechnung. Der Schnitt in Höhe  $y$  ist

$$q = x^2 \pi = (r^2 - y^2) \pi = r^2 \pi - y^2 \pi.$$

Folglich: Inhalt der Schicht von 0 bis  $y_1$  ist

$$J_0^{y_1} = \frac{r^2 \pi y_1}{1} - \frac{\pi y_1^3}{3} = \frac{y_1 \pi}{3} (r^2 - y_1^2),$$

$$J_0^r = r^2 \pi \frac{r}{1} - \pi \frac{r^3}{3} = \frac{2}{3} r^3 \pi.$$

b) Das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche. Die in Höhe  $y$  befindliche Schicht hatte die Fläche  $x^2 \pi$ , die Multiplikation mit dem Abstände  $y$  giebt  $x^2 y \pi$  oder  $(r^2 - y^2) y \pi = r^2 \pi y - y^3 \pi$ . Aus

$$q = r^2 \pi y - y^3 \pi$$

folgt als statisches Moment der Schicht von 0 bis  $y_1$

$$M_0^{y_1} = r^2 \pi \frac{y_1^2}{2} - \pi \frac{y_1^4}{4} = \frac{y_1^2 \pi}{4} (2r^2 - y_1^2).$$

Das statische Moment der Halbkugel für die Grundfläche ist

$$M_0^r = r^2 \pi \frac{r^2}{2} - \pi \frac{r^4}{4} = \frac{r^4 \pi}{4}.$$

c) Schwerpunktshöhe.

Die Schwerpunktshöhe der Schicht ist

$$h_s = \frac{M_0^{y_1}}{J_0^{y_1}} = \frac{\frac{y_1^2 \pi}{4} (2r^2 - y_1^2)}{\frac{y_1 \pi}{3} (r^2 - y_1^2)} = \frac{3 y_1}{4} \frac{2r^2 - y_1^2}{r^2 - y_1^2}.$$

die Schwerpunktshöhe der Halbkugel

$$h_s = \frac{M_0^r}{J_0^r} = \frac{\frac{r^4 \pi}{4}}{\frac{2}{3} r^3 \pi} = \frac{3}{8} r.$$



d) Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche. Die Schicht in Höhe  $y$  ist mit  $y^2$  zu multiplizieren, wenn man ihr Trägheitsmoment für die Grundfläche erhalten will. Dies giebt

$$q_y = x^2 \pi y^2 = (r^2 - y^2) \pi y^2 = r^2 \pi y^2 - \pi y^4.$$

Das Trägheitsmoment für die Schichten von 0 bis  $y_1$  wird also

$$\overset{y_1}{T}_0 = r^2 \pi \frac{y_1^3}{3} - \pi \frac{y_1^5}{5} = \frac{y_1^3 \pi}{15} (5r^2 - 3y_1^2).$$

Für die Halbkugel selbst wird es

$$\overset{r}{T}_0 = r^2 \pi \frac{r^3}{3} - \pi \frac{r^5}{5} = \frac{2}{15} r^5 \pi.$$

e) Der entsprechende Trägheitsradius. Er bestimmt sich aus der Formel  $y_t^2 J = T$ , also wird er für die Schichten von 0 bis  $y_1$

$$y_t = \sqrt{\frac{\overset{y_1}{T}_0}{\underset{0}{J}_{y_1}}} = \sqrt{\frac{\frac{y_1^3 \pi}{15} (5r^2 - 3y_1^2)}{\frac{y_1 \pi}{3} (r^2 - y_1^2)}} = \sqrt{\frac{3y_1^2 (5r^2 - 3y_1^2)}{15(r^2 - y_1^2)}},$$

für die Halbkugel

$$y_t = \sqrt{\frac{\frac{2}{15} r^5 \pi}{\frac{2}{3} r^3 \pi}} = r \sqrt{\frac{1}{5}}.$$

e) Das Trägheitsmoment der ganzen Kugel in Bezug auf einen Hauptschnitt ist

$$T = \frac{4}{15} r^5 \pi.$$

f) Das axiale Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf einen Durchmesser ist gleich der Summe zweier planer Trägheitsmomente (in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Hauptschnitte), also

$$T_a = \frac{8}{15} r^5 \pi = \left(\frac{4}{3} r^3 \pi\right) \frac{2r^2}{5} = \frac{2r^2}{5} m,$$

wo  $m$  die Masse der Kugel bedeutet.

g) Der axiale Trägheitsradius wird

$$r_t = \sqrt{\frac{T_a}{J}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{15} r^5 \pi}{\frac{4}{3} r^3 \pi}} = r \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

h) Die Energie der homogenen sich drehenden Kugel ist

$$E = \frac{T \vartheta^2}{2} = \frac{2r^2}{5} m \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mr^2 \vartheta^2}{5},$$



wo  $m$  die Masse,  $\vartheta$  die am Radius 1 gemessene Winkelgeschwindigkeit ist. Für den Erdball z. B. ist  $T = \frac{8r^5\pi p'}{15g}$ , wo das spezifische Gewicht  $p' = 5,6$ ,  $g = 9,81$  m und  $r = 860 \cdot 7500$  m angenommen werden kann. Die Umdrehungszeit ist 86 164 Sekunden (Sterntag, nicht Sonntag von 86 400 Sek.), die Winkelgeschwindigkeit also  $\vartheta = \frac{2\pi}{86\,164}$ . Die

Drehungsenergie ist daher  $\frac{1}{2} \frac{8r^5\pi}{15} \frac{5,6}{9,81} \left(\frac{2\pi}{86\,164}\right)^2 = 28\,388 \cdot 10^{21}$  Meter-tonnen =  $28\,388 \cdot 10^{21}$  mkg. Division durch 425 giebt die in dieser Energie enthaltene Anzahl von Wärmeeinheiten, nämlich  $66\,797 \cdot 10^{21}$  W.-E. Angenommen, der Sterntag wäre jetzt  $\frac{1}{81}$  Sekunde länger als vor 2000 Jahren, so wäre die frühere Winkelgeschwindigkeit gewesen  $\vartheta_1 = \frac{2\pi}{86\,163 \frac{80}{81}} = \frac{6\,979\,284}{6\,979\,283} \vartheta^*$ , der Energieverlust also

$$28\,388 \cdot 10^{21} \frac{6\,979\,284^2 - 6\,979\,283^2}{6\,979\,283^2} = 81\,349 \cdot 10^{17} \text{ mkg.}$$

Man kann den mittleren Energieverlust innerhalb der 2000 Jahre auf die Sekunde reduzieren, indem man abgerundet durch  $2000 \cdot 365,25 \cdot 86\,400$  dividiert. Er beträgt auf die Sekunde  $12\,918 \cdot 10^7$  mkg. Division durch 75 giebt  $17\,225 \cdot 10^5$  Pferdestärken, mit denen unter jener bekannten Annahme an der Verlangsamung der Erddrehung gearbeitet wird, und zwar besonders durch den Einfluß der Fluterscheinung. Bei konstanter Wirkung würden zur Erschöpfung der Drehungsenergie  $2000 \frac{28\,388 \cdot 10^{21}}{81\,349 \cdot 10^{17}}$  oder etwa 7000 Millionen Jahre nötig sein (was mit der Probe  $81 \cdot 86\,164$  zusammenstimmt), bei abnehmender Wirkung noch längere Zeit. Die Kleinlichkeit der technischen Masseinheiten im Verhältnis zu kosmischen Erscheinungen tritt bei diesem Übungsbeispiele in überraschender Weise hervor.

i) Die Energie der drehend und fortschreitend bewegten Kugel.

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2\vartheta^2}{5} = \frac{m}{10} (5v^2 + 2r^2\vartheta^2).$$

Man kann also z. B. die gesamte Energie der Erdkugel berechnen.

k) Die Energie der ohne Gleitung rollenden Kugel.

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Tv^2}{2r^2} \\ &= \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5} mr^2 \frac{v^2}{2r^2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{5} mv^2 = \frac{7}{10} mv^2. \end{aligned}$$

\*) Bei Thomson und Tait, deutsch von Helmholtz und Wertheim, steht irrtümlich  $\frac{1}{2\,700\,000}$  statt  $\frac{1}{7\,200\,000}$ , so daß die Resultate dort ungenau werden.



1) Die Kugel als Pendel. Ist die Entfernung des Aufhängepunktes vom Mittelpunkte gleich  $e$ , so ist die Dauer kleiner Schwingungen

$$t = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}},$$

wo  $T = \frac{2}{5} m r^2 + e^2 m$ ,  $M = em$  ist. Der Schwingungspunkt hat vom Aufhängepunkte die Entfernung

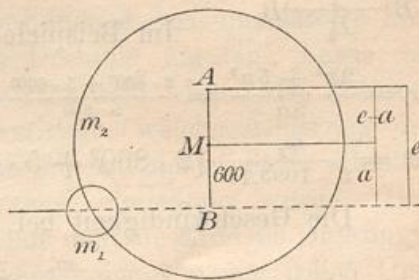
$$l = \frac{T}{M} = \frac{\frac{m}{5} (2r^2 + 5e^2)}{me} = \frac{2r^2 + 5e^2}{5e}.$$

(Reduzierte Pendellänge.)

175) Stofs gegen die Erdkugel.

Eine Kugel von der Gröfse und Masse der Erde werde von einem Weltkörper getroffen, dessen Masse der 1000<sup>ste</sup> Teil der Erdmasse ist und der mit 100 000 m Geschwindigkeit gegen den stillstehend gedachten Erdball trifft, den er in einer Sehne schneiden würde, die vom Mittelpunkte die Entfernung 600 Meilen hat. Der Erdball habe einen Radius von 860 Meilen. Welche Bewegung tritt ein?

Fig. 135.



**Auflösung.** Nach der Stofstheorie ist die Entfernung der freiwilligen Drehungsachse für den Anfang der Bewegung in der Entfernung  $BA = e = \frac{T_B}{M_B}$  zu suchen.

Das Trägheitsmoment der als homogen angenommenen Erdkugel für den Punkt  $B$  ist

$$T_B = \frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 a^2,$$

das statische Moment für denselben Punkt

$$M_B = m_2 a;$$

dennach ist, da  $m_2$  sich hebt, die Entfernung

$$BA = e = \frac{2r^2 + 5a^2}{5a}.$$

In  $B$  hat man sich eine Hilfsmasse zu denken, die in Bezug auf die Achse  $A$  dasselbe Trägheitsmoment hat wie die Kugel. Diese reduzierte Masse bestimmt sich aus der Gleichung



$$xe^2 = T_A$$

als

$$x = \frac{\frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 (e - a)^2}{e^2} = \frac{m_2}{5e^2} [2r^2 + 5(e - a)^2].$$

Jetzt handelt es sich bei  $B$  um den unelastischen Stofs zweier Massen  $m_1$  und  $x$  mit den Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2 = 0$ , so dafs die gemeinschaftliche Schlufsgeschwindigkeit bei  $B$  wird:

$$v_B = \frac{m_1 v_1 + x \cdot 0}{m_1 + x} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + x}.$$

Die Geschwindigkeit bei  $M$  wird kleiner im Verhältnis der von  $A$  aus gerechneten Abstände, d. h. die Schwerpunktsbewegung wird

$$v_s = v_B \frac{e - a}{e}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\vartheta$  für den Radius 1 wird

$$\vartheta = \frac{B_1 B_2}{M_1 B_1} = \frac{v_B - v_s}{a}.$$

Im Beispiele ergibt sich

$$e = \frac{2r^2 + 5a^2}{5a} = \frac{2 \cdot 860^2 + 5 \cdot 600^2}{5 \cdot 600} = 1093,1 \text{ Meilen}; \quad e - a = 493,1 \text{ Meilen};$$

$$x = \frac{m_2}{5 \cdot 1093,1^2} \cdot [2 \cdot 860^2 + 5 \cdot 493,1^2] = 0,45108 m_2 \text{ ist die Hulfsmasse.}$$

Die Geschwindigkeit bei  $B$  wird

$$v_B = \frac{\frac{m_2}{1000} \cdot v_1}{\frac{m_2}{1000} + x} = \frac{100 \ 000}{452,08} = 221,2 \text{ m},$$

demnach erhält der Erdball die fortschreitende Bewegung

$$v_s = 221,2 \frac{493,1}{1093,1} = 99,785 \text{ m.}$$

Die Winkelgeschwindigkeit endlich wird

$$\frac{221,2 - 99,785}{600 \cdot 7500} = 0,000269.$$

An der Stelle  $B$  ist der Kreisumfang gleich  $2 \cdot 600 \cdot 7500 \cdot \pi$  Meter =  $9 \ 000 \ 000 \pi$  Meter. Dies, dividiert durch  $v_B - v_s = 121,42$  m, gibt eine Umlaufszeit von 232 870 Sek. oder etwa 3 Tagen.

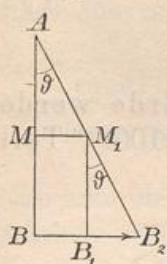
Die verlorene Arbeitswucht (Energie) bei diesem Stofse beträgt

$$\frac{m_1 x}{m_1 + x} \frac{(v_1 - 0)^2}{2} \text{ mkg, wo } x = 0,45108 m_2 \text{ und } m_2 \text{ bei dem spez. Gew. } 5,6$$

der Erde gleich  $\frac{4}{3} (860 \cdot 7500)^3 \pi \cdot 1000 \cdot 5,6$  ist, so dafs der Verlust an Arbeitswucht

$$9,81$$

Fig. 136.





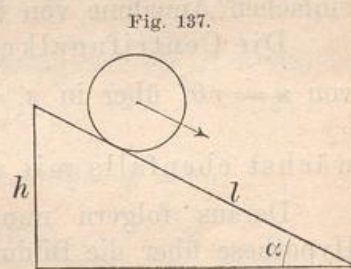
$$\frac{\frac{4}{3} (860 \cdot 7500)^3 \pi \cdot 1000 \cdot 5,6}{9,81} \cdot \frac{0,45108}{452,08} \cdot \frac{100000^2}{2} = \frac{m_2 \cdot 0,45108 \cdot 10\,000^2}{452,08 \cdot 2}$$

ist. Ein Teil dieser Arbeitswucht wird auf Umformung (Zerstörungsarbeit) verwendet, ein Teil in Wärme verwandelt. Angenommen, alles würde in Wärme übergehen, so würde durch  $425 \cdot m_2$  zu dividieren sein\*), wenn man die Anzahl der Wärmeeinheiten für die Masseneinheit erhalten will, durch  $425 \cdot m_2 \cdot 9,81$ , wenn man die Wärmeeinheiten für jedes Kilogramm finden will. Letzteres ergibt rund 500 000 W.-E. Irgend ein Bruchteil derselben tritt als Erwärmung, der Rest als Zerstörungsarbeit auf. Um welchen Bruchteil es sich handelt, das hängt zum Teil von den chemischen Verhältnissen des Erdkörpers ab.

Nimmt man an, die Himmelskörper wären durch allmähliches Zusammenstürzen kosmischer Massen entstanden, so würde sich ihre fortschreitende Bewegung nebst der Drehung auf solche Weise ganz zwanglos erklären. Das mehrfach beobachtete plötzliche Aufleuchten neuer Fixsterne, deren Lichtstärke allmählich wieder abnimmt, deutet auf solche mit Wärmeentwicklung verbundene Zusammenstöße hin.

Hatte der Erdkörper bereits eine Drehung um eine Achse, so würde in bekannter Weise diese einzusetzen sein. Nach der Poinsoischen Drehungstheorie könnte man ermitteln, welche Änderung die Drehungsbewegung unserer Erde durch einen solchen Stoß erhalten und welche neue Lage die Drehungsachse einnehmen würde. Das Problem läßt sich dahin spezialisieren, daß man die Erde als Drehungselipsoid annimmt, wobei die neue Achse keine von den freien Umdrehungsachsen zu werden braucht. Dies würde nicht nur auf Schwankungen (Nutation) der neuen Erdachse, sondern auch auf das Bestreben hinführen, ein neues „Geoid“ zu bilden; die Verteilung der Ozeane würde eine andere werden u. s. w. Kurz, eine ganze Reihe weiterer Probleme der Mechanik und Potentialtheorie würde sich aufdrängen.

176) **Aufgabe.** Auf einer schiefen Ebene von Neigung  $\alpha$  rolle eine Kugel ohne zu gleiten herab. Wie geschieht die Bewegung ohne weitere Berücksichtigung der Reibung?



\*) Die obige Ausrechnung von  $m_2$  ist unterlassen, weil, wenn man hier durch  $m_2$  statt durch  $1,001 m_2$  dividiert,  $m_2$  sich weghebt, so dass es sich nur um den Bruch

$$\frac{0,45108 \cdot 10^{10}}{452,08 \cdot 2 \cdot 9,81}$$

handelt.



**Auflösung.** Arbeit der Schwerkraft  $ph$  gleich der Energie

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{7}{10}mv^2$$

zu setzen, oder

$$mgh = \frac{7}{10}mv^2, \quad v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{2g_1h} = \sqrt{2g_1l \sin \alpha},$$

also Beschleunigung  $g_1 = \frac{5}{7}g \sin \alpha$ .

177) **Aufgabe.** Wie groß würde die Zunahme der Erdrotation sein, wenn sich die Erde vom Radius  $r$  auf den Radius  $r_1$  zusammenzöge?

