



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Abschnitt VII. Graphostatische Methoden zur Bestimmung von Trägheits- und Centrifugalmomenten.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

## Abschnitt VII.

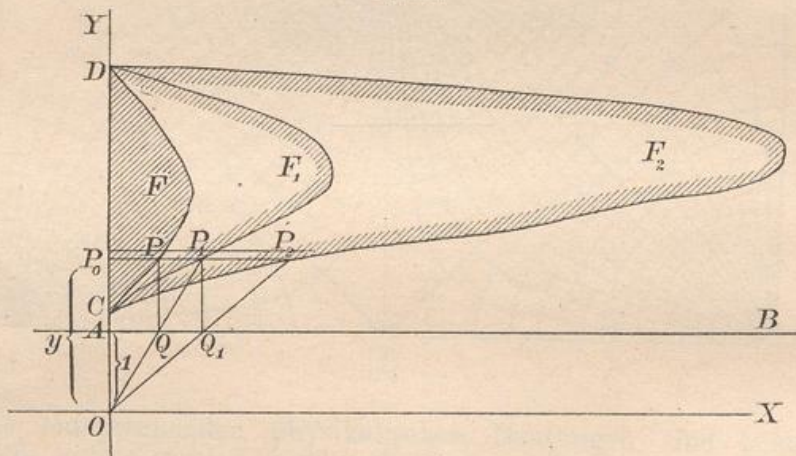
### Graphostatische Methoden zur Bestimmung von Trägheits- und Centrifugal-Momenten.

#### A. Graphische Methode von Nehls zur Bestimmung des statischen Momentes und des Trägheitsmomentes einer Fläche.

257) Der schraffierte Teil der Figur sei die gegebene Fläche  $F$ . Um das statische Moment  $M_x$  und das Trägheitsmoment  $M_y$  zu bestimmen, verfähre man folgendermaßen:

$P_0P$  sei der Horizontalschnitt  $f$  in der beliebigen Höhe  $y$ ,  $AB$  die Parallele zur  $X$ -Achse in der Höhe  $OA = 1$ . Man ziehe

Fig. 187.



die Senkrechte  $PQ$  und  $OQ$  bis zum Schnitte  $P_1$  mit dem Horizontalschnitte. Dann ist  $AQ = f$ , folglich  $P_0P_1 = f \cdot y$ , d. h.  $P_0P_1$  ist das statische Moment von  $f$  in Bezug auf die  $X$ -Achse. Für sämtliche Schnitte mache man dasselbe, dann bilden alle Punkte  $P_1$  eine über  $CD$  stehende Fläche  $F_1$  und diese Fläche stellt das

statische Moment  $M_x$  der Fläche  $F$  in Bezug auf die X-Achse dar.

Wiederholt man dasselbe mit der Fläche  $F_1$ , so entsteht durch die neue Konstruktion eine Fläche  $F_2$  über  $CD$ . Diese stellt das statische Moment zu  $F_1$  und zugleich das Trägheitsmoment  $T_x$  für  $F$  dar, denn es ist  $AQ_1 = fy$ , folglich  $P_0P_2 = fy^2$ , folglich

$$F_1 = \sum fy^2 = T_x.$$

258) **Bemerkung.** Wählt man  $OA = b$ , so wird  $bF_1 = M_x$  und  $b^2F_2 = T_x$ , wie leichte Rechnungen zeigen. Dabei kommt die dritte bzw. vierte Dimension von  $M_x$  bzw.  $T_x$  zum Vorschein.

Ist die Fläche anders gestaltet, so lassen sich die Querschnitte nach Cavalieri an die Gerade  $CD$  verschieben, wodurch nichts geändert wird. Man kann aber auch die wie in Figur 188 durch  $OY$  getrennten Teile gesondert behandeln und dann addieren bzw. die Resultate für  $ABCDE$  und  $ABFDE$  in Figur 189 durch Subtraktion mit einander verbinden.

Fig. 188.