**Auflösung.** Das Trägheitsmoment  $T = \frac{2}{5}mr^2$  würde übergehen in  $T_1 = \frac{2}{5}mr_1^2$ , die Winkelgeschwindigkeit  $\vartheta$  in die zu berechnende  $\vartheta_1$ . Nimmt man an, die Drehungsenergie bliebe unverändert, was ziemlich wahrscheinlich ist, so hat man zu setzen:

$$\frac{T_1\vartheta_1^2}{2} = \frac{T\vartheta^2}{2}$$

oder

$$\frac{2}{5}mr_1^2 \cdot \frac{\vartheta_1^2}{2} = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{\vartheta^2}{2},$$

woraus folgt:

$$\vartheta_1 = \frac{r}{r_1} \vartheta,$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit wächst mit dem Verhältnisse  $\frac{r}{r_1}$ . Aus  $r\vartheta = r_1\vartheta_1$  folgt zugleich, dass die Äquatorialgeschwindigkeit unverändert bleibt. Dasselbe gilt unter einer einfachen Annahme von jedem Massenteilchen.

Die Centrifugalkraft am Äquator geht für die Masseneinheit von  $\kappa = r\vartheta^2$  über in  $\kappa_1 = r_1\vartheta_1^2 = r_1 \frac{r^2}{r_1^2} \vartheta^2 = \frac{r}{r_1} (r\vartheta^2) = \frac{r}{r_1} \kappa$ , d. h. sie wächst ebenfalls mit dem Verhältnisse  $\frac{r}{r_1}$ .

Daraus folgern nun zahlreiche Anhänger der Laplaceschen Hypothese über die Bildung des Sonnensystemes, dass die Abplattung des rotierenden Körpers gleichfalls wachsen müsse. Dies ist aber falsch. Es ist nämlich zu berücksichtigen, dass gleichzeitig die Schwerkraft auf der Kugelfläche in dem stärkeren Verhältnisse  $\frac{r^2}{r_1^2}$  zunimmt, dass z. B. bei der Erde die Freifallbeschleunigung  $g$  in  $g \frac{r^2}{r_1^2}$



übergeht. Der sogenannte Abplattungsfaktor  $\frac{z}{g} = \frac{r\delta^2}{g}$  (der nicht etwa das Maß der Abplattung selbst angiebt, und dessen Betrag für die Erde etwa  $\frac{1}{290}$  ist) geht über in  $\frac{z_1}{g_1} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{zr_1}{gr}$ , d. h. der Abplattungsfaktor nimmt ab im Verhältnisse der beiden Radien, er nimmt nicht zu.

## 178) Allgemeine Folgerungen.

Eine Fläche habe die Querschnittsformel

$$1) \quad x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \dots$$

Ist die Reihe unendlich lang, so muß die Betrachtung auf den Konvergenzbereich beschränkt werden, während bei endlicher Reihe Einschränkungen nicht nötig sind. Der Inhalt von 0 bis  $y$  wird

$$2) \quad \frac{y}{0} F = \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4} + \frac{ey^5}{5} + \dots$$

Das statische Moment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist

$$xy = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \dots,$$

das entsprechenden Moment der Gesamtfläche also

$$3) \quad M_x = \frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \frac{dy^5}{5} + \frac{ey^6}{6} + \dots$$

Daraus folgt die Schwerpunkthöhe

$$4) \quad y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \dots}{\frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \dots}$$

Das Trägheitsmoment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist

$$xy^2 = ay^2 + by^3 + cy^4 + dy^5 + \dots,$$

das entsprechende Trägheitsmoment der Gesamtfläche also

$$5) \quad T_x = \frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \frac{dy^6}{6} + \dots$$

Für die horizontale Schwerpunktsachse ist es

$$6) \quad T_s = T_x - y_s^2 F = T_x - \frac{M_x^2}{F^2} F = T_x - \frac{M_x^2}{F}$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf die X-Achse bestimmt sich aus



$$7) \quad \varrho_x^2 = \frac{T_x}{F} = \frac{\frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \dots}{\frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \dots}$$

Der Schwingungspunkt in Bezug auf die X-Achse liegt für die Fläche in der Entfernung

$$8) \quad \lambda_x = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \dots}{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \dots}$$

Das Centrifugalmoment des Streifens 1) in Bezug auf die Koordinatenachsen ist, wenn die Abstände  $x$  sich direkt an die Y-Achse ansetzen und im ersten Quadranten bleiben:

$$\frac{x^2}{2}y = \frac{a^2}{2}y + \frac{2ab}{2}y^2 + \frac{b^2 + 2ac}{2}y^3 + \frac{2ad + 2bc}{2}y^4 + \frac{c^2 + 2ae + 2bd}{2}y^5 + \dots$$

Dies ergibt sich aus beiderseitiger Quadrierung von 1) und darauf folgender Multiplikation mit  $\frac{y}{2}$ . (Ist die erste Bedingung nicht erfüllt, so erledigt sich die Sache durch Subtraktion.) Folglich ist das Centrifugalmoment der Fläche

$$M_{xy} = \frac{a^2 y^2}{2 \cdot 2} + \frac{2ab y^3}{2 \cdot 3} + \frac{b^2 + 2ac y^4}{2 \cdot 4} + \frac{2ad + 2bc y^5}{2 \cdot 5} + \frac{c^2 + 2ae + 2bd y^6}{2 \cdot 6} + \dots$$

Übersichtlicher ist es für geringere Gliederzahl, z. B. für  $x = a + by + cy^2$ . Dann ergibt sich für den Streifen

$$\frac{x^2}{2}y = \frac{a^2}{2}y + \frac{2ab}{2}y^2 + \frac{b^2 + 2ac}{2}y^3 + \frac{2bc}{2}y^4 + \frac{c^2}{2}y^5,$$

folglich für die Fläche

$$M_{xy} = \frac{a^2 y^2}{2 \cdot 2} + \frac{2ab y^3}{2 \cdot 3} + \frac{b^2 + 2ac y^4}{2 \cdot 4} + \frac{2bc y^5}{2 \cdot 5} + \frac{c^2 y^6}{2 \cdot 6}.$$

Der durch Drehung der Fläche um die Y-Achse entstehende Körper hat die Querschnittsformel

$$q_y = x^2 \pi = \pi [a^2 + 2aby + (b^2 + 2ac)y^2 + (2bc + 2ad)y^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)y^4 + \dots].$$

Sein Inhalt bis zur Höhe  $y$  wird daher

$$J = \pi \left[ \frac{a^2 y}{1} + 2ab \frac{y^2}{2} + (b^2 + 2ac) \frac{y^3}{3} + (2bc + 2ad) \frac{y^4}{4} + (c^2 + 2ae + 2bd) \frac{y^5}{5} + \dots \right].$$

Die Formel für das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die Grundfläche, d. h. für  $x^2 \pi y$ , ist leicht aufzustellen, ebenso das Trägheitsmoment, und so kann man diese Ausdrücke auch für den Drehungskörper leicht hinschreiben und die entsprechenden Schlüsse ziehen.



Ist 1) der Querschnitt eines Körpers, so gelten die Formeln 2) bis 6) in Bezug auf die Ebene, von der aus die  $y$  gerechnet werden.

Um die obigen Betrachtungen für die  $Y$ -Achse zu wiederholen, muß man  $y$  durch  $x$  ausdrücken, was auf Irrationalitäten und auf gebrochene Exponenten führt. Daher muß für solche das Nötigste gesagt werden.

**C. Die Parabeln gebrochener und negativer Ordnung und die Schichtenformel für gebrochene und negative Exponenten.**

179) Oben war gezeigt worden, daß die Parabel  $p^{\text{ter}}$  Ordnung  $x = y^p$ , wenn  $p$  ganz ist, von dem Rechteck mit den Seiten  $h$  und  $b = h^p$  den  $(p + 1)^{\text{ten}}$  Teil abschneidet, so daß die Fläche gleich  $\frac{h^{p+1}}{p+1}$  ist. Die Fläche von  $h_1$  bis  $h_2$  würde sein

$$\frac{h_2}{h_1} F = \frac{h_2^{p+1} - h_1^{p+1}}{p+1}.$$

Es fragt sich, was davon richtig bleibt, wenn  $p$  auch gebrochene und negative Werte annimmt.

Die Betrachtung soll auf den ersten Quadranten eingeschränkt werden, da sich die übrigen ebenso behandeln lassen und gerade in der  $Y$ -Achse die kritische Stelle liegt, die Zweifel bringen könnte.

Es handle sich also um die Kurve  $x = y^\alpha$ , wo  $\alpha$  lediglich der Bedingung gehorchen soll, reell zu sein. Im Methodischen Lehrbuche, Band 3,

Fig. 138

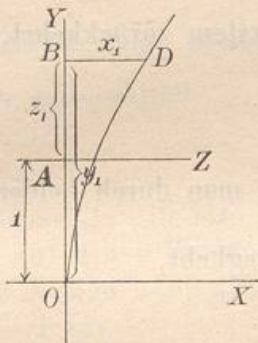
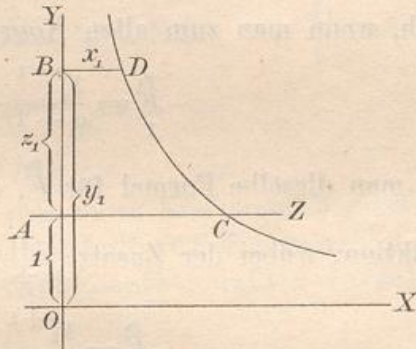


Fig. 139.



Algebr. Analysis V, ist dieser Fall behandelt worden; hier soll die Behandlung auf andere Weise geschehen. Zunächst ist zu bemerken, daß bei positivem  $\alpha$  die Kurve von  $O$  aus aufsteigt, und zwar bis zu unendlicher Höhe, daß sie dagegen bei negativem  $\alpha$  aus unendlicher Höhe bis zu Null herabsinkt. Welcher Fall vorliegt, ist vorläufig gleichgültig.

Es kommt darauf an, an Stelle von  $x = y^\alpha$  eine Reihe zu erhalten, die nach ganzen positiven Potenzen fortschreitet. Zu



diesem Zwecke hat man nur nötig, das Koordinatensystem zu verschieben, z. B. den Nullpunkt in senkrechter Richtung von  $O$  nach  $A$  zu verlegen, wobei z. B.  $OA = 1$  sein soll. In diesem Sonderfalle wird die neue Ordinate  $z = y - 1$ , (also  $y = z + 1$ ), während  $x$  unverändert bleibt. Nach dem binomischen Satze für gebrochene und negative Exponenten, dessen Beweis man im dritten Bande des Meth. Lehrbuchs findet, ist dann die neue Kurvengleichung

$$x = (1 + z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} z + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \dots,$$

eine Reihe, die Geltung hat für  $1 - < z < + 1$ , so dafs man sich zunächst innerhalb dieses Konvergenzbereiches zu halten hat.

Nach der Schichtenformel ist dann

$$\overset{z_1}{F}_0 = \frac{z_1}{1} + \frac{\alpha}{1 \cdot 2} z_1^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z_1^3 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z_1^4 + \dots$$

Um rechts wieder eine binomische Reihe zu erhalten, multipliziere man beiderseits mit  $(\alpha + 1)$  und addiere beiderseits 1. Dies giebt

$$\begin{aligned} 1 + (\alpha + 1) \cdot \overset{z_1}{F}_0 &= 1 + \frac{\alpha + 1}{1} z_1 + \frac{(\alpha + 1)\alpha}{1 \cdot 2} z_1^2 + \frac{(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z_1^3 + \dots \\ &= (1 + z_1)^{\alpha + 1}, \end{aligned}$$

so dafs sich ergibt

$$\overset{z_1}{F}_0 = \frac{(1 + z_1)^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1},$$

folglich, wenn man zum alten Koordinatensystem zurückkehrt,

$$\overset{y_1}{F}_1 = \frac{y_1^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Bildet man dieselbe Formel für  $\overset{y_2}{F}_1$ , so findet man durch beiderseitige Subtraktion, wobei der Zusatz  $\frac{1}{\alpha + 1}$  sich weghebt,

$$1) \quad \overset{y_2}{F}_{y_1} = \frac{y_2^{\alpha + 1} - y_1^{\alpha + 1}}{\alpha + 1},$$

so dafs die ursprüngliche, für positive, ganze Exponenten geltende Formel für den Konvergenzbereich als bestehen bleibend nachgewiesen ist. Nur der Fall  $\alpha = -1$  ist auszuschliessen, weil er auf den unbestimmten Wert  $\frac{0}{0}$  führt. Dieser Fall ist mit Hilfe des natürlichen Logarithmus zu erledigen. (Method. Lehrbuch Band 3, Algebr. Analysis II.)



180) Der Konvergenzbereich kann aber durch beliebige Verschiebung des Koordinatensystems beliebig geändert werden.

Verschiebung um die Strecke 2 würde z. B. die Kurvengleichung geben:

$$x = y^\alpha = (2 + z)^\alpha = 2^\alpha \left(1 + \frac{z}{2}\right)^\alpha,$$

oder

$$x = 2^\alpha \left[1 + \frac{\alpha}{1} \left(\frac{z}{2}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots\right],$$

die für  $\frac{z}{2}$  absolut  $< 1$  oder  $z$  absolut  $< 2$  konvergiert. Die Schichtenformel giebt jetzt

$$\frac{z_1}{0} = 2^\alpha \left[ \frac{z}{1} + \frac{\alpha}{1} \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{2}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{4} \frac{z^3}{3}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{8} \frac{z^4}{4}\right) + \dots \right].$$

Rechts und links multipliziere man mit  $(\alpha + 1)$  und außerdem auf der rechten Seite oben und unten mit 2. Man erhält

$$\begin{aligned} (\alpha + 1) \frac{z_1}{0} &= 2^{\alpha+1} \left[ \frac{\alpha + 1}{1} \frac{z_1}{2} + \frac{(\alpha + 1)\alpha}{1 \cdot 2} \left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{(\alpha + 1)\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{z_1}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= 2^{\alpha+1} \left[ \left(1 + \frac{z_1}{2}\right)^{\alpha+1} - 1 \right], \end{aligned}$$

so daß

$$\frac{z_1}{0} = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \left[ \left(1 + \frac{z_1}{2}\right)^{\alpha+1} - 1 \right] = \frac{1}{\alpha + 1} [(2 + z_1)^{\alpha+1} - 2^{\alpha+1}]$$

und daher auch

$$\frac{y_1}{2} = \frac{1}{\alpha + 1} [y_1^{\alpha+1} - 2^{\alpha+1}]$$

ist. Daraus folgt ebenso, wie oben, mit Hilfe von  $\frac{y_2}{2}$  und beiderseitiger Subtraktion

$$1) \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2^{\alpha+1} - y_1^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Die Formel 1) gilt also auch für den neuen Konvergenzbereich. Man kann auf diese Weise ihre Gültigkeit für die ganze positive reelle Achse nachweisen, vorausgesetzt, daß  $\alpha$  verschieden von  $-1$  ist.

181) Kritisch sind nur die Stellen 0 und  $\infty$ . Darüber ist Folgendes zu sagen.

Ist  $\alpha > -1$ , so ist für  $y_1 = 0$  der Werth von  $\frac{y_1^{\alpha+1}}{\alpha + 1} = 0$ . In diesem Falle wird

$$\frac{y_2}{0} = \frac{y_2^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - \frac{0}{\alpha + 1} = \frac{y_2^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$



Folglich:

Für  $\alpha > -1$  schneiden die Kurven den  $(\alpha + 1)^{\text{ten}}$  Teil des Rechtecks ab, möge nun  $\alpha$  positiv (Fig. 140) oder negativ (Fig. 141) sein. So ist z. B. für  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , also für die Kurve  $x = y^{-\frac{1}{2}}$ ,

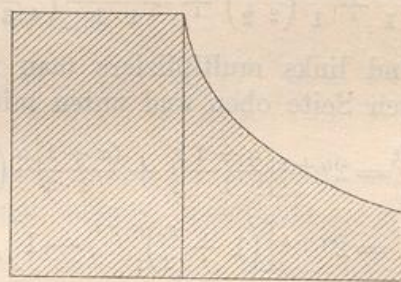
$$\int_0^y \frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2y^{\frac{1}{2}},$$

was das Doppelte des Rechtecks bedeutet. Das Diagramm reicht dabei nach rechts bis  $x = \infty$  und hat trotzdem endlichen Inhalt.

Fig. 140.

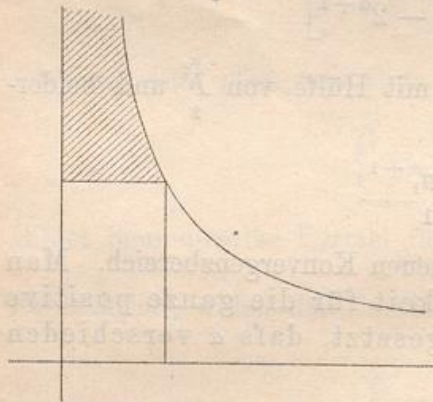


Fig. 141.



Ist dagegen  $\alpha < -1$ , so ist für  $y_2 = \infty$   $y_2^{\alpha+1} = 0$ , weil  $\alpha + 1$  negativ ist, und die Formel geht über in

Fig. 142.



$$\int_{y_1}^{\infty} \frac{0}{\alpha+1} - \frac{y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{-y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

was positiv ist, weil der Nenner negativ ist. In diesem Falle ist also der nach oben bis ins Unendliche fortzusetzende schraffierte Flächenteil gleich dem  $(\alpha + 1)^{\text{ten}}$  Teil des Rechtecks, während der darunterliegende unendlich groß werden würde. Also auch hier behält der Ausdruck: „ $(\alpha + 1)^{\text{ter}}$  Teil des Rechtecks“ einen bestimmten Sinn. Die Formel 1) aber bleibt für alle positiven  $y_1$  und  $y_2$  richtig, nur ist der Werth Null jetzt auszuschließen, denn das nach rechts gehende Diagramm ist jetzt von unendlich großem Inhalte.

182) Der Fall  $\alpha = -1$  erledigt sich nach dem Meth. Lehrbuche Band 3, Algebr. Analysis II dadurch, daß für die Kurve  $x = \frac{1}{y}$



$$\frac{y}{0} = \text{elg } y$$

wird.

Damit ist die Angelegenheit für technische Zwecke überhaupt geklärt und ein weiterer Bereich für wichtige Anwendungen erschlossen.

183) Konstruktion der Parabeln höherer Ordnung.

Die Curven  $x = y^\alpha$  für beliebiges reelles  $\alpha$  einschliesslich des Falles  $\alpha = -1$  haben eine einfache Konstruktionsmethode, die sich aus Folgendem ergibt:

Ist  $x_2$  mittlere Proportionale zu  $x_1$  und  $x_3$ , also

$$x_1 : x_2 = x_2 : x_3,$$

so folgt aus der Kurvengleichung, dass

$$y_1^\alpha : y_2^\alpha = y_2^\alpha : y_3^\alpha,$$

folglich auch

$$y_1 : y_2 = y_2 : y_3$$

ist. Also: Ist die mittlere Abscisse mittlere Proportionale zwischen den aufsenliegenden Abscissen, so ist auch die mittlere Ordinate mittlere Proportionale zwischen den aufsenliegenden Ordinaten.

Sind also von einer Parabel  $x = y^\alpha$  zwei Punkte  $A$  und  $B$  bekannt, so kann man durch Eintragen mittlerer Proportionalen einen dritten Punkt  $C$  konstruieren, sodann zwischen  $A$  und  $C$ ,  $C$  und  $B$  ebenfalls neue Punkte einschalten u. s. w.

Auch nach aufsen läst sich die Curve fortsetzen. Da es sich dann um ein Fortschreiten nach geometrischer Weise handelt, so ergibt sich folgender Konstruktionsmechanismus.

Sind in Fig. 144  $A$  und  $B$  gegeben, so ziehe man beliebig  $OK$  und bilde durch Projektion  $AA_1A_2$  und  $BB_1B_2$ . Zieht man  $A_2B_1$ , sodann parallel dazu  $B_2C_1$ , darauf im Zickzack  $C_1C_2$ ,  $C_2D_1 \parallel A_2B_1$ ,  $D_1D_2$ ,  $D_2E_1 \parallel A_2B_1$  u. s. w., so erhält man die in geometrischer Weise aufeinander folgenden Abscissen. Ebenso verfähre man in Bezug auf die beliebige Gerade  $OL$  mit  $A \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ ,  $B \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$  und  $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$  u. s. w., was die Ordinaten  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\mathfrak{D}_1$  u. s. w. giebt. Dadurch werden Punkte  $C, D, E \dots$  der Curve bestimmt, die auch rückwärts fortgesetzt werden kann.

Fig. 143.

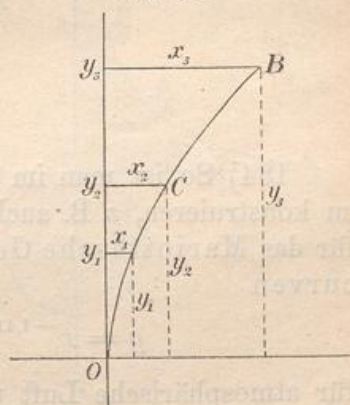
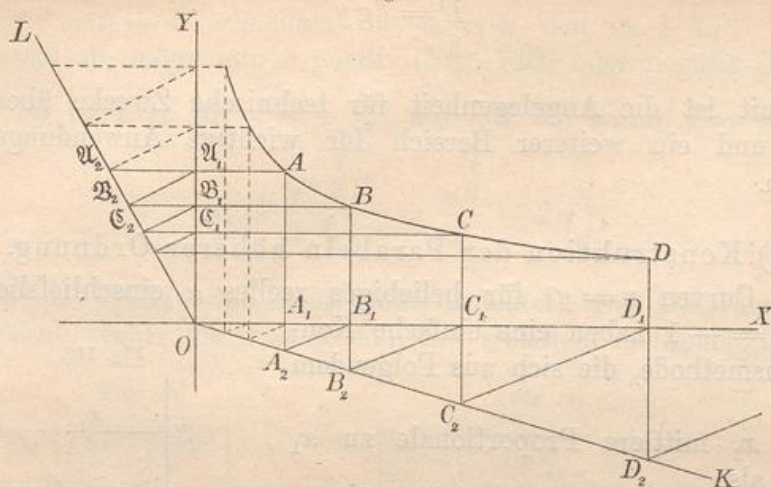




Fig. 144.



184) So ist man im Stande, jede Parabel höherer Ordnung leicht zu konstruieren, z. B. auch die gleichseitige Hyperbel (Diagrammcurve für das Mariottesche Gesetz) und die adiabatischen Diagrammcurven

$$y = x^{-1,41} \quad \text{und} \quad y = x^{-1,125} = x^{-\frac{9}{8}}$$

für atmosphärische Luft und gesättigte Wasserdämpfe.

Die Diagrammflächen für die letztern ergeben sich nach Obigem als

$$\frac{F}{x_1} = \frac{x_2^{-1,41+1} - x_1^{-1,41+1}}{-1,41+1} = \frac{x_2^{-0,41} - x_1^{-0,41}}{-0,41} = \frac{x_1^{-0,41} - x_2^{-0,41}}{0,41},$$

bezw.

$$\frac{F}{x_1} = \frac{x_2^{-\frac{9}{8}+1} - x_1^{-\frac{9}{8}+1}}{-\frac{9}{8}+1} = \frac{x_2^{\frac{1}{8}} - x_1^{\frac{1}{8}}}{-\frac{1}{8}} = 8 \left( x_1^{\frac{1}{8}} - x_2^{\frac{1}{8}} \right),$$

sodafs sich die Diagramme für die Expansionsarbeit und Kompressionsarbeit leicht berechnen lassen. (Vergl. Meth. Lehrbuch, Teil 3, Algebr. Anal. V, d.)

185) Dasselbe gilt von der Newtonschen Gravitationskurve

$$x = \frac{p}{y^2} = py^{-2}$$

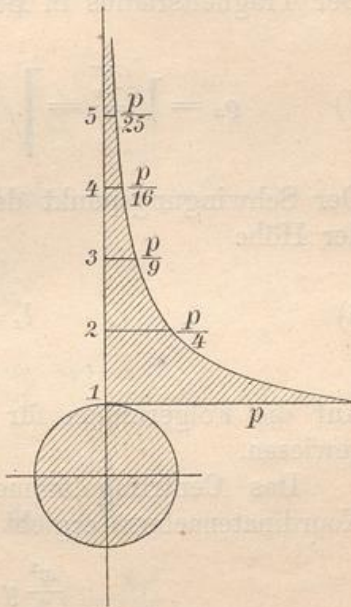
(Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung), deren Fläche

$$\frac{F}{y_1} = \frac{y_2^{-2+1} - y_1^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2},$$



die Heбungsarbeit giebt, die z. B. erforderlich ist, einen Körper, der an der Erdoberfläche das Gewicht  $p$  hat, zu beliebiger Höhe zu heben. Die Diagrammfläche ist identisch mit der Potentialdifferenz. Auch hierbei vergl. das Methodische Lehrbuch 3, Algebr. Anal. V, c. Für die Elektrizitätslehre, wo es sich auch um Abstofsung handeln kann, ist dies von fundamentaler Wichtigkeit. Vgl. Fig. 145.

Fig. 145.



186) Parabolische Berechnungen.

Es handelt sich hier um Parabeln höherer Ordnung. Willkürlich wird die gewöhnliche Parabel 2<sup>ter</sup> Ordnung als Beispiel herausgegriffen. Die Berechnung der übrigen geschieht ebenso. Zum Schluss soll eine Tabelle über die verschiedenen Ordnungen aufgestellt werden.

In das Koordinatenrechteck  $ABCD$  (Fig. 146) sei die Parabel

$$1) \quad x = \frac{c}{h^2} y^2$$

einbeschrieben, die  $A$  zum Scheitel,  $AB$  zur Achse hat. Ihre Fläche ist

$$2) \quad F = \int_0^h \frac{c}{h^2} y^2 dy = \frac{c}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{ch}{3}.$$

Das statische Moment des Streifens 1) in Bezug auf die  $X$ -Achse ist  $xy = \frac{c}{h^2} y^3$ , das Moment der Gesamtfläche also:

$$3) \quad M_x = \frac{c}{h^2} \frac{h^4}{4} = \frac{ch^2}{4}.$$

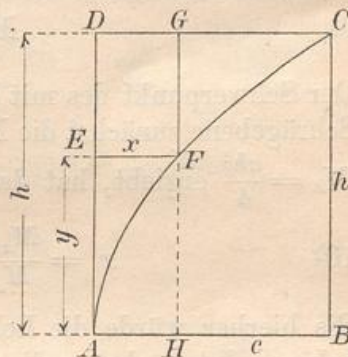
Demnach liegt der Schwerpunkt der Fläche  $ACD$  in der Höhe

$$4) \quad y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{ch^2}{4}}{\frac{ch}{3}} = \frac{3}{4} h.$$

Das Trägheitsmoment des Querschnittes 1) in Bezug auf die  $X$ -Achse ist  $xy^2 = \frac{c}{h^2} y^4$ , das der Gesamtfläche also:

$$5) \quad T_x = \frac{c}{h^2} \frac{h^5}{5} = \frac{ch^3}{5}.$$

Fig. 146.





Für die wagerechte Schwerpunktsachse dagegen wird es

$$6) \quad T_s = \frac{ch^3}{5} - h_s^2 F = ch^3 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{16} \right) = \frac{ch^3}{80}.$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf  $AB$  ist

$$7) \quad \rho_x = \sqrt{\frac{T_x}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{ch^3}{5}}{\frac{ch^3}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{5}} h = h \sqrt{\frac{3}{5}} = h \sqrt{0,6}.$$

Der Schwingungspunkt der Fläche  $ACD$  in Bezug auf  $AB$  liegt in der Höhe

$$8) \quad l_x = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{ch^3}{5}}{\frac{ch^2}{4}} = \frac{4}{5} h.$$

Auf die Folgerungen für die Pendel- und Stofstheorie sei nur hingewiesen.

Das Centrifugalmoment des Streifens 1) in Bezug auf die Koordinatenachsen ergibt sich nach Nr. 165 als

$$\frac{x^2}{2} y = \frac{1}{2} \frac{c^2}{h^4} y^4 y = \frac{c^2}{2h^4} y^5.$$

Demnach ist für die Gesamtfläche  $ACD$  in Bezug auf jene Achse

$$9) \quad M_{xy} = \frac{c^2}{2h^4} \frac{h^6}{6} = \frac{c^2 h^2}{12}.$$

Der Schwerpunkt des mit Hülfe von  $AB$  abgeschrägten Körpers, dessen Schrägebene zunächst die Neigung  $45^\circ$  habe, dessen Inhalt sich dann aus  $M_x = \frac{ch^2}{4}$  ergibt, hat daher seine Projektion an der Stelle

$$10) \quad x_s = \frac{M_{xy}}{M_x} = \frac{1}{3} c, \quad y_s = \frac{T_x}{M_x} = \frac{4}{5} h.$$

Bis hierher würde die Lehre von den ganzen Exponenten ausgereicht haben. Jetzt aber soll die Achse  $AD$  zu Grunde gelegt werden, wobei gebrochene Exponenten auftreten. Zunächst ergibt sich der Querschnitt

$$11) \quad q_x = HG - HF = h - \frac{h}{\frac{1}{c^2}} x^{\frac{1}{2}},$$

so dafs die Fläche wiederum wird

$$\frac{hc}{1} - \frac{h}{\frac{1}{c^2} \frac{1}{2} + 1} = hc - \frac{2}{3} hc = \frac{ch}{3}.$$



Das statische Moment des Streifens 11) in Bezug auf  $AD$  ist

$$hx - \left( \frac{h}{c^2} x^2 \right) x = hx - \frac{h}{c^2} x^3.$$

Daraus folgt für die Fläche das Moment

$$12) \quad M_y = \frac{hc^2}{2} - \frac{h}{c^2} \frac{c^5}{5} = hc^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \right) = \frac{hc^2}{10}.$$

Daraus ergibt sich als Schwerpunktskoordinate

$$13) \quad x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{hc^2}{10}}{\frac{ch}{3}} = \frac{3}{10} c.$$

Das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf  $AD$  ist

$$hx^2 - \left( \frac{h}{c^2} x^2 \right) x^2 = hx^2 - \frac{h}{c^2} x^5.$$

Für die Fläche folgt als Trägheitsmoment für  $AD$

$$14) \quad T_y = \frac{hc^3}{3} - \frac{h}{c^2} \frac{c^7}{7} = hc^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{7} \right) = \frac{hc^3}{21}.$$

Für die senkrechte Schwerpunktsachse wird das Trägheitsmoment

$$15) \quad T'_s = \frac{hc^3}{21} - y_s^2 F = \frac{hc^3}{21} - \frac{9c^2 ch}{100 \cdot 3} = hc^3 \left( \frac{1}{21} - \frac{3}{100} \right) = \frac{37hc^3}{2100}.$$

Das polare Trägheitsmoment wird demnach

$$16) \quad T_p = T_s + T'_s = \frac{ch^3}{80} + \frac{37hc^3}{2100} = \frac{ch}{16800} \cdot [210h^2 + 296c^2] \\ = \frac{ch}{8400} [105h^2 + 148c^2].$$

Der polare Trägheitsradius wird

$$17) \quad \rho_p = \sqrt{\frac{T_p}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{ch}{8400} [105h^2 + 148c^2]}{\frac{ch}{3}}} = \sqrt{\frac{105h^2 + 148c^2}{2800}}.$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf  $AD$  wird

$$18) \quad \rho_y = \sqrt{\frac{T_y}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{hc^3}{21}}{\frac{hc}{3}}} = \sqrt{\frac{c^2}{7}} = c\sqrt{\frac{1}{7}}.$$

Der mittels  $AD$  abgeschrägte Körper hat die Schwerpunktsprojektion an der Stelle



$$19) \quad x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{hc^3}{21} = \frac{10}{21}c, \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{h^2c^2}{12} = \frac{5}{6}h.$$

Auch der Schwingungspunkt der Fläche in Bezug auf  $AD$  liegt in der Entfernung

$$l_y = \frac{T_y}{M_y} = \frac{hc^3}{21} = \frac{10}{21}c.$$

Die übrigen physikalischen Deutungen sind den früheren Bemerkungen entsprechend.

Durch Drehung um  $AD$  entsteht ein parabolischer Körper, dessen Querschnittsformel ist

$$20) \quad q_y = x^2\pi = \frac{c^2}{h^4}y^4\pi,$$

dessen Inhalt also wird

$$21) \quad J = \frac{c^2\pi h^5}{h^4 \cdot 5} = \frac{c^2\pi h}{5},$$

was den fünften Teil des zugehörigen Cylinders bedeutet.

Das statische Moment des Schnittes 20) in Bezug auf die Grundfläche ist

$$q_y \cdot y = x^2\pi y = \frac{c^2\pi}{h^4}y^5,$$

das Moment des Körpers wird also

$$22) \quad M_u = \frac{c^2\pi h^6}{h^4 \cdot 6} = \frac{c^2\pi h^2}{6}.$$

Der Schwerpunkt des Körpers liegt also in der Höhe

$$23) \quad h_s = \frac{M_u}{J} = \frac{\frac{c^2\pi h^2}{6}}{\frac{c^2\pi h}{5}} = \frac{5}{6}h.$$

Das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Grundfläche ist aus

$$x^2\pi y^2 = \frac{c^2\pi}{h^4}y^4 y^2 = \frac{c^2\pi}{h^4}y^6$$

zu berechnen als

$$24) \quad T_u = \frac{c^2\pi h^7}{h^4 \cdot 7} = \frac{c^2\pi h^3}{7}.$$

Das Trägheitsmoment jeder Schicht in Bezug auf Achse  $AD$  ist

$$\frac{x^4\pi}{2} = \frac{1}{2} \frac{c^4\pi}{h^8}y^8,$$

das des ganzen Körpers also

$$25) \quad T = \frac{1}{2} \frac{c^4\pi h^9}{h^8 \cdot 9} = \frac{c^4\pi h}{18}.$$



In Bezug auf jeden Hauptschnitt durch  $T$  ist es halb so groß, also

$$26) \quad T_1 = \frac{c^4 \pi h}{36},$$

in Bezug auf die Gerade  $AB$  also

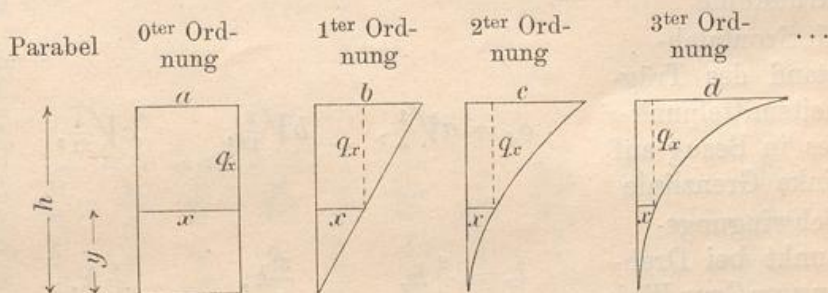
$$T' = T_1 + T_u = \frac{c^4 \pi h}{36} + \frac{c^2 \pi h^3}{7} = \frac{c^2 \pi}{252} (7c^2 + 36h^2).$$

Auf sonstige physikalische Dinge sei nur hingedeutet. Ebenso leicht ist der durch Drehung um  $AB$  entstehende Körper zu behandeln.