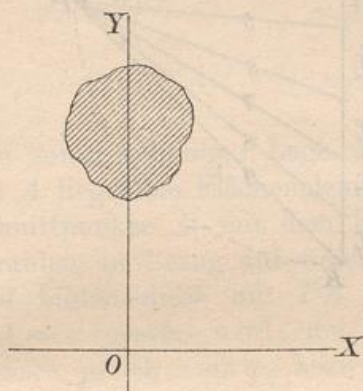
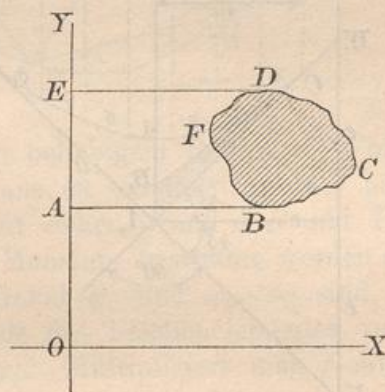


Fig. 189.



Die Methode ist einfach und brauchbar, wenn man die Flächen mit Hilfe des Polarplanimeters zu bestimmen versteht.

### B. Graphische Methode von Mohr mit Hilfe des Kräfteplans und Kräftepolygons.

259) Man bestimme, wie in Nr. 18 mit Hilfe des Kräfteplans das Kräftepolygon und die Schwerpunktsachse  $A_1S$ , nur wähle man  $P$  als den symmetrisch teilenden Punkt des Halbkreises über

$$AK = f = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n.$$

Im Kräftepolygon ist  $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABP$ , so daß sich die Inhalte wie die Quadrate der Höhen über  $A_1B_1$  bzw.  $AB$  verhalten, die gleich  $x_1$  bzw.  $\frac{1}{2}f$  sind. Also:

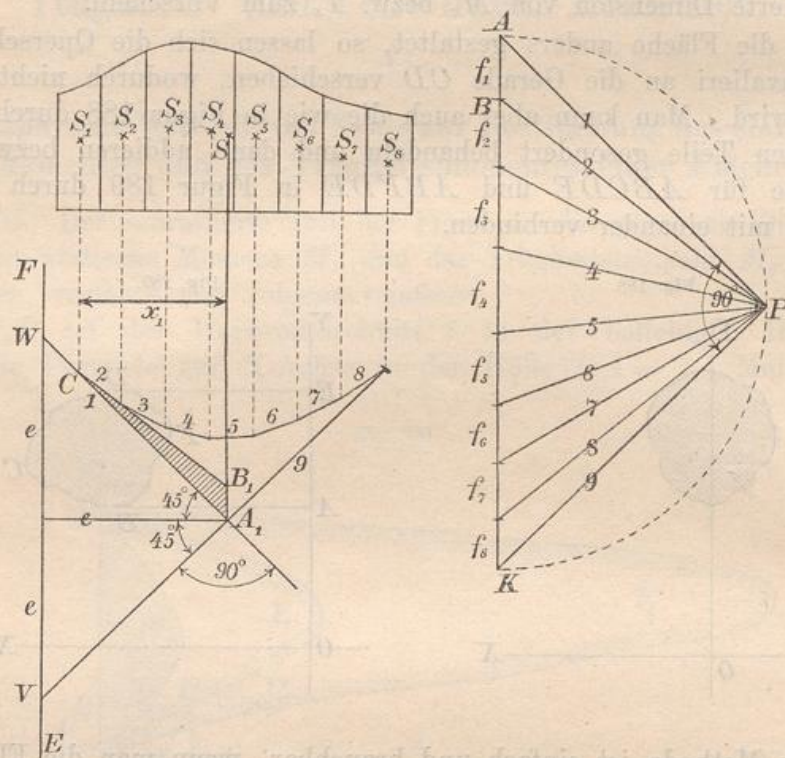
$$\triangle A_1B_1C : \frac{1}{2}f_1 \cdot \frac{f}{2} = x_1^2 : \left(\frac{f}{2}\right)^2,$$

folglich

$$f_1 x_1^2 = \triangle A_1B_1C \cdot f.$$

Bei unendlich schmalen Streifen ist aber  $f_1 x_1^2$  das Trägheitsmoment des ersten Streifens in Bezug auf die Schwerpunktsachse  $A_1S$ .

Fig. 190.



Ebenso ist es mit den andern Streifen, d. h. es ist das Trägheitsmoment der Fläche  $f$

$$T_s = \sum f_n x_n^2 = F \cdot f,$$

wo  $F$  die Fläche des Kräftepolygons ist, also gleich dem Produkte aus der gegebenen Fläche und der Fläche des Kräftepolygons.