187) Macht man entsprechende Betrachtungen für die aufeinander folgenden Parabeln höherer Ordnung, so ergibt sich die nachstehende Tabelle. Betrachtet man die nach rechts aufeinander folgenden Ausdrücke, so zeigt sich, dass die entsprechenden Zahlen nach einfachen arithmetischen Reihen aufeinander folgen. Man kann also nicht nur für die ganzen Exponenten alles ohne weiteres hinschreiben, sondern auch für die zwischenliegenden gebrochenen Exponenten leichte Interpolationen machen. Damit ist die Theorie für die einfachen Parabeln höherer Ordnung erledigt.

188) Tabelle über Parabeln höherer Ordnung.

Fig. 147.



a) Parabolische Flächen.

Querschnitt in Höhe $y$	$x = a,$	$\frac{b}{h}y,$	$\frac{c}{h^2}y^2,$	$\frac{d}{h^3}y^3,$	...
1. Fläche von $y = 0$ bis $y = h$	$F = \frac{ah}{1},$	$\frac{bh}{2},$	$\frac{ch}{3},$	$\frac{dh}{4},$	...
2. statisches Moment in Bezug auf Grundlinie	$M_x = \frac{ah^2}{2},$	$\frac{bh^2}{3},$	$\frac{ch^2}{4},$	$\frac{dh^2}{5},$	...
3. Trägheitsmoment für Grundlinie	$T_x = \frac{ah^3}{3},$	$\frac{bh^3}{4},$	$\frac{ch^3}{5},$	$\frac{dh^3}{6},$	...



	Parabel 0 <sup>ter</sup> Ordnung	1 <sup>ter</sup> Ordnung	2 <sup>ter</sup> Ordnung	3 <sup>ter</sup> Ordnung ...
4. senkrechte Querlinie im Abstände $x$	$q_x = h,$	$h - \frac{h}{b^1} x^1,$	$h - \frac{h}{1} x^2,$ $c^2$	$h - \frac{h}{1} x^3,$ $c^3$
5. statisches Moment in Bezug auf Begrenzung links	$M_y = \frac{ha^2}{2},$	$\frac{hb^2}{6},$	$\frac{hc^2}{10},$	$\frac{hd^2}{14}, \dots$
6. Trägheitsmoment für diese Linie	$T_y = \frac{ha^3}{3},$	$\frac{hb^3}{12},$	$\frac{hc^3}{21},$	$\frac{hd^3}{30}, \dots$
7. Centrifugalmoment in Bezug auf die beiden Grenzlinien	$M_{xy} = \frac{a^2 h^2}{4},$	$\frac{b^2 h^2}{8},$	$\frac{c^2 h^2}{12},$	$\frac{d^2 h^2}{16}, \dots$
8. Schwerpunkthöhe	$y_s = \frac{1}{2} h,$	$\frac{2}{3} h,$	$\frac{3}{4} h,$	$\frac{4}{5} h, \dots$
9. Schwerpunktabstand horizontal	$x_s = \frac{1}{2} a,$	$\frac{2}{6} b,$	$\frac{3}{10} c,$	$\frac{4}{14} d, \dots$
10. Höhe des Trägheitsmittelpunktes in Bezug auf Grundlinie	$q_y = h\sqrt{\frac{1}{3}},$	$h\sqrt{\frac{2}{4}},$	$h\sqrt{\frac{3}{5}},$	$h\sqrt{\frac{4}{6}}, \dots$
11. Horizontalabstand des Trägheitsmittelpunktes in Bezug auf linke Grenzlinie	$q_x = a\sqrt{\frac{1}{3}},$	$b\sqrt{\frac{2}{12}},$	$c\sqrt{\frac{3}{21}},$	$d\sqrt{\frac{4}{30}}, \dots$
12. Schwingungspunkt bei Drehung um Grundlinie	$l_x = \frac{2}{3} h,$	$\frac{3}{4} h,$	$\frac{4}{5} h,$	$\frac{5}{6} h, \dots$
13. Schwingungspunkt bei Drehung um Grenzlinie links	$l_y = \frac{2}{3} a,$	$\frac{6}{12} b,$	$\frac{10}{21} c,$	$\frac{14}{30} d, \dots$
14. Quotient aus Centrifugalmoment für beide Achsen und statischem Moment $M_x$	$e_y = \frac{M_{xy}}{M_x} = \frac{2}{4} a,$	$\frac{3}{8} b,$	$\frac{4}{12} c,$	$\frac{5}{12} d, \dots$
15. Quotient aus Centrifugalmoment und $M_y$	$e_x = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{1}{2} h,$	$\frac{3}{4} h,$	$\frac{5}{6} h,$	$\frac{7}{8} h, \dots$



	Parabel 0 <sup>ter</sup> Ordnung	1 <sup>ter</sup> Ordnung	2 <sup>ter</sup> Ordnung	3 <sup>ter</sup> Ordnung	...
16. Trägheitsmoment in Bezug auf Grunddecke	$I_p = T_x + T_y = \frac{ah}{3 \cdot 3}(3h^2 + 3a^2), \frac{bh}{4 \cdot 12}(12h^2 + 4b^2), \frac{ch}{5 \cdot 21}(21h^2 + 5b^2), \frac{ch}{6 \cdot 30}(30h^2 + 6d^2),$				...
u. s. w.					
b) Drehungskörper mit senkrechter Achse.					
1. Querschnittsfläche in Höhe $y$	$Q_y = a^2 \pi,$	$\frac{b^2}{h^2} \pi y^2,$	$c^2 \pi y^4,$	$\frac{d^2}{h^6} \pi y^6,$	...
2. Inhalt	$J = a^2 \pi \frac{h}{1},$	$b^2 \pi \frac{h}{3},$	$c^2 \pi \frac{h}{5},$	$d^2 \pi \frac{h}{7},$	...
3. statisches Moment für Grundfläche	$M_u = a^2 \pi \frac{h^2}{2},$	$b^2 \pi \frac{h^2}{4},$	$c^2 \pi \frac{h^2}{6},$	$d^2 \pi \frac{h^2}{8},$	...
4. Trägheitsmoment für Grundfläche	$T_u = a^2 \pi \frac{h^3}{3},$	$b^2 \pi \frac{h^3}{5},$	$c^2 \pi \frac{h^3}{7},$	$d^2 \pi \frac{h^3}{9},$	...
5. Schwerpunkthöhe	$h_s = \frac{1}{2} h,$	$\frac{3}{4} h,$	$\frac{5}{6} h,$	$\frac{7}{8} h,$	...
6. Trägheitsradius für Grundfläche	$Q_u = h \sqrt{\frac{1}{3}},$	$h \sqrt{\frac{3}{5}},$	$h \sqrt{\frac{5}{7}},$	$h \sqrt{\frac{7}{9}},$	...
7. Quotient $\frac{T_u}{M_u}$	$\frac{T_u}{M_u} = \frac{2}{3} h,$	$\frac{4}{5} h,$	$\frac{6}{7} h,$	$\frac{8}{9} h,$	...
8. Trägheitsmoment für senkrechte Achse	$T_p = \frac{a^4 \pi h}{2},$	$b^4 \pi h \frac{1}{10},$	$c^4 \pi h \frac{1}{18},$	$d^4 \pi h \frac{1}{26},$	...
9. Trägheitsmoment für senkrechten Hauptschnitt	$T_1 = \frac{a^4 \pi h}{4},$	$b^4 \pi h \frac{1}{20},$	$c^4 \pi h \frac{1}{36},$	$d^4 \pi h \frac{1}{52},$	...
10. Trägheitsmoment für Grundachse, $T'_p = T_1 + T_u$	$T_p = \frac{a^2 h \pi}{3 \cdot 4}(3a^2 + 4b^2),$	$\frac{b^2 \pi h}{5 \cdot 20}(5b^2 + 20h^2),$	$\frac{c^2 \pi h}{7 \cdot 36}(7b^2 + 36h^2),$	$\frac{d^2 \pi h}{9 \cdot 52}(9b^2 + 52h^2),$	...

u. s. w.



189) Alles andere läßt sich aus diesen Tabellen leicht ableiten, insbesondere auch die Momente für die Restflächen, deren Drehungskörper sich ebenso leicht behandeln lassen. Übungsbeispiele mathematischer und mechanischer Art, z. B. über abgeschrägte Körper, die über diesen Flächen stehen und ihre Schwerpunkte, über Centrifugalkräfte der massenbelegten Flächen, über seitlichen Wasserdruck gegen solche Flächen, über die Dynamik der genannten Drehungskörper lassen sich in großer Zahl anschließen. Die Fortsetzung der Tabellen nach rechts kann ohne Mühe auf Grund arithmetischer Reihen geschehen, ebenso die Interpolation für gebrochene Exponenten, für die unter 190) ein Beispiel gegeben werden soll.

190) Beispiel der Neilschen Parabel (semikubische Parabel)

$$x = \frac{ky^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch Einschaltung zwischen die zweite und dritte Kolonne findet man aus der Tabelle sofort

$$F = \frac{kh}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2}kh, \quad M_x = \frac{kh^2}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{7}kh^2, \quad T_x = \frac{kh^3}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{9}kh^3,$$

$$M_y = \frac{hk^2}{8}, \quad T_y = \frac{hk^3}{\frac{12+21}{2}} = \frac{2hk^3}{33}, \quad M_{xy} = \frac{k^2h^2}{10}, \quad y_s = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}h = \frac{5}{7}h,$$

$$x_s = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{8}k = \frac{5}{16}k, \quad \varrho_y = h \sqrt{\frac{2^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}} = h\sqrt{\frac{5}{9}},$$

$$\varrho_x = k \sqrt{\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\frac{12+21}{2}}} = k\sqrt{\frac{5}{33}}, \quad l_x = h \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{7}{9}h, \quad l_y = \frac{8}{\frac{12+21}{2}}k = \frac{16}{33}k,$$

$$e_y = \frac{M_{xy}}{M_x} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{10}k = \frac{7}{20}k, \quad e_x = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{4}{5}h, \quad \text{u. s. w.}$$

Ebenso ist der Drehungskörper der Neilschen Parabel leicht mittels der Interpolation innerhalb der Tabelle zu behandeln.

191) Die Parabeln von der Ordnung  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  u. s. w. können auch so behandelt werden, daß man die Parabel 2<sup>ter</sup>, 3<sup>ter</sup>, 4<sup>ter</sup> u. s. w. Ordnung um die Gerade von 45° Neigung klappt. Es handelt sich also nur um eine Vertauschung der Koordinaten, im übrigen sind die Rechnungen und Resultate dieselben.

Um zu zeigen, wie man aus den Resultaten der Tabelle die Resultate für die Restflächen der Rechtecke ableiten kann, werde das Beispiel der gewöhnlichen Parabel behandelt.



192) Beispiel der gewöhnlichen Parabel. Die Flächen verhalten sich wie 1:2, folglich  $S_1M:MS = 2:1$ , ebenso  $AB:BC$  und  $DE:EF$ . Da  $AB = \frac{3}{4}h - \frac{h}{2} = \frac{h}{4}$ , so ist  $BC = \frac{h}{8}$ , folglich  $FS = \frac{3}{8}h$ ; da ferner  $DE = \frac{c}{2} - \frac{3}{10}c = \frac{2}{10}c$ , so folgt  $EF = \frac{c}{10}$  und daher  $CS = \frac{4}{10}c = \frac{2}{5}c$  und  $CF = \frac{3}{5}c$ .

Fig. 148.

Die statischen Momente sind daher

$$M_x = \frac{2}{3}ch \cdot \frac{3}{8}h = \frac{ch^2}{4},$$

$$M_y = \frac{2}{3}ch \cdot \frac{3}{5}c = \frac{2}{5}hc^2.$$

Die Trägheitsmomente, durch Subtraktion aus dem Rechteck abgeleitet, sind

$$T_x = \frac{ch^3}{3} - \frac{ch^3}{5} = \frac{2}{15}ch^3,$$

$$T_y = \frac{hc^3}{3} - \frac{hc^3}{21} = \frac{2}{7}hc^3.$$

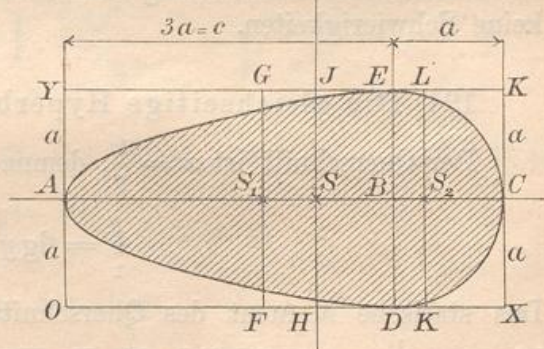
Für den Schwerpunkt erhält man

$$T_s = T_x - F \left(\frac{3}{8}h\right)^2 = \frac{2}{15}ch^3 - \frac{2}{3}ch \frac{9}{64}h^2 = ch^3 \left(\frac{2}{15} - \frac{3}{32}\right) = \frac{19}{480}ch^3,$$

$$T'_s = T_y - F \left(\frac{3}{5}c\right)^2 = \frac{2}{7}hc^3 - \frac{2}{3}ch \frac{9}{25}c^2 = hc^3 \left(\frac{2}{7} - \frac{6}{25}\right) = \frac{8hc^3}{175}.$$

193) Aufgabe. Ein Haken habe an der am stärksten beanspruchten Stelle einen Querschnitt, der nach der einen Seite durch einen Halbkreis mit Radius  $a$  begrenzt ist, nach der andern durch eine Parabel, die einem Rechteck mit den Seiten  $3a$  und  $2a$  eingeschrieben ist. Der Schwerpunkt und das maßgebende Trägheitsmoment sollen berechnet werden.

Fig. 149 a.



**Auflösung.** Nach vorigem Abschnitte ist

$$AS_1 = \frac{3}{5}c = \frac{9}{5}a,$$

aufserdem ist

$$AS_2 = 3a + \frac{3a}{4\pi} = \frac{3a}{4\pi}(4\pi + 1), \quad F_1 = \frac{2}{3}2a \cdot 3a = 4a^2, \quad F_2 = \frac{a^2\pi}{2}.$$



Folglich ist in Bezug auf  $OY$

$$\begin{aligned} M_y &= AS_1 \cdot F_1 + AS_2 \cdot F_2 = \frac{9}{5} a \cdot 4a^2 + \frac{3a}{4\pi} (4\pi + 1) \frac{a^2\pi}{2} \\ &= \frac{36a^3}{5} + \frac{3a^3(4\pi+1)}{8} = \frac{a^3}{40} [288 + 15(4\pi+1)] = \frac{a^3}{40} [303 + 60\pi]. \end{aligned}$$

Folglich

$$AS = e_s = \frac{M_y}{F_1 + F_2} = \frac{\frac{a^3}{40} [303 + 60\pi]}{4a^2 + \frac{a^2\pi}{2}} = \frac{a [303 + 60\pi]}{20(8 + \pi)}.$$

Für die Parabel ist in Bezug auf  $HJ$

$$T_s = \frac{8hc^3}{175} = \frac{8 \cdot 2a \cdot (3a)^3}{175} = \frac{432a^4}{175}.$$

Versoben muß werden um  $S_1S = e_s - \frac{9}{5}a$ . Demnach ist in Bezug auf  $HE$

$$T' = \frac{432a^4}{175} + \left(e_s - \frac{9}{5}a\right)^2 4a^2.$$

Für den Kreis ist in Bezug auf  $KL$

$$T_s'' = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) = a^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right).$$

Versoben wird um  $SS_2 = AS_2 - e_s = \frac{3a}{4\pi} (4\pi + 1) - e_s$ . Demnach ist in Bezug auf  $HE$

$$T'' = a^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) + \left[\frac{3a}{4\pi} (4\pi + 1) - e_s\right]^2 \frac{a^2\pi}{2}.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment ist

$$T = T' + T''.$$

Die numerische Ausrechnung für einen beliebigen Wert von  $a$  macht keine Schwierigkeiten.

194) Die gleichseitige Hyperbel  $x = \frac{1}{y}$ .

Der Querschnitt ist  $x = \frac{1}{y}$ , demnach wird die Fläche von 1 bis  $y$

$$\int_1^y \frac{1}{y} dy = \lg y.$$

Das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die  $X$ -Achse ist  $xy = \frac{1}{y} y = 1$ , folglich für die Fläche von 0 bis  $y$

$$M_x = \frac{y}{1},$$



obwohl diese Fläche sich nach rechts ins Unendliche erstreckt. Für die Fläche von 1 bis  $y$  ist

$$M_x = \frac{y}{1} - \frac{1}{1} = y - 1.$$

Die Schwerpunkthöhe der letzteren Fläche ist also

$$y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{y-1}{\text{elg } y}.$$

Dagegen ist das statische Moment in Bezug auf die  $Y$ -Achse mit Hilfe der Querschnittsformel

$$q_y = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} y^{-2}$$

zu berechnen. Für die Fläche von  $y = 1$  bis  $y$  ergibt sich

$$M_y = \frac{1}{2} \frac{y^{-1}}{-1} - \frac{1}{2} \frac{1^{-1}}{-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{y}\right) = \frac{y-1}{2y},$$

so daß ihre andere Schwerpunktskoordinate wird

$$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{y}\right)}{\text{elg } y} = \frac{y-1}{2y \text{elg } y}.$$

Das Trägheitsmoment  $T_x$  entspringt der Querschnittsformel

$$q_y = x \cdot y^2 = \frac{1}{y} y^2 = y,$$

demnach wird für die Fläche von 0 bis  $y$

$$\frac{y}{0} T = \frac{y^2}{2}, \quad \text{dagegen} \quad \frac{y}{1} T = \frac{1}{2} (y^2 - 1).$$

Der Trägheitsradius der Fläche von 1 bis  $y$  wird

$$\rho_x = \sqrt{\frac{\frac{y}{1} T}{\frac{y}{1} F}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} (y^2 - 1)}{\text{elg } y}} = \sqrt{\frac{y^2 - 1}{2 \text{elg } y}},$$

der Schwingungspunkt liegt für die Fläche von 1 bis  $y$  in der Höhe

$$y_m = \frac{\frac{1}{2} (y^2 - 1)}{y - 1} = \frac{1}{2} (y + 1),$$

für die Fläche von 0 bis  $y$  in der Höhe

$$y_m = \frac{\frac{y^2}{2}}{\frac{y}{1}} = \frac{y}{2}.$$



Das Trägheitsmoment in Bezug auf die  $Y$ -Achse ist aus

$$q_y = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} \frac{1}{y^3} = \frac{1}{3} y^{-3}$$

abzuleiten. Es ergibt sich für die Fläche von 1 bis  $y$

$$T_y = \frac{1}{3} \frac{y^{-2}}{-2} - \frac{1}{3} \frac{1^{-2}}{-2} = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{y^2} \right) = \frac{y^2 - 1}{6 y^2}.$$

Der entsprechende Trägheitsradius ist

$$\rho_y = \sqrt{\frac{T_y}{F}} = \sqrt{\frac{y^2 - 1}{6 y^2 \lg y}},$$

der entsprechende Schwingungspunkt

$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{y^2 - 1}{6 y^2} \cdot \frac{2 y}{y - 1} = \frac{y + 1}{3 y}.$$

Das Centrifugalmoment in Bezug auf beide Achsen ist aus der Querschnittsformel

$$q_y = \frac{x^2}{2} y = \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} y = \frac{1}{2 y}$$

zu berechnen.

Für die Fläche von 1 bis  $y$  ergibt sich

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \lg y - \frac{1}{2} \lg 1 = \frac{1}{2} \lg y.$$

Auch für ein Segment dieser Hyperbel, welches durch eine Gerade von  $-45^\circ$  abgeschnitten wird, lassen sich alle diese Berechnungen durchführen, indem man vom ganzen Dreieck die entsprechenden Teile abzieht.

Dreht sich die Hyperbel um die  $Y$ -Achse, so wird der Querschnitt des entstehenden Körpers

$$q_y = x^2 \pi = \frac{\pi}{y^2} = \pi y^{-2},$$

demnach wird der Inhalt von 1 bis  $y$

$$J_1^y = \pi \left( \frac{y^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} \right) = \pi \left( 1 - \frac{1}{y} \right) = \frac{\pi (y - 1)}{y},$$

z. B.

$$J_1^\infty = \pi \left( 1 - \frac{1}{\infty} \right) = \pi.$$

Das statische Moment für die Grundfläche wird aus

$$q_y = x^2 \pi \cdot y = \frac{\pi}{y^2} y = \frac{\pi}{y}$$

berechnet als

$$M_1^y = \pi \lg y.$$



Das Trägheitsmoment für die Grundfläche wird nach  $q_y = \frac{\pi}{y} y = \pi$

$$\frac{y}{1} T = \pi \left( \frac{y}{1} - \frac{1}{1} \right) = \pi (y - 1),$$

bezw.

$$\frac{y}{0} T = \pi y.$$

Sein Trägheitsmoment für die  $Y$ -Achse folgt aus  $q_y = \frac{x^4 \pi}{2} = \frac{\pi}{2y^4}$  als

$$\frac{y}{1} T = \frac{\pi}{2} \left( \frac{y^{-3}}{-3} - \frac{1^{-3}}{-3} \right) = \frac{\pi}{6} \cdot \left( 1 - \frac{1}{y^3} \right),$$

z. B.

$$\frac{\infty}{1} T = \frac{\pi}{6} \left( 1 - \frac{1}{\infty^3} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

195) Beispiel der Gravitationskurve  $x = \frac{1}{y^2}$ .

Querschnitt  $q_y = \frac{1}{y^2}$ , sein statisches Moment für die  $X$ -Achse  $xy = \frac{1}{y}$ , sein Trägheitsmoment für dieselbe  $xy^2 = 1$ . Folglich

$$\frac{y}{1} F = \frac{y^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} = 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y},$$

z. B.

$$\frac{\infty}{1} F = 1 - \frac{1}{\infty} = 1.$$

Statisches Moment

$$\frac{y}{1} M = \text{elg } y,$$

Trägheitsmoment

$$\frac{y}{1} T = \frac{y}{1} - \frac{1}{1} = y - 1.$$

Das statische Moment für die  $Y$ -Achse folgt aus  $q_y = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2y^4}$  als

$$\frac{y}{y} M = \frac{1}{2} \left( \frac{y^{-3}}{-3} - \frac{1^{-3}}{-3} \right) = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{y^3} \right),$$

das Trägheitsmoment aus  $q_y = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3y^6}$  als

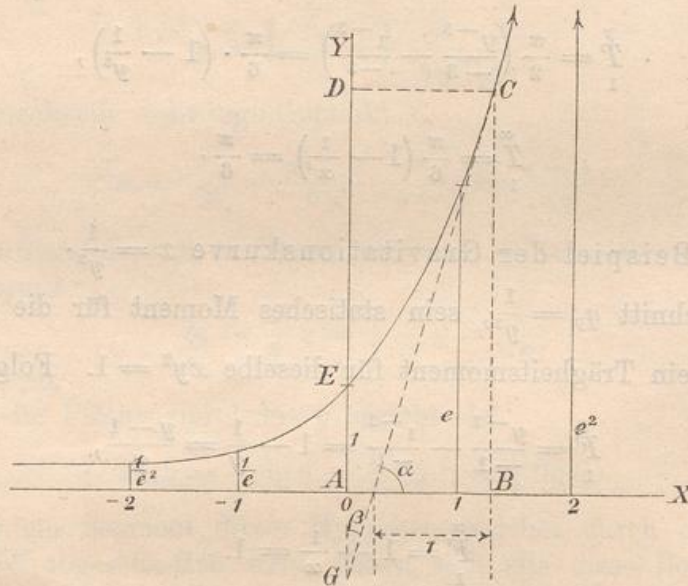
$$\frac{y}{1} T_y = \frac{1}{3} \left( \frac{y^{-5}}{-5} - \frac{1^{-5}}{-5} \right) = \frac{1}{15} \left( 1 - \frac{1}{y^5} \right).$$

Auf die Bedeutung für die kosmische Physik und die Potentialtheorie sei im Anschluß an das Methodische Lehrbuch aufmerksam gemacht.



195b) Ein transzendentes Beispiel. Nicht der technischen Wichtigkeit halber, sondern um zu zeigen, wie man transzendente Kurven aller Art, z. B. auch die Sinuskurve, die Cosinuskurve, die Kettenlinie  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  u. s. w. behandeln kann, soll die logarithmische Linie  $y = e^x$  oder  $x = \lg y$  als Beispiel eingehender untersucht werden. In Fig. 149 b ist sie dargestellt.

Fig. 149 b.



Zunächst folgt aus

$$1) \quad y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

nach Nr. 170, daß die Neigung  $\alpha$  der in dem Kurvenpunkte  $x, y$  angelegten Tangente sich aus

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x \end{aligned}$$

berechnet also aus

$$2) \quad \tan \alpha = e^x = y = \frac{y}{1}$$

Demnach ist die Projektion der in  $C$  angelegten Tangente stets gleich 1, wo auch  $C$  auf der Kurve liege. Die Tangente in  $C$  wird also konstruiert, indem man das Lot  $CB$  fällt, von  $B$  aus nach links die Strecke 1 abträgt und den freien Endpunkt mit  $C$  verbindet.



Für die Fläche  $ABCE$  folgt nach der Schichtenformel aus 1

$$\int_0^x \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1!2} + \frac{x^3}{2!3} + \frac{x^4}{3!4} + \dots = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

oder

$$3) \quad \int_0^x \frac{x}{1} = e^x - 1.$$

So ist z. B.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1} = 1 - e^{-\infty} = 1.$$

In Fig. 149 b ist für jedes Lot  $BC = y = e^x$  das statische Moment in Bezug auf die  $Y$ -Achse

$$yx = e^x x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots,$$

folglich ist das statische Moment der Fläche  $ABCE$  in Bezug auf die  $Y$ -Achse

$$M_y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^4}{2!4} + \frac{x^5}{3!5} + \dots$$

oder

$$M_y = x^2 \left( \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + x^3 \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + x^4 \left( \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) + \dots$$

$$= x \left( \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - \left( \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \right)$$

$$= x(e^x - 1) - \left( e^x - 1 - \frac{x}{1!} \right) = xe^x - e^x + 1 - x + x = xe^x - e^x + 1,$$

also

$$4) \quad M_y = e^x(x - 1) + 1.$$

Das Trägheitsmoment der Geraden  $BC$  in Bezug auf die  $Y$ -Achse ist

$$e^x \cdot x^2 = x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \dots,$$

so daß für die Fläche von 0 bis  $x$  wird

$$T_y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{1!4} + \frac{x^5}{2!5} + \frac{x^6}{3!6} + \dots$$

Nun ist aber der Reihe nach

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{1!} - 2 \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right)$$

$$\frac{1}{1!4} = \frac{1}{2!} - 2 \left( \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right)$$

$$\frac{1}{2!5} = \frac{1}{3!} - 2 \left( \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right)$$

u. s. w. Folglich ist



$$\begin{aligned}
T_y &= x^3 \left( \frac{1}{1!} - \frac{2}{2!} + \frac{2}{3!} \right) + x^4 \left( \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} + \frac{2}{4!} \right) + x^5 \left( \frac{1}{3!} - \frac{2}{4!} + \frac{2}{5!} \right) + \dots \\
&= x^3 \left[ \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] - 2x \left[ \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right] \\
&\quad + 2 \left[ \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right] = x^2 (e^x - 1) - 2x \left( e^x - 1 - \frac{x}{1!} \right) \\
&\quad + 2 \left[ e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} \right] = e^x (x^2 - 2x + 2) - x^2 + 2x^2 - \frac{2x^2}{2} \\
&\quad + 2x - 2x - 2 = e^x (x^2 - 2x + 2) - 2,
\end{aligned}$$

oder endlich

$$5) \quad T_y = e^x (x^2 - 2x + 2) - 2.$$

Das statische Moment  $M_x$  in Bezug auf die X-Achse ist zu behandeln mit Hilfe der Querschnittsformel

$$q_x = e^x \cdot \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots \right].$$

Für die Fläche von 0 bis  $x$  giebt dies

$$\begin{aligned}
M_x &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{1} + \frac{2x^2}{1!2} + \frac{4x^3}{2!3} + \frac{8x^4}{3!4} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots \right]
\end{aligned}$$

oder

$$6) \quad M_x = \frac{1}{4} [e^{2x} - 1].$$

Das Trägheitsmoment  $T_x$  verlangt die Behandlung der Querschnittsformel

$$q_x = \frac{(e^x)^3}{3} = \frac{e^{3x}}{3} = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{3x}{1!} + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \frac{81x^4}{4!} + \dots \right].$$

Für die Fläche von 0 bis  $x$  giebt dies

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{1}{3} \left[ \frac{x}{1} + \frac{3x^2}{1!2} + \frac{9x^3}{2!3} + \frac{27x^4}{3!4} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ \frac{3x}{1!} + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \frac{81x^4}{4!} + \dots \right]
\end{aligned}$$

oder

$$7) \quad T_x = \frac{1}{9} [e^{3x} - 1].$$

Für den Schwerpunkt der Fläche  $ABCE$  folgen die Koordinaten

$$8) \quad x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{e^x (x-1) - 1}{e^x - 1}, \quad y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{1}{4}(e^{2x} - 1)}{e^x - 1} = \frac{1}{4}(e^x + 1).$$



Die Trägheitsradien in Bezug auf die beiden Achsen sind

$$9) \quad \varrho_y = \sqrt{\frac{T_y}{F}} = \sqrt{\frac{e^x (x^2 - 2x + 2) - 2}{e^x - 1}},$$

$$\varrho_x = \sqrt{\frac{T_x}{F}} = \sqrt{\frac{1}{9} \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}}.$$

Die Abstände der Schwingungspunkte in Bezug auf beide Achsen sind

$$10) \quad x_m = \frac{T_y}{M_y} = \frac{e^x (x^2 - 2x + 2) - 2}{e^x (x - 1) - 1},$$

$$y_m = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{1}{9} (e^{3x} - 1)}{\frac{1}{4} (e^{2x} - 1)} = \frac{4}{9} \frac{e^{3x} - 1}{e^{2x} - 1}.$$

Auch das Centrifugalmoment  $M_{xy}$  in Bezug auf beide Achsen läßt sich berechnen. Die entsprechende Querschnittsformel ist

$$\frac{(e^x)^2}{2} x = \frac{x e^{2x}}{2} = \frac{x}{2} \left[ 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots \right]$$

oder

$$q_x = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{2x^2}{1!} + \frac{4x^3}{2!} + \frac{8x^4}{3!} + \frac{16x^5}{4!} + \dots \right].$$

Daraus folgt für die Fläche von 0 bis  $x$

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{1!3} + \frac{4x^4}{2!4} + \frac{8x^5}{3!5} + \frac{16x^6}{4!6} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left[ \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{1!3} + \frac{(2x)^4}{2!4} + \frac{(2x)^5}{3!5} + \frac{(2x)^6}{4!6} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left[ (2x)^2 \left( \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + (2x)^3 \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + (2x)^4 \left( \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) \dots \right]$$

oder, getrennt geschrieben:

$$M_{xy} = \frac{2x}{8} \left[ \frac{(2x)}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots \right] - \frac{1}{8} \left[ \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots \right],$$

oder

$$11) \quad M_{xy} = \frac{2x}{8} [e^{2x} - 1] - \frac{1}{8} \left[ e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1} \right]$$

$$= \frac{e^{2x}}{8} [2x - 1] - \frac{1}{8} [2x - 2x - 1] = \frac{e^{2x}}{8} [2x - 1] + \frac{1}{8}.$$

In gleicher Weise läßt sich dieselbe Kurve mit Hilfe der Gleichung

$$x = {}^e \lg y,$$

oder, indem man den Nullpunkt um die Strecke 1 nach oben verschiebt, mit Hilfe von

$$12) \quad x = \lg(1 + z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$



behandeln. Man kann aber die obigen Resultate von den zum Rechteck  $ABCD$  gehörigen abziehen und so das Nötige für die Fläche  $CDE$  sofort hinschreiben. So ist z. B.

$$13) F' = \frac{y}{1} = x e^x - (e^x - 1) = e^x (x - 1) + 1 = y (\lg y - 1) + 1$$

Die Behandlung der Reihe 12) würde auf  $(1+z)[\lg(1+z)-1]+1$  führen. Man achte darauf, daß die Formeln für  $F'$  und  $M_y$  identisch sind.

Das statische Moment von  $CDE$  für die  $Y$ -Achse wird

$$\begin{aligned} M'_y &= (x e^x) \frac{x}{2} - [e^x (x - 1) + 1] = e^x \left[ \frac{x^2}{2} - x + 1 \right] - 1 \\ &= y \left[ \frac{1}{2} \lg y \right]^2 - \lg y + 1 - 1. \end{aligned}$$

Man achte darauf, daß dies die Hälfte von  $T_y$  ist.