**Bemerkung.** Verschiebt man die Schwerpunktsachse um  $e$  (parallel zu sich selbst), so wird nach Nr. 27

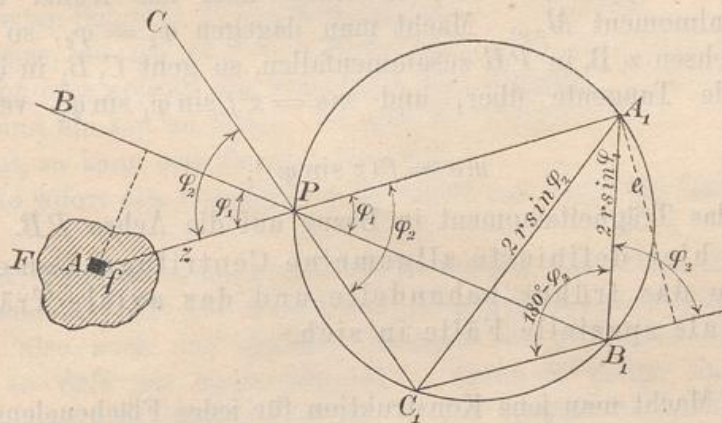
$$T = T_s + e^2 f = Ff + e^2 f = f(F + e^2),$$

d. h. zum Kräftepolygon ist noch die Fläche  $A_1 VW = e^2$  hinzuzufügen.

### C. Andere Methode von Mohr, auf Benutzung eines Hilfskreises gestützt.

260) Um das Trägheitsmoment und das Centrifugalmoment einer Fläche  $F$  in Bezug auf Achsen zu bestimmen, die durch einen gegebenen Pol  $P$  gehen, benutzt Mohr einen durch  $P$  gehenden Kreis

Fig. 191.



von sonst beliebiger Lage und von beliebigem Radius  $r$ . Von dem bei  $A$  liegenden Flächenelemente  $f$  aus ist ein Polstrahl  $AP$  bis zum Schnittpunkte  $A_1$  mit dem Kreise zu ziehen. Sind  $PB$  und  $PC$  die Strahlen, in Bezug auf welche die Momente bestimmt werden sollen, und bilden diese mit  $PA$  die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , so sind, wenn  $PA = z$  gesetzt wird, die Abstände des Flächenelementes von den Achsen gleich  $z \sin \varphi_1$  bzw.  $z \sin \varphi_2$ . Multipliziert man  $f$  mit dem Produkte der Abstände, so erhält man

$$f \cdot z^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

und dieser Ausdruck wird als das Centrifugalmoment oder Deviationsmoment des Elementes  $f$  in Bezug auf die Achsen  $PB$  und  $PC$  definiert. Dies ist allgemeiner, als die frühere Definition, bei der es sich nur um Achsen handelte, die sich unter  $90^\circ$  schneiden.

Man verlängere die beiden Achsen bis zu den Kreispunkten  $B_1$  und  $C_1$ , was zu Kreissehnen  $A_1B_1 = 2r \sin \varphi_1$ ,  $A_1C_1 = 2r \sin \varphi_2$  und  $B_1C_1 = 2r \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$  Veranlassung giebt.  $A_1$  hat von der letzteren Sehne einen Abstand  $e = 2r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$ , wie sich leicht aus der Figur ergibt.

Jetzt liegt es nahe, in  $A_1$  eine Masse von der Gröfse

$$m = \frac{z^2}{2r} f$$

anzubringen, denn deren statisches Moment in Bezug auf  $C_1 B_1$  wird gleich

$$m e = \frac{z^2}{2r} f 2r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = z^2 f \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

d. h. gleich dem Centrifugalmomente des Flächenelementes in Bezug auf die zu  $B_1 C_1$  gehörigen Achsen  $PB$  und  $PC$ .

261) Ist  $\varphi_2 = \varphi + 90^\circ$ , so erhält man das früher definierte Centrifugalmoment  $M_{xy}$ . Macht man dagegen  $\varphi_1 = \varphi_2$ , so dafs die beiden Achsen z. B. in  $PB$  zusammenfallen, so geht  $C_1 B_1$  in die in  $B_1$  berührende Tangente über, und  $m e = z^2 f \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$  verwandelt sich in

$$m e = f (z \sin \varphi)^2,$$

d. h. in das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse  $PB$ .

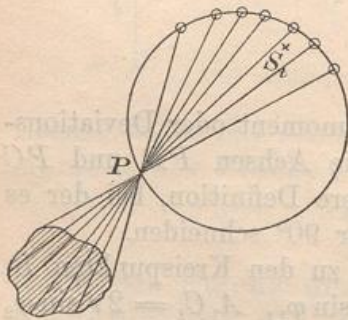
Das hier definierte allgemeine Centrifugalmoment enthält also das früher behandelte und das axiale Trägheitsmoment als spezielle Fälle in sich.

262) Macht man jene Konstruktion für jedes Flächenelement  $f$ , so erhält man für die ganze Fläche  $\sum f = F$  auf einem Kreisbogen die gesamte Hilfsmasse

$$\sum \frac{f z^2}{2r} = \frac{1}{2r} \sum f z^2 = \frac{T_p}{2r} = \frac{F q_p^2}{2r},$$

wo  $T_p$  das polare Trägheitsmoment von  $F$  in Bezug auf den Pol  $P$  und  $q_p$  den zugehörigen Trägheitsradius bedeutet.

Fig. 192.

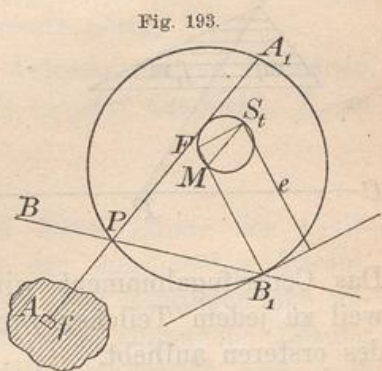


Das statische Moment der gesamten Hilfsmasse in Bezug auf  $B_1 C_1$  ist dann gleich dem Centrifugalmoment von  $F$  in Bezug auf  $PB$  und  $PC$ . Diese Hilfsmassen haben einen Schwerpunkt  $S_i$ , der als Trägheitsschwerpunkt der Fläche  $F$  in Bezug auf den Pol  $P$  (und den gewählten Halbkreis) bezeichnet werden soll. In ihm denke man sich die gesamte Hilfsmasse vereinigt.

Fällt man dann von  $S_i$  aus ein Lot auf  $B_1 C_1$  und multipliziert man dessen Länge mit der Hilfsmasse, so hat man wiederum ein

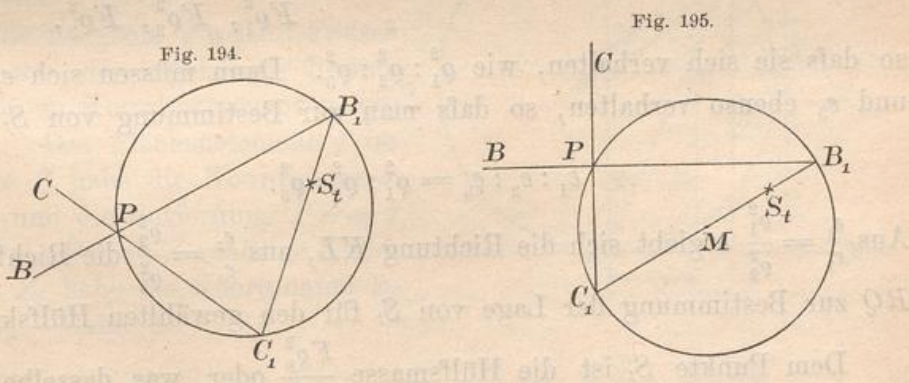
statisches Moment, welches gleich dem Centrifugal- (bzw. Trägheits-) Moment von  $F$  ist.

263) Eine kleine Vereinfachung wird für das Trägheitsmoment noch dadurch erzielt, daß man  $S_t$  mit dem Mittelpunkte  $M$  des Hilfskreises verbindet und über  $S_tM$  als Durchmesser einen zweiten Hilfskreis zeichnet. Verbindet man dann den Berührungspunkt  $B_1$  der Tangente mit  $M$  und verlängert man diese Gerade bis zum zweiten Schnitte  $F$  mit dem kleinen Hilfskreise, so ist  $B_1F = e$ , und man hat nicht erst nöthig, die Tangenten zu ziehen und ein Lot zu fällen. Ist also  $S_t$  bestimmt, so kann man für jede beliebige Tangente sofort den zugehörigen Hebelarm mit Hülfe des Radius finden.