Das Trägheitsmoment für die  $Y$ -Achse wird

$$\begin{aligned} T'_y &= \frac{e^x x^3}{3} - [e^x (x^2 - 2x + 2) - 2] = e^x \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 2 \right] + 2 \\ &= y \left[ \frac{1}{3} (\lg y)^3 - (\lg y)^2 + 2 \lg y - 2 \right] + 2. \end{aligned}$$

Als statisches Moment für die  $X$ -Achse findet man

$$M'_x = (x e^x) \frac{e^x}{2} - \frac{1}{4} [e^{2x} - 1] = e^{2x} \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) + 1 = y^2 \left[ \frac{1}{2} \lg y - \frac{1}{4} \right] + 1,$$

als Trägheitsmoment für die  $X$ -Achse

$$T'_x = \frac{x (e^x)^3}{3} - \frac{1}{9} [e^{3x} - 1] = e^{3x} \left[ \frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right] + 1 = y^3 \left[ \frac{1}{3} \lg y - \frac{1}{9} \right] + 1.$$

Das Centrifugalmoment von  $CDE$  für beide Achsen wird

$$\begin{aligned} M'_{xy} &= \frac{x^2 (e^x)^2}{4} - \frac{e^{2x}}{8} (2x - 1) + \frac{1}{8} = \frac{e^{2x}}{8} [2x^2 - 2x + 1] + \frac{1}{8} \\ &= \frac{y^2}{8} [2 (\lg y)^2 - 2 \lg y + 1] + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt der Fläche  $CDE$  hat die Koordinaten

$$x_s = \frac{M'_y}{F'} = \frac{e^x \left[ \frac{x^2}{2} - x + 1 \right] - 1}{e^x [x - 1] + 1} = \frac{y \left[ \frac{1}{2} (\lg y)^2 - \lg y + 1 \right] - 1}{y [\lg y - 1] + 1},$$

$$y_s = \frac{M'_x}{F'} = \frac{e^{2x} \left[ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right] + 1}{e^x [x - 1] + 1} = \frac{y^2 \left[ \frac{1}{2} \lg y - \frac{1}{4} \right] + 1}{y [\lg y - 1] + 1}.$$

Die Trägheitsradien sind



$$\begin{aligned}
 \rho_y &= \sqrt{\frac{T'_y}{F'}} = \sqrt{\frac{e^x \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 2 \right] + 2}{e^x [x - 1] + 1}} \\
 &= \sqrt{\frac{y \left[ \frac{1}{3} (\lg y)^3 - (\lg y)^2 + 2 \lg y - 2 \right] + 2}{y [\lg y - 1] + 1}}, \\
 \rho_x &= \sqrt{\frac{T'_x}{F'}} = \sqrt{\frac{e^{3x} \left[ \frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right] + 1}{e^x [x - 1] + 1}} = \sqrt{\frac{y^3 \left[ \frac{1}{3} \lg y - \frac{1}{9} \right] + 1}{y [\lg y - 1] + 1}}.
 \end{aligned}$$

Die Schwingungspunkte in Bezug auf beide Achsen sind

$$\begin{aligned}
 y_m &= \frac{T'_y}{M'_y} = \frac{e^x \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 2 \right] + 2}{e^x \left[ \frac{x^2}{2} - x + 1 \right] - 1} \\
 &= \frac{y \left[ \frac{1}{3} (\lg y)^3 - (\lg y)^2 + 2 \lg y - 2 \right] + 2}{y \left[ \frac{1}{2} (\lg y)^2 - \lg y + 1 \right] - 1}, \\
 x_m &= \frac{T'_x}{M'_x} = \frac{e^{3x} \left[ \frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right] + 1}{e^{2x} \left[ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right] + 1} = \frac{y^3 \left[ \frac{1}{3} \lg y - \frac{1}{9} \right] + 1}{y^2 \left[ \frac{1}{2} \lg y - \frac{1}{4} \right] + 1}.
 \end{aligned}$$

Auf die mit  $\frac{M_{xy}}{M_x}$ ,  $\frac{M_{xy}}{M_y}$ ,  $\frac{M'_{xy}}{M'_x}$  und  $\frac{M'_{xy}}{M'_y}$  zusammenhängenden physikalischen Dinge braucht nur hingewiesen zu werden.

Auch der durch Drehung um die X-Achse aus der Kurve  $y = e^x$  entstehende Körper läßt sich nach jeder Richtung bequem berechnen. Denn Querschnitt

$$q_x = y^2 \pi = e^{2x} \pi = \pi \left[ 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots \right],$$

folglich Inhalt

$$\begin{aligned}
 J_0^x &= \pi \left[ \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \frac{8x^4}{4!} + \dots \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

oder

$$J_0^x = \frac{\pi}{2} [e^{2x} - 1].$$

Sein statisches Moment in Bezug auf die durch die Y-Achse dargestellte Ebene ist aus der Querschnittsformel



$$\begin{aligned}
 q_x &= xy^2\pi = xe^{2x}\pi = \pi x \left[ 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \dots \right] \\
 &= \pi \left[ x + \frac{2x^2}{1!} + \frac{4x^3}{2!} + \frac{8x^4}{3!} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

zu berechnen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \overset{x}{M}_0 &= \pi \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{1!3} + \frac{4x^4}{2!4} + \frac{8x^5}{3!5} + \dots \right] \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[ \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{1!3} + \frac{16x^4}{2!4} + \frac{32x^5}{3!5} + \dots \right] \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[ (2x)^2 \left( \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + (2x)^3 \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + (2x)^4 \left( \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) + \dots \right] \\
 &= \frac{2x\pi}{4} \left[ \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots \right] - \frac{\pi}{4} \left[ \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots \right] \\
 &= \frac{2x\pi}{4} [e^{2x} - 1] - \frac{\pi}{4} [e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1}] = \frac{\pi e^{2x}}{4} [2x - 1] - \frac{\pi}{4} [2x - 1 - 2x]
 \end{aligned}$$

oder endlich

$$\overset{x}{M}_0 = \frac{\pi e^{2x}}{4} [2x - 1] + \frac{\pi}{4}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Ebene folgt aus der Querschnittsformel

$$\begin{aligned}
 q_x &= y^2\pi x^2 = \pi x^2 e^{2x} = \pi x^2 \left[ 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \dots \right] \\
 &= \pi \left[ x^2 + \frac{2x^3}{1!} + \frac{4x^4}{2!} + \frac{8x^5}{3!} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\overset{x}{T}_0 = \pi \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{1!4} + \frac{4x^5}{2!5} + \frac{8x^6}{3!6} + \dots \right].$$

Die Zerlegung in Nr. 195 gibt

$$\begin{aligned}
 \overset{x}{T}_0 &= \frac{\pi}{8} \left[ (2x)^3 \left( \frac{1}{1!} - \frac{2}{2!} + \frac{2}{3!} \right) + (2x)^4 \left( \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} + \frac{2}{4!} \right) + (2x)^5 \left( \frac{1}{3!} - \frac{2}{4!} + \frac{2}{5!} \right) + \dots \right] \\
 &= \frac{\pi}{8} (2x)^2 \left[ \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots \right] - \frac{2\pi}{8} (2x) \left[ \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots \right] \\
 &\quad + \frac{2\pi}{8} \left[ \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \dots \right] \\
 &= \frac{2x^2\pi}{4} [e^{2x} - 1] - \frac{2x\pi}{4} \left[ e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1} \right] + \frac{\pi}{4} \left[ e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1} - \frac{4x^2}{2} \right] \\
 &= \frac{\pi}{4} e^{2x} [2x^2 - 2x + 1] - \frac{\pi}{4} [2x^2 - 2x - 4x^2 + 1 + 2x + 4x^2] \\
 &= \frac{\pi}{4} e^{2x} [2x^2 - 2x + 1] - \frac{\pi}{4} [2x^2 + 1].
 \end{aligned}$$



Der durch Drehung um die  $Y$ -Achse entstehende Körper kann mit Hilfe der Querschnittsformel

$$x^2\pi = \pi [\lg(1+z)]^2 = \pi \left[ \frac{z^1}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \right]^2$$

behandelt werden. Einfacher geschieht die Berechnung jedes seiner beiden Teile, indem man von dem durch Drehung des Rechtecks  $ABCD$  entstehenden Cylinder den vorher berechneten Körper abzieht. Ebenso verfährt man mit dem statischen und dem Trägheitsmomente.

Damit kann die Untersuchung von  $y = e^x$  und  $x = \lg y$  abgeschlossen und als Beispiel für die Behandlung anderer transzcendenter Kurven hingestellt werden.

#### D. Die Schichtenformel für Kreisbogen.

196) Die Tragweite der Schichtenformel läßt sich dadurch erweitern, daß man sie auch auf concentrische Kreisbogen anwendet. Ein Beispiel wird dies klären.

Kreisbogen und Kreisfläche.  
Die Kreislinie von Radius  $r$  hat den Umfang  $2r\pi$ . Ihre sämtlichen Punkte haben vom Centrum die Entfernung  $r$ . Während also

$$q_r = 2r\pi$$

als Querschnitt aufzufassen ist, kann man

$$q_r = (2r\pi)r = 2r^2\pi$$

als Polarmoment erster Ordnung,

$$q_r = (2r\pi)r^2 = 2r^3\pi$$

als Polarmoment zweiter Ordnung betrachten.

Demnach wird die Fläche des Kreises von 0 bis  $r$

$$F = 2\pi \int_0^r \frac{r^2}{2} = r^2\pi,$$

das Polarmoment erster Ordnung der Kreisfläche

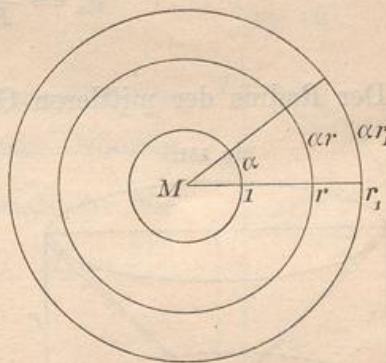
$$M_p = \frac{2\pi r^3}{3},$$

das Polarmoment zweiter Ordnung der Kreisfläche

$$T_p = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{2}.$$

Letzteres ist das polare Trägheitsmoment.

Fig. 150.





Das Polarmoment erster Ordnung findet Anwendung z. B. bei der Untersuchung der mittleren Drehungsgeschwindigkeit für den Fall, daß die Fläche sich um eine Achse dreht, die senkrecht zu ihrer Ebene steht. Ist  $\vartheta$  die auf den Radius  $r$  reduzierte Geschwindigkeit, so ist für jedes in der Entfernung  $r$  liegendes Flächenteilchen die sogenannte Bewegungsquantität

$$mv = mr\vartheta,$$

für den entsprechenden Kreisbogen also  $(2r\pi)r\vartheta = 2r^2\pi\vartheta$ , und für die Gesamtfläche

$$2\pi\vartheta \frac{r^3}{3} = M_p\vartheta.$$

Ist nun  $v_m$  die mittlere Geschwindigkeit der Fläche, so ist zu setzen

$$v_m F = M_p\vartheta = 2\pi\vartheta \frac{r^3}{3},$$

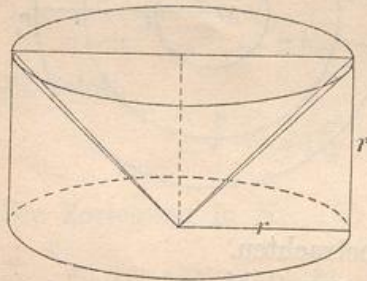
folglich ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{M_p}{F} \vartheta = \frac{2\pi\vartheta r^3}{3 \cdot 2\pi \frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3} r \vartheta.$$

Der Radius der mittleren Geschwindigkeit ist also

$$r_m = \frac{M_p}{F} = \frac{2\pi r^3}{3 \cdot 2\pi \frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3} r.$$

Fig. 151.



Cylinder (bezw. Säule) einen Kegel von  $45^\circ$  Seitenneigung ausschneidet.

Seine Bedeutung ist die, daß die in ihm vereinigt gedachte Masse dieselbe Bewegungsquantität giebt. Man kann sich das Polarmoment veranschaulichen als den Aufsenkörper, der dadurch entsteht, daß man aus dem über der Fläche stehenden

197) Für den Kreissektor erhält man in entsprechender Weise, wenn  $\alpha$  der zum Radius 1 gehörige Bogen des Sektors ist, als Querschnitt  $q_r = \alpha r$ , als Fläche  $F = \frac{\alpha r^2}{2}$ , als Polarmoment erster Ordnung  $M_p = \frac{\alpha r^3}{3}$ , als Polarmoment zweiter Ordnung  $T_p = \frac{\alpha r^4}{4}$ .

Für den Sektor des concentrischen Kreisrings ergibt sich als Fläche



$$\frac{r_2}{r_1} \bar{F} = \frac{\alpha}{2} (r_2^2 - r_1^2),$$

als Polarmoment erster Ordnung

$$M_p = \frac{\alpha}{3} (r_2^3 - r_1^3),$$

als Polarmoment zweiter Ordnung

$$T_p = \frac{\alpha}{4} (r_2^4 - r_1^4).$$

Der Radius mittlerer Geschwindigkeit wird

$$r_m = \frac{2}{3} \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2},$$

was noch durch  $r_2 - r_1$  gekürzt werden könnte.

198) Dies eignet sich nicht nur für die Berechnung der Polarmomente, sondern auch für die Berechnung der axialen Momente, nur muß man dann das Nötige für den Einzelbogen bereits berechnet haben.

Beispiel der Halbkreisfläche.

Der Schwerpunkt des Halbkreisbogens liegt in der Entfernung  $\frac{2r}{\pi}$ , sein Axialmoment erster Ordnung ist also  $r\pi \frac{2r}{\pi} = 2r^2$ . Folglich ist das statische Moment der Halbkreisfläche in Bezug auf  $AB$   $M_y = \frac{2r^3}{3}$ . Der Schwerpunktsabstand also ist

$$y_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{2}{3} r^3}{\frac{r^2 \pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Das polare Trägheitsmoment des Halbkreisbogens ist  $r\pi r^2$ , das axiale also  $\frac{r\pi r^2}{2} = \frac{r^3\pi}{2}$ . Daher ist für die ganze Fläche

$$T_y = \frac{\pi r^4}{2 \cdot 4} = \frac{r^4\pi}{8}.$$

199) Die Polarmomente erster Ordnung sind nicht so leicht und elegant zu behandeln wie die der zweiten Ordnung, da weder ein Verschiebungssatz von einfacher Form besteht, noch eine einfach zu behandelnde Beziehung zu den  $M_x$  und  $M_y$ . So bietet z. B. die Aufgabe, das Polarmoment erster Ordnung für ein Quadrat zu berechnen und daraus den Punkt mittlerer Geschwindigkeit zu bestimmen,

Fig. 152.

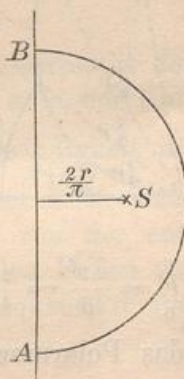
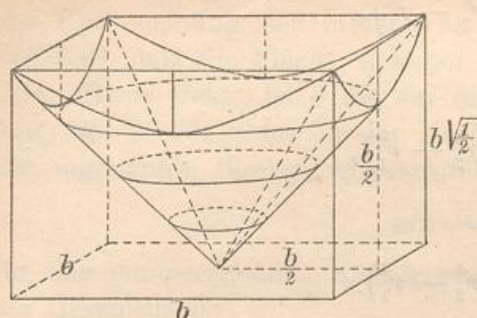




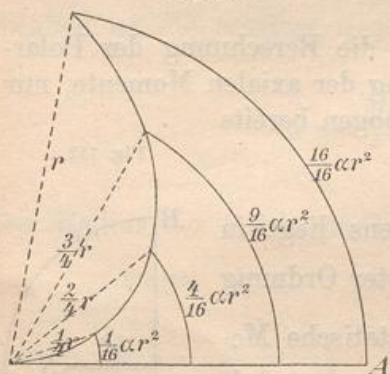
Fig. 153.



für die elementare Behandlung mancherlei Schwierigkeiten. Es würde sich um den Körper handeln, der stehen bleibt, wenn der Kegel von  $45^\circ$  Seitenneigung aus der quadratischen Säule ausgeschnitten wird, bei dem also hyperbolische Grenzlinien auftreten\*).

200) Dagegen lassen sich leichte Betrachtungen über Spiralen anschließen. Zunächst gelten die für den Kreissektor abgeleiteten Formeln auch für den entsprechenden Raum zwischen zwei kongruenten Spiralen irgend welcher Art, die gegeneinander um den Winkel  $\alpha$  gedreht sind.

Fig. 154.



Bei der Archimedischen Spirale sind die Bogen, vom Anfangsradius  $MA$  aus gerechnet, proportional dem Quadrate des Radius. Die Querschnittsformel wird also z. B.

$$q_r = ar^2.$$

Verhalten sich in der Figur die Bogen wie  $1:4:9:16$ , so entspricht dies Winkeln  $\vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, 4\vartheta$ . Die Berechnungen geschehen ganz nach Art der Parabel zweiter Ordnung. Die Fläche wird

$\int_0^r \frac{r}{3} = \frac{ar^3}{3} = \frac{2}{3}$  Sektor. Das Polarmoment erster Ordnung wird  $M_p = \frac{ar^4}{4}$ , das Polarmoment zweiter Ordnung  $T_p = \frac{ar^5}{5}$ . Der Radius mittlerer Drehungsgeschwindigkeit hat die Länge  $r_m = \frac{3}{4}r$ , der Trägheitsradius die Länge  $\frac{3}{5}r$ .

Für die Spirale nächsthöherer Ordnung ist  $q_r = ar^3$ , für sie ist

$$\int_0^r \frac{r}{4} = \frac{ar^4}{4} = \frac{1}{2} \text{ Sektor, } M_p = \frac{ar^5}{5}, T_p = \frac{ar^6}{6}, \text{ u. s. w.}$$

Für die Spirale mit Querschnittsformel  $q_r = a\frac{1}{r}$  ist die Fläche

\*) Analytisch kommt die Sache auf die Integration eines cyclometrischen Ausdrucks hinaus, die sich nur mit Hilfe langwieriger Reihenbetrachtungen elementar umgehen läßt. Später aber soll ein Abbildungsverfahren angegeben werden, durch welches sich die Aufgabe bequem erledigt.



von  $r = 1$  aus zu rechnen und ergibt sich als  $\overset{r}{F} = a \operatorname{elg} r$ . Dagegen ist, von 0 bis  $r$  gerechnet  $M_p = a \frac{r}{1}$ ,  $T_p = a \frac{r^2}{2}$ .

Für die Spirale mit Querschnittsformel  $q_r = a \frac{1}{r^2}$  ist die Fläche von 1 bis  $\infty$  gerechnet  $\overset{\infty}{F} = -\frac{ar^{-1}}{-1} = \frac{a}{r}$ , das Polarmoment erster Ordnung von 1 bis  $r$  gerechnet,  $M_p = a \operatorname{elg} r$ , das Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{ar}{1}.$$

Die Analogie mit den Parabeln ist also eine vollkommene und soll hier nur deshalb nicht weiter erörtert werden, weil der Gegenstand für die Technik von geringerer Bedeutung ist.