264) Kommt es hauptsächlich darauf an, nur solche Achsenpaare zu behandeln, für die das Centrifugalmoment verschwindet, für die also auch das statische Moment der Hilfsachse gleich Null ist — so daß die Kreissehne  $B_1C_1$  durch  $S_t$  gehen muß —, so braucht man sich vorläufig nicht um das Vorzeichen des Centrifugalmomentes zu bekümmern. [Es ist für  $f$  positiv, wenn die von  $f$  ausgefallenen Lothe auf derselben Seite von  $z$  liegen, negativ, wenn  $z$  zwischen diesen Lothen liegt.]

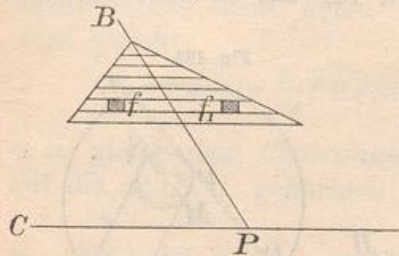
265) Geht  $B_1C_1$  durch  $S_t$ , so bezeichnet man  $PB$  und  $PC$  als konjugierte Achsen. Zu jedem  $PB$  ist die konjugierte Achse  $PC$



leicht zu konstruieren. Geht  $B_1C_1$  sowohl durch  $S_t$ , als auch durch  $M$ , so hat man den besonderen Fall, daß die konjugierten Achsen

$PB$  und  $PC$  aufeinander senkrecht stehen. Dies ist der früher besprochene Fall der Hauptträgheitsachsen für den Pol  $P$ .

Fig. 196.

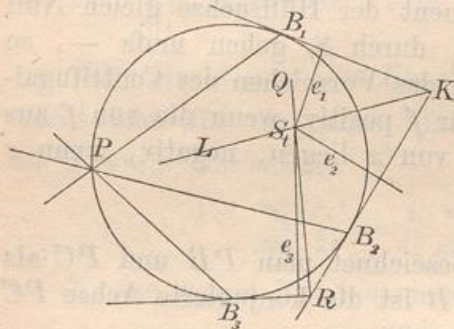


266) Den früher behandelten Symmetriefällen entspricht in allgemeinerer Weise Folgendes: Lässt sich die Fläche so in Parallelstreifen einteilen, daß die Schwerpunkte der Streifen auf einer Geraden liegen, so ist die Richtung der Mittellinie  $PB$  konjugiert zur Streifenrichtung  $PC$ ,  $PB$  und  $PC$  sind also ein Paar konjugierter Achsen.

Das Centrifugalmoment wird nämlich in diesem Falle gleich Null, weil zu jedem Teilchen  $f$  ein andres  $f_1$  gehört, dessen Moment das des ersteren aufhebt.

267) Gelingt es, die beiden Koordinaten von  $S_t$  zu bestimmen, ebenso das polare Trägheitsmoment  $T_p$  und mit dessen Hilfe die dem Punkte  $S_t$

Fig. 197.



beizulegende Hilfsmasse  $\frac{F \varrho_p^2}{2r}$ , so ist die Angelegenheit im wesentlichen erledigt.

Grundsätzlich ist die Aufgabe folgendermaßen zu lösen:

Man bestimmt die Trägheitsmomente auf irgend eine Weise für drei Achsen  $PB_1$ ,  $PB_2$  und  $PB_3$ . Sie mögen sein

$$F \varrho_1^2, F \varrho_2^2, F \varrho_3^2,$$

so daß sie sich verhalten, wie  $\varrho_1^2 : \varrho_2^2 : \varrho_3^2$ . Dann müssen sich  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$  ebenso verhalten, so daß man zur Bestimmung von  $S_t$  hat

$$e_1 : e_2 : e_3 = \varrho_1^2 : \varrho_2^2 : \varrho_3^2.$$

Aus  $\frac{e_1}{e_2} = \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}$  ergibt sich die Richtung  $KL$ , aus  $\frac{e_2}{e_3} = \frac{\varrho_2^2}{\varrho_3^2}$  die Richtung  $RQ$  zur Bestimmung der Lage von  $S_t$  für den gewählten Hilfskreis.