Bei der logarithmischen Spirale  $r = \alpha e^\vartheta$  oder  $\vartheta = \operatorname{elg} \frac{r}{\alpha}$  handelt es sich um die Querschnittsformel  $q_r = r\vartheta = r \operatorname{elg} \frac{r}{\alpha}$ . Dabei hat man sich für die elementare Behandlung der bekannten Reihenentwicklung zu bedienen und auf die Reihe die Schichtenformel anzuwenden.

Für die Kugel sei beiläufig bemerkt, daß der Schwerpunkt des Meridiankeils, der nach 50) für sehr kleine Keilwinkel  $\alpha$  in der Entfernung  $\frac{3\pi}{16} r$  liegt, der Punkt mittlerer Drehungsgeschwindigkeit ist, denn bei unendlich kleinem  $\alpha$  fällt der Punkt mittlerer Entfernung von der Achse mit dem Punkte mittlerer Entfernung von der entsprechenden Ebene zusammen, so daß es sich in beiden Fällen um den Schwerpunkt des Keils handelt. Die Bewegungsquantität der Kugel ist also

$$\frac{3\pi}{16} r \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi \vartheta = \frac{r^4 \pi^2}{4} \vartheta,$$

wenn  $\vartheta$  die Winkelgeschwindigkeit ist.

Der darin liegende Schluß ist dadurch gerechtfertigt, daß die Schwerpunkte der Teilkörper sämtlich auf einem Kreise liegen.

Für Drehungskörper also handelt es sich stets um den durch  $\frac{T}{M}$  gegebenen Punkt, sobald die Hauptachse des Körpers mit der Drehungsachse zusammenfällt. Darin liegt eine neue Bedeutung für diese wichtige Formel. Sie giebt die Punkte mittlerer Entfernung von der Hauptachse für Drehungskörper an.

Um allgemeineres über Kreissegmente und Kreisabschnitte zu erhalten, löse man folgende



201) **Hilfsaufgabe.** Der Kreisbogen mit Winkel  $\alpha$  hat in Bezug auf den senkrecht zur Symmetrieachse stehenden Durchmesser welches Trägheitsmoment?

**Auflösung.** Man projiziere jedes Bogenteilchen  $s$  auf die zum Durchmesser parallele Tangente  $EF$ , dann ist  $xs = \frac{h}{n} \cdot r$ , eine Bemerkung, die man von der Berechnung der Kugelkalotte bzw. Zone her kennt ( $2x\pi s = 2r\pi \frac{h}{n}$ ). Demnach ist bei Einteilung in gleiche  $\frac{h}{n}$

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + \dots = \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \dots,$$

und

$$\sum s x^2 = s_1 x_1^2 + s_2 x_2^2 + s_3 x_3^2 + \dots = h r \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Der letzte Bruch bedeutet, da auch  $AD$  in gleiche Teile, deren Zahl unendlich groß zu nehmen ist, eingeteilt wurde, die mittlere Höhe des Flächenstückes  $ABECD$  über der Grundlinie  $AD$ . Diese ist also

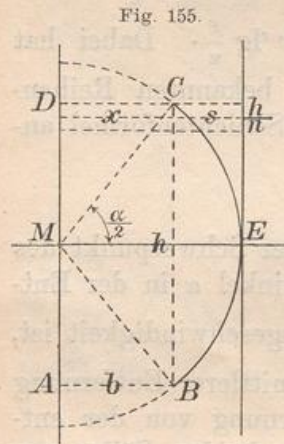


Fig. 155.

$$x_m = \frac{\text{Sektor } MBEC + 2\triangle MCD}{\text{Grundlinie } h}$$

$$= \frac{r^2 \pi \frac{\alpha^0}{360^0} + \frac{1}{2} b h}{h}$$

oder

$$x_m = \frac{r^2 \pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} r \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2r \sin \frac{\alpha}{2}}{h}$$

$$= \frac{r^2 \pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2} \sin \alpha}{h}.$$

Demnach ist

$$\sum s x^2 = h r x_m = h r \frac{r^2 \pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2} \sin \alpha}{h}$$

oder

$$T_y = \sum s x^2 = r^3 \left[ \pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} \sin \alpha \right]$$

das gesuchte Trägheitsmoment.

[Probe für  $\alpha = 180^0$  gibt  $\frac{r^3 \pi}{2}$ , was die Hälfte von  $r^3 \pi$  und der vierte Teil von  $(2r\pi) r^2$  ist. Letzteres aber ist offenbar das polare Trägheitsmoment der Kreislinie für ihren Mittelpunkt.]

Nach der zur Probe gemachten Bemerkung ist für den Mittelpunkt  $M$

$$T_p = 2r^3 \pi \frac{\alpha^0}{360^0} = r^3 \pi \frac{\alpha^0}{180^0}$$



das polare Trägheitsmoment des Bogens, demnach ist das andere axiale

$$T_x = T_p - T_y = 2r^3\pi \frac{\alpha}{360} - r^3\pi \frac{\alpha}{360} - r^3 \frac{1}{2} \sin \alpha$$

oder

$$T_x = r^3 \left[ \pi \frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right].$$

202) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment des Kreisausschnittes (Sektors) in Bezug auf den zur Symmetrieachse senkrecht stehenden Durchmesser zu finden.

**Auflösung.** Die vorige Formel gilt für jeden einzelnen der in Fig. 156 gezeichneten Bogen innerhalb des Sektors. Faßt man aber in

$$q_r = r^3 \left( \pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} \sin \alpha \right)$$

$r$  als veränderliche Größe auf, so geht nach der Schichtenformel, die auch hier angewandt werden darf,  $r^3$  in  $\frac{r^4}{4}$  über, so daß man für die Sektorfläche hat

$$T_y = \frac{r^4}{4} \left[ \pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} \sin \alpha \right] = \frac{r^4}{8} \left[ \pi \frac{\alpha}{180} + \sin \alpha \right].$$

(Probe: Ist  $\alpha = 180^\circ$ , so folgt  $T_y = \frac{r^4\pi}{8}$ , was mit dem Früheren übereinstimmt. Ebenso ist für  $\alpha = 90^\circ$

$$T_y = \frac{r^4}{4} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{r^4}{16} (\pi + 2).$$

Ebenso für  $\alpha = 45^\circ$

$$T_y = \frac{r^4}{4} \left[ \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right] = \frac{r^4}{32} [\pi + 2\sqrt{2}].)$$

Für den Sektor ist ferner

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2} \frac{\alpha}{360} = \frac{r^4\pi\alpha}{720},$$

folglich ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Symmetrieachse  $ME$

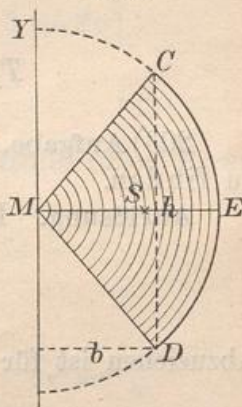
$$T_x = T_p - T_y = \frac{r^4}{4} \left[ \pi \frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right] = \frac{r^4}{8} \left[ \frac{\pi\alpha}{180} - \sin \alpha \right].$$

Der Schwerpunktsabstand ist nach Nr. 10

$$e_s = \frac{2rh}{3b} = \frac{240r \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt giebt

Fig. 156.





$$T_p = \frac{r^4 \pi}{2} \frac{\alpha}{360} - \frac{240^2 r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi^2 \alpha^2} \cdot r^2 \pi \frac{\alpha}{360} = \frac{r^4 \pi}{2} \frac{\pi}{360} - \frac{160 r^4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha}$$

$$= r^4 \left[ \frac{\pi \alpha}{720} - \frac{160 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha} \right].$$

Ebenso ist dann

$$T_x = \frac{r^4}{8} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right]$$

$$T_y = \frac{r^4}{8} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} + \sin \alpha \right] - \frac{160 r^4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha}.$$

203) Aufgabe. Die Trägheitsmomente des Kreisabschnittes zu finden.

Auflösung. In Fig. 156 war für den Durchmesser

$$T_y' = \frac{r^2}{8} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} + \sin \alpha \right].$$

Abziehen ist für das Dreieck  $MDC$

$$T_y'' = \frac{hb^3}{4} = \frac{2r \sin \frac{\alpha}{2} r^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{8}.$$

Demnach wird für das Segment  $BEC$  in Bezug auf den Durchmesser

$$T_y = \frac{r^4}{8} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} + \sin \alpha - \sin \alpha (1 + \cos \alpha) \right] = \frac{r^4}{8} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \cos \alpha \right]$$

oder

$$1) \quad T_y = \frac{r^4}{16} \left[ \frac{\pi \alpha}{90} - \sin 2\alpha \right].$$

Für  $ME$  war

$$T_x' = \frac{r^4}{8} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right].$$

Abziehen ist für Dreieck  $MDC$

$$T_x'' = \frac{bh^3}{48} = \frac{r \cos \frac{\alpha}{2} \left( 2r \sin \frac{\alpha}{2} \right)^3}{48} = \frac{r^4 \cdot 4 \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{48}$$

oder

$$T_x' = \frac{r^4 \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{12} = \frac{r^4 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{24}.$$

Demnach wird für das Segment in Bezug auf  $ME$



$$T_x = \frac{r^4}{8} \left[ \frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha - \frac{1}{3} \sin\alpha (1 - \cos\alpha) \right] = \frac{r^4}{24} \left[ \frac{\pi\alpha}{60} - 4\sin\alpha + \sin\alpha \cos\alpha \right]$$

oder

$$T_x = \frac{r^4}{24} \left[ \frac{\pi\alpha}{60} - 4\sin\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right] = \frac{r^4}{48} \left[ \frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha \right].$$

Addiert man dazu

$$T_y = \frac{r^4}{48} \left[ \frac{\pi\alpha}{30} + 3\sin 2\alpha \right],$$

so erhält man in Bezug auf  $M$

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{r^4}{48} \left[ \frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha + \frac{\pi\alpha}{30} + 3\sin 2\alpha \right] \\ &= \frac{r^4}{48} \left[ \frac{\pi\alpha}{15} - 8\sin\alpha + 4\sin 2\alpha \right]. \end{aligned}$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt geschieht mit Hülfe von  $e_s^2 F$ , wo

$$e_s = \frac{h^3}{12F} = \frac{h^3}{6r^2 \left( \pi \frac{\alpha}{180} - \sin\alpha \right)}.$$

Es ist also für  $T_y$  und  $T_p$  abzuziehen

$$\begin{aligned} \frac{h^6}{144F^2} F &= \frac{h^6}{144F} = \frac{2^6 \cdot r^6 \sin^6 \frac{\alpha}{2}}{2^4 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{2} r^2 \left[ \frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha \right]} = \frac{8r^6 \sin^6 \frac{\alpha}{2}}{9r^2 \left[ \frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha \right]} \\ &= \frac{160r^4 \sin^6 \frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha - 180\sin\alpha}. \end{aligned}$$

(Probe für den Halbkreis stimmt.)

**Bemerkung.** Diese Aufgabe ist von Wichtigkeit für die Centrifugentheorie, denn bei etwa kugelförmiger Gestalt kann der Querschnitt der schnell rotierenden Flüssigkeit als Kreissegment betrachtet werden. Formel 1) ist in die Formel  $K = \frac{2k'}{g} T\vartheta^2$  in Nr. 49 einzusetzen.

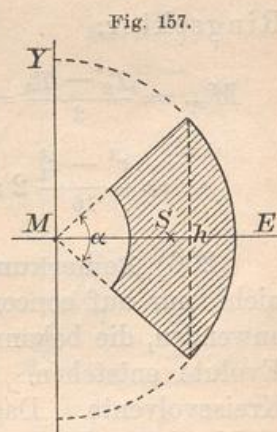
204) **Aufgabe.** Die Trägheitsmomente des Ringsektors zu berechnen.

Nach 44 handelt es sich in Bezug auf den Durchmesser um

$$T_y = \frac{r^4 - r_1^4}{8} \left[ \frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha \right],$$

in Bezug auf  $ME$  um

$$T_x = \frac{r^4 - r_1^4}{8} \left[ \frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha \right],$$





und in Bezug auf  $M$  um

$$T_p = \frac{r^4 - r_1^4}{720} \pi \alpha.$$

Da nach 11

$$MS = e_s = \frac{2h}{3b} \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{2 \cdot 2r \sin \frac{\alpha}{2} r^3 - r_1^3}{3 \cdot 2r \pi \frac{\alpha}{360} r^2 - r_1^2} = \frac{240 \sin \frac{\alpha}{2} r^3 - r_1^3}{\pi \alpha r^2 - r_1^2}$$

ist, so muß für  $T_p$  und  $T_y$

$$e_s^2 F = \frac{240^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (r^3 - r_1^3)^2 (r^2 - r_1^2) \pi \alpha}{\pi^2 \alpha^2 (r^2 - r_1^2)^2 \cdot 360} = \frac{160 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (r^3 - r_1^3)^2}{\pi \alpha (r^2 - r_1^2)}$$

abgezogen werden, wenn man die Reduktion auf den Schwerpunkt durchführen will.

205) **Aufgabe.** Die maximalen Centrifugalmomente in Bezug auf  $M$  für die letzten Querschnitte zu berechnen.

**Auflösung.** Sektor:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4}{16} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} - 3 \sin \alpha \right] - \frac{r^4}{16} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right] \\ &= \frac{2r^4 \sin \alpha}{16} = \frac{r^4 \sin \alpha}{8}. \end{aligned}$$

Segment:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4}{96} \left[ \frac{\pi \alpha}{30} - 3 \sin 2\alpha \right] - \frac{r^4}{96} \left[ \frac{\pi \alpha}{30} - 8 \sin \alpha + \sin 2\alpha \right] \\ &= \frac{r^4}{96} [8 \sin \alpha - 4 \sin 2\alpha] = \frac{r^4}{24} [2 \sin \alpha - \sin 2\alpha]. \end{aligned}$$

Ringsektor:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4 - r_1^4}{16} \left[ \frac{\pi \alpha}{180} + \sin \alpha \right] - \frac{r^4 - r_1^4}{16} \left[ \frac{\pi \alpha}{160} - \sin \alpha \right] \\ &= \frac{r^4 - r_1^4}{16} 2 \sin \alpha = \frac{r^4 - r_1^4}{8} \sin \alpha. \end{aligned}$$

206) **Bemerkung.** Die hier durchgeführte Methode läßt sich nicht nur auf concentrische Kreise, sondern auch auf Parallelkurven anwenden, die bekanntlich durch Abwicklung einer gemeinschaftlichen Evolute entstehen. Hierher gehört z. B. die Inhaltsberechnung der Kreisevolvente. Dagegen ist die Anwendung auf die Doppelschar gleichseitiger Hyperbeln, auf die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln, auf konfokale Lemniskatenscharen und Hyperbelbüschel u. s. w. ausgeschlossen, weil hier die Breite der Elementarstreifen veränderlich



ist, so daß die Anwendung der Rechtecksformel  $\frac{h}{n} \cdot l$ , wo  $\frac{h}{n}$  die Breite,  $l$  die Länge des Streifens ist, unzulässig erscheint. Dort müssen also andere Methoden eintreten. Auf die Evolventen soll erst im nächsten Bande eingegangen werden.

### E. Einige Aufgaben über Maxima und Minima.

207) Nach dem Methodischen Lehrbuche Teil II, Anhang, ist, wenn die Querschnittsformel einer Kurve die Gestalt

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \dots$$

hat, die Neigung der Tangente gegen die Y-Achse an der Stelle  $y$  zu berechnen aus

$$\tan \alpha = b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \dots$$

Ein Maximum oder Minimum kann im allgemeinen nur dann stattfinden, wenn dieser Wert gleich Null ist. Die fraglichen Stellen berechnen sich also aus

$$b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \dots = 0.$$

Die wirkliche Auswertung kann elementar höchstens bis zum 4<sup>ten</sup> Grade gehen. Trotzdem lassen sich einige wichtige Aufgaben mit Hilfe solcher Betrachtungen erledigen, wie die nachstehenden Beispiele zeigen.

Die Untersuchung, ob an entsprechender Stelle ein Maximum oder ein Minimum stattfindet, oder ob die Kurve dort einen Rückkehrpunkt (eine Spitze), oder einen Wendepunkt oder sonstige Unregelmäßigkeiten hat, läßt sich nur mit Hilfe der höheren Differentialquotienten hinlänglich scharf entscheiden. Darauf soll hier nicht eingegangen werden.

208) **Aufgabe.** Aus einem kreisrunden Balken den rechteckigen Balken von größter Tragfähigkeit auszuschneiden.

**Auflösung.** Die Tragfähigkeit ist, wie in der Festigkeitslehre gezeigt wird, proportional dem Ausdrucke  $\frac{xy^2}{6}$ , oder auch  $xy^2 = x(d^2 - x^2) = d^2x - x^3$ . Stellt man  $z = d^2x - x^3$  graphisch dar, so ergibt sich als trigonometrische Tangente der geometrischen Tangente  $\tan \alpha = d^2 - 3x^2$ . Eine Maximalstelle ist nur möglich, wenn  $d^2 - 3x^2 = 0$  ist, d. h.  $x^2 = \frac{d^2}{3}$  oder  $x = d\sqrt{\frac{1}{3}}$ . Man kann  $x$

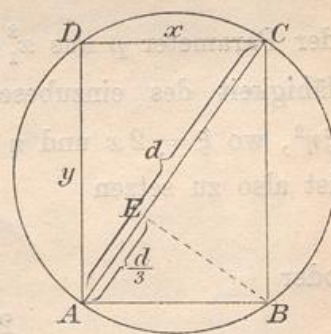
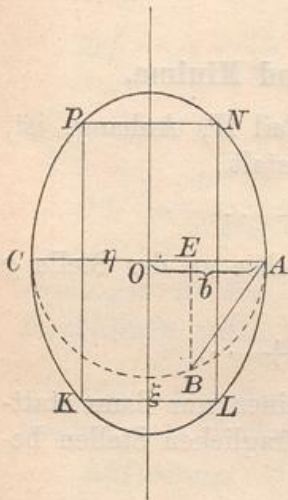


Fig. 158.



konstruieren als mittlere Proportionale zwischen  $d$  und  $\frac{d}{3}$ , indem man z. B.  $AE = \frac{d}{3}$  macht und in  $E$  das Lot  $EB$  errichtet, was nach Pythagoras  $AB = x$  giebt.

Fig. 159.



209) **Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe für einen elliptischen Balken.

Die Gleichung der Ellipse sei  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ , die gesuchte Basis sei  $\xi$ , die zugehörige Höhe  $\eta$ . Die Tragfähigkeit ist proportional dem Ausdrucke  $\xi\eta^2$ , oder, da  $\xi = 2x$  und

$$\eta^2 = (2y)^2 = 4 \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) a^2 = 4a^2 - \frac{4a^2x^2}{b^2}$$

ist, proportional  $8a^2x - \frac{8a^2x^3}{b^2}$ , oder auch proportional  $x - \frac{x^3}{b^2}$ . Stellt man aber  $z = x - \frac{x^3}{b^2}$  graphisch als Kurve dar, so ist ein Maximum

nur möglich bei der durch  $1 - \frac{3x^2}{b^2} = 0$  bestimmten Stelle, so dass  $x = b\sqrt{\frac{1}{3}}$  folgt, wie vorher, also  $\xi = 2b\sqrt{\frac{1}{3}}$ .

Die Konstruktion erfolgt wie vorher. Man macht  $AE = \frac{1}{3}AC$ , errichtet das Lot  $EB$  bis zum Hilfskreise, dann ist  $AB$  die gesuchte Strecke  $\xi$ , der  $KL$  gleich zu machen ist.

210) **Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe für einen parabolischen Querschnitt, der einem Rechteck mit den Seiten  $2x_1$  und  $y_1$  eingeschrieben ist.

**Auflösung.** Die Gleichung der Parabel ist  $x^2 = 2py$ , wo sich der Parameter  $p$  aus  $x_1^2 = 2py_1$  als  $p = \frac{x_1^2}{2y_1}$  bestimmt. Die Tragfähigkeit des einzubeschreibenden Rechtecks wird proportional zu  $\xi\eta^2$ , wo  $\xi = 2x$  und  $\eta = y_1 - y = y_1 - \frac{x^2}{2p}$  zu setzen ist. Für  $\xi\eta^2$  ist also zu setzen

$$2x \left(y_1 - \frac{x^2}{2p}\right)^2$$

oder

$$2x \left(y_1^2 - \frac{2y_1x^2}{2p} + \frac{x^4}{4p^2}\right)$$

oder endlich, da der Faktor 2 überflüssig ist,

$$z = y_1^2x - \frac{y_1x^3}{p} + \frac{x^5}{4p^2}.$$



Stellt man  $z$  graphisch als Curve dar, so handelt es sich um die Stelle, wo

$$\tan \alpha = y_1^2 - \frac{3y_1}{p} x^2 + \frac{5x^4}{4p^2} = 0$$

ist. Das entsprechende  $x$  ergibt sich aus der Gleichung

$$x^4 - \frac{12py_1}{5} x^2 = -\frac{4p^2}{5} y_1^2,$$

aus der

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{6py_1}{5} \pm \sqrt{\frac{36p^2y_1^2}{25} - \frac{20p^2y_1^2}{25}} \\ &= \frac{6py_1}{5} \pm \frac{4py_1}{5} \end{aligned}$$

folgt, oder

$$x = \sqrt{\frac{10py_1}{5}} \quad \text{bezw.} \quad x = \sqrt{\frac{2py_1}{5}},$$

die Basis wird also entweder

$$\xi = 2\sqrt{\frac{10py_1}{5}} = 2\sqrt{\frac{2x_1^2}{2y_1}y_1} = 2x_1$$

oder

$$\xi = 2\sqrt{\frac{2py_1}{5}} = 2\sqrt{\frac{2x_1^2}{5 \cdot 2y_1}y_1} = 2x_1\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Das erste gibt aber  $\eta = 0$ , d. h. einen Balken von der Tragfähigkeit Null, was hier kein Maximum, sondern höchstens ein Minimum bedeuten kann. Die zweite Lösung gibt ein Maximum, und zwar läßt sich

$\xi = \sqrt{\frac{4x_1^2}{5}}$  als mittlere Proportionale zwischen  $AB = 2x_1$

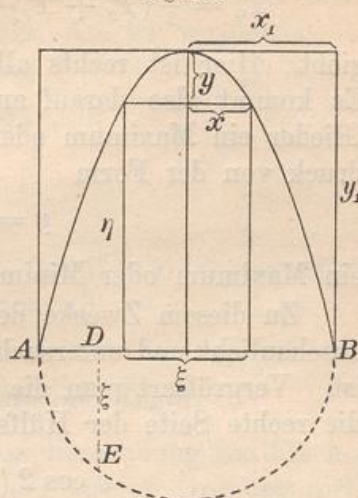
und  $\frac{2}{5}x_1 = \frac{AB}{5}$  konstruieren. Ist also  $AD = \frac{1}{5}AB$ , so giebt das Lot  $DE$  bis zum Hilfskreise das gesuchte  $\xi$ .

211) Um eine Variante in der Behandlung der Aufgaben über Maxima und Minima bekannt zu geben, soll die in Nr. 141 behandelte Aufgabe, die Trägheitshauptachsen für eine Fläche  $F$  aus  $T_x$ ,  $T_y$  und  $M_{xy}$  zu bestimmen, auf eine andere Art gelöst werden. Man wandle die Gleichung

$$T_\alpha = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

mit Ausnahme des letzten Postens ebenso um, wie in Nr. 141, was

Fig. 160.





$$T_\alpha = \frac{1}{2} (T_y + T_x) - \frac{1}{2} (T_y - T_x) \cos 2\alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

gibt. Hier ist rechts alles konstant, mit Ausnahme der Größe  $\alpha$ . Es kommt also darauf an, zu untersuchen, wann die beiden letzten Glieder ein Maximum oder ein Minimum geben, d. h. wann ein Ausdruck von der Form

$$y = a \cos 2x + b \sin 2x$$

ein Maximum oder Minimum gibt.

Zu diesem Zwecke denke man sich den Ausdruck als Curve veranschaulicht und untersuche, an welcher Stelle die Tangente horizontal ist. Vergrößert man die Abscisse um eine kleine Größe  $\xi$ , so geht die rechte Seite der Hilfsgleichung über in

$$a \cos 2(x + \xi) + b \sin 2(x + \xi).$$

Subtraktion der beiden rechten Seiten von einander gibt

$$a [\cos 2(x + \xi) - \cos 2x] + b [\sin 2(x + \xi) - \sin 2x].$$

Da die Nachbarordinaten bei horizontaler Tangente gleich sein müssen, so ist diese Differenz gleich Null zu setzen, also, wenn man nach bekannten goniometrischen Formeln umformt,

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{2} \sin \frac{(2x + 2\xi) + 2x}{2} \sin \frac{(2x + 2\xi) - 2x}{2} \\ & + \frac{b}{2} \cos \frac{(2x + 2\xi) + 2x}{2} \sin \frac{(2x + 2\xi) - 2x}{2} = 0. \end{aligned}$$

Division durch den gemeinschaftlichen Faktor  $\frac{1}{2} \sin \frac{(2x + 2\xi) - 2x}{2}$  gibt

$$-a \sin (2x + \xi) + b \cos (2x + \xi) = 0$$

oder

$$\tan (2x + \xi) = \frac{b}{a},$$

oder, da  $\xi$  unendlich klein gedacht werden sollte,

$$\tan 2x = \frac{b}{a}.$$

Setzt man für  $a$  und  $b$  die eigentlichen Faktoren wieder ein, so folgt wie früher

$$\tan (2\vartheta) = \frac{2M_{xy}}{T_y - T_x}$$

zur Bestimmung der Lage der beiden Hauptachsen.

[Setzt man die Reihenentwicklung für  $\sin 2x$  und  $\sin 2y$  als bekannt voraus und wendet man die Formel für den Neigungs-



winkel  $\alpha$  der Tangente auf die Reihen an, wozu man Method. Lehrbuch Band 2, Anhang oder Band 3, Algebr. An. VI vergleiche, so findet man sofort als maßgebende Gleichung

$$-2a \cos 2x + 2b \sin 2x = 0$$

oder

$$\tan 2x = \frac{b}{a}$$

zur Bestimmung der betreffenden Stelle. Damit würde eine dritte Lösung dieses wichtigen Problems gegeben sein.]

### F. Verallgemeinerte Simpsonsche Regel.

212) Reichen die bisherigen Methoden zur Berechnung von Flächen oder Körpern oder ihrer Momente erster oder zweiter Ordnung nicht aus, so ist man zu Annäherungsversuchen genötigt.

Eine erste Annäherung würde die Trapezformel geben, die darauf beruht, daß man die einzelnen Streifen gleicher Höhe als Trapeze berechnet. Addiert man die Resultate, so ergibt sich z. B. für Fig. 161, wo übrigens  $y_0 = 0$  ist,

$$\overset{y_8}{F} = \frac{y_8 - y_0}{2 \cdot 8} [x_0 + x_8 + 2(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7)].$$

Das Resultat wird einigermassen brauchbar, wenn die Kurve gegen die Y-Achse bald konkav, bald konvex ist. Das Resultat wird aber zu klein, wenn sie überall konkav, zu groß, wenn sie überall konvex ist.

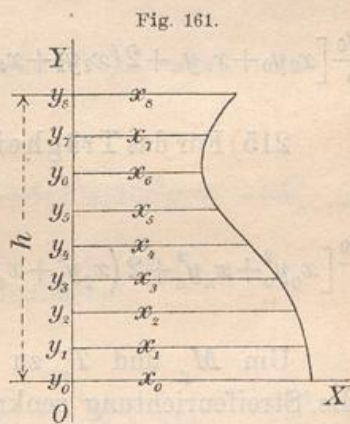
Es ist leicht, die Formel für  $\overset{y_8}{F}$  oder  $\overset{y_8}{F}$  u. s. w. aufzustellen.

213) Ein weit genaueres Resultat giebt in der Regel die verallgemeinerte Simpsonsche Formel, die darauf beruht, daß man eine gerade Anzahl von Streifen annimmt und auf jeden Doppelstreifen die Simpsonsche Regel anwendet.

Thut man dies, so ergibt sich z. B. für Fig. 161

$$\overset{y_8}{F} = \frac{y_8 - y_0}{6 \cdot 4} [x_0 + x_8 + 2(x_2 + x_4 + x_6) + 4(x_1 + x_3 + x_5 + x_7)],$$

allgemein für  $n$  Streifen oder  $\frac{n}{2}$  Doppelstreifen





$$F = \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[ x_0 + x_n + 2(x_2 + x_4 + \dots + x_{n-2}) + 4(x_1 + x_3 + \dots + x_{n-1}) \right].$$

Die Genauigkeit wird deshalb gröfser, weil sich durch je drei aufeinanderfolgende Kurvenpunkte unendlich viele Parabeln gemischter Ordnung vom 3<sup>ten</sup> Grade legen lassen, für welche die Simpsonsche Formel ein richtiges Resultat giebt. Irgend eine dieser Kurven wird sich in der Regel weit genauer an die wirkliche Kurve anschmiegen, als es die geraden Linien der Trapezformel thun.

214) Die Berechnung der statischen Momente würde nach der Trapezformel sehr ungenau ausfallen.

Die verallgemeineste Simpsonformel dagegen würde für Fig. 161 folgendes Resultat geben

$$M_x = \frac{y_8 - y_0}{6 \cdot 4} \left[ x_0 y_0 + x_8 y_8 + 2(x_2 y_2 + x_4 y_4 + x_6 y_6) + 4(x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_5 y_5 + x_7 y_7) \right].$$

Allgemein ergibt sich für gerades  $n$

$$M_x = \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[ x_0 y_0 + x_n y_n + 2(x_2 y_2 + x_4 y_4 + \dots + x_{n-2} y_{n-2}) + 4(x_1 y_1 + x_3 y_3 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}) \right].$$

215) Für das Trägheitsmoment ergibt sich ebenso bei geradem  $n$

$$T_x = \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[ x_0 y_0^2 + x_n y_n^2 + 2(x_2 y_2^2 + x_4 y_4^2 + \dots + x_{n-2} y_{n-2}^2) + 4(x_1 y_1^2 + x_3 y_3^2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}^2) \right].$$

Um  $M_y$  und  $T_y$  zu berechnen, wird man zweckmäßiger Weise die Streifenrichtung senkrecht gegen die vorige wählen.

216) Für die Centrifugalmomente müfste man bei Figur 161 folgendermaßen verfahren: Der erste Doppelstreifen würde nach Nr. 110 geben

$$\frac{y_2 - y_0}{6} \left[ \frac{x_0^2}{2} y_0 + \frac{x_2^2}{2} y_2 + 4 \frac{x_1^2}{2} y_1 \right] = \frac{y_2 - y_0}{12} \left[ x_0^2 y_0 + x_2^2 y_2 + 4 x_1^2 y_1 \right].$$

Die vollständige Formel würde lauten



$$M_{xy} = \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[ \frac{x_0^2}{2} y_0 + \frac{x_n^2}{2} y_n + 2 \left( \frac{x_2^2}{2} y_2 + \frac{x_4^2}{2} y_4 + \dots + \frac{x_{n-2}^2}{2} y_{n-2} \right) + 4 \left( \frac{x_1^2}{2} y_1 + \frac{x_3^2}{2} y_3 + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{2} y_{n-1} \right) \right]$$

oder

$$M_{xy} = \frac{y_n - y_0}{6n} \left[ x_0^2 y_0 + x_n^2 y_n + 2 \left( x_2^2 y_2 + x_4^2 y_4 + \dots + x_{n-2}^2 y_{n-2} \right) + 4 \left( x_1^2 y_1 + x_3^2 y_3 + \dots + x_{n-1}^2 y_{n-1} \right) \right].$$

In der Regel wird die Formel nur für Körper verwendet, obwohl auch die Berechnung der genannten Momente für die Technik ganz brauchbare Resultate gibt. Als Beispiel könnte der in Fig. 28 dargestellte Schienenquerschnitt dienen. Auf die Schwerpunktsberechnung mit Hilfe von  $\frac{M}{F}$ , auf die mit Hilfe von  $\sqrt{\frac{T}{F}}$ ,  $\frac{T}{M}$ ,  $\frac{M_{xy}}{F}$  durchzuführenden Berechnungen und ihre praktischen Anwendungen braucht hier nur hingedeutet zu werden.

217) Der durch Drehung um die  $Y$ -Achse aus Fig. 161 entstehende Körper würde folgendermaßen zu berechnen sein:

$$I = \pi \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[ x_0^2 + x_n^2 + 2 \left( x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{n-2}^2 \right) + 4 \left( x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_{n-1}^2 \right) \right].$$

Sein statisches Moment in Bezug auf die Grundfläche würde sein:

$$M_u = \pi \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[ x_0^2 y_0 + x_n^2 y_n + 2 \left( x_2^2 y_2 + x_4^2 y_4 + \dots + x_{n-2}^2 y_{n-2} \right) + 4 \left( x_1^2 y_1 + x_3^2 y_3 + \dots + x_{n-1}^2 y_{n-1} \right) \right].$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche:

$$T_u = \pi \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[ x_0^2 y_0^2 + x_n^2 y_n^2 + 2 \left( x_2^2 y_2^2 + x_4^2 y_4^2 + \dots + x_{n-2}^2 y_{n-2}^2 \right) + 4 \left( x_1^2 y_1^2 + x_3^2 y_3^2 + \dots + x_{n-1}^2 y_{n-1}^2 \right) \right].$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die  $Y$ -Achse würde werden:

$$T_p = \frac{\pi}{2} \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[ x_0^4 + x_n^4 + 2 \left( x_2^4 + x_4^4 + \dots + x_{n-2}^4 \right) + 4 \left( x_1^4 + x_3^4 + \dots + x_{n-1}^4 \right) \right].$$

Denselben Formeln gehorchen die Körper, die sich nach der Methode von Cavalieri aus dem Drehungskörper ableiten lassen. —



Die Annäherungsformeln geben um so bessere Werte, je mehr Schnitte man zu Hülfe nimmt und je weniger Unregelmäßigkeiten das Profil zeigt. Als Beispiel berechne man das Trägheitsmoment der in Fig. 98 dargestellten Schiene, deren Masse man zu bestimmen hat, indem man z. B. die Querschnitte für 6 Doppelstreifen von gleicher Breite abmisst.

Für rein mathematische Untersuchungen sind die Methoden dieses Abschnitts unbrauchbar, dort müssen sie durch die strengen Methoden der höheren Mathematik ersetzt werden, wenn diese überhaupt der Aufgabe gewachsen ist.