Dem Punkte  $S_t$  ist die Hilfsmasse  $\frac{F \varrho_p^2}{2r}$  oder, was dasselbe ist,  $\frac{F \varrho_1^2}{e_1} = \frac{F \varrho_2^2}{e_2} = \frac{F \varrho_3^2}{e_3}$  beizulegen.



Ist durch die Form der Fläche ein konjugiertes Achsenpaar als selbstverständlich bekannt, so braucht man nur noch eins der obigen Verhältnisse, z. B.  $\frac{e_1}{e_2}$  zu berechnen, denn die Sehne des konjugierten Paares geht bereits durch  $S_t$ . Also ist nur noch die Berechnung zweier Trägheitsradien bezw. Trägheitsmomente nötig.

Kennt man dagegen zwei konjugierte Achsenpaare, so schneiden sich die zugehörigen Sehnen in  $S_t$ , so daß es jetzt ausreicht,  $T_p$  zu kennen.

268) Die Mohrsche Abhandlung im 33<sup>sten</sup> Bande des Civil-Ingenieur beschäftigt sich eingehend mit der möglichsten Vereinfachung des Verfahrens, von dem hier nur der Grundgedanke angegeben werden sollte. Daß die Methode eine allgemeine Lösung der betreffenden Aufgaben der Graphostatik ermöglicht und nach Überwindung der ersten Schwierigkeiten übersichtlicher erscheint, als die Culmannsche Methode, kann zugestanden werden.

#### D. Modifikation der Mohrschen Methode durch Land.

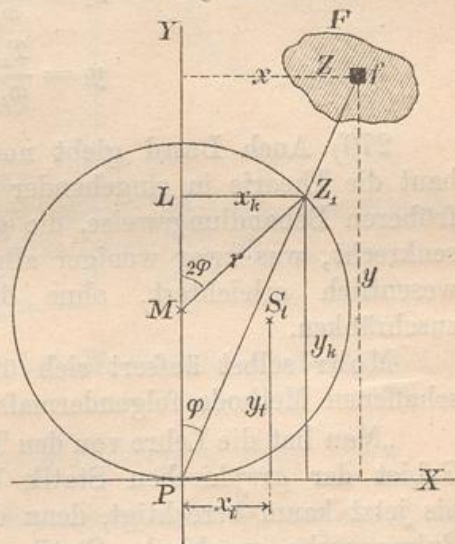
269) Weil bei Mohr die Berechnung der Koordinaten der Kreispunkte  $B_1, B_2, B_3$  trigonometrische Funktionen nötig macht und auch die Berechnung der von der Lage der Kreispunkte abhängigen statischen Massenmomente unbequem ist, schlägt Land im 34<sup>ten</sup> Bande des Civil-Ingenieur folgenden Weg ein.

Die Tangente des Hilfskreises in  $P$  und der zugehörige Radius werden zu Koordinatenachsen gemacht. Das Flächenelement  $f$  im Punkte  $Z$  habe die Koordinaten  $x$  und  $y$  und die Entfernung  $PZ = z$  vom Pol. Der zu  $Z$  gehörige Kreispunkt  $Z_1$  habe die Koordinaten  $x_k$  und  $y_k$ . Dann ist

$$x_k = r \sin 2\varphi = 2r \sin \varphi \cos \varphi = 2r \frac{x}{z} \frac{y}{z} = 2r \frac{xy}{z^2},$$

$$y_k = PL = r + r \cos 2\varphi = r(1 + \cos 2\varphi) = 2r \cos^2 \varphi = 2r \frac{y^2}{z^2}.$$

Fig. 198.



In  $Z_1$  ist die Masse  $m = \frac{fz^2}{2r}$  anzubringen, dann ist in Bezug auf die  $Y$ -Achse das statische Moment der Masse  $m$

$$m \cdot x_k = \frac{fz^2}{2r} \cdot 2r \frac{xy}{z^2} = fxy,$$

d. h. gleich dem Centrifugalmoment des Massenteilchens  $f$  in Bezug auf beide Achsen. Dagegen ist in Bezug auf die  $Y$ -Achse

$$my_k = \frac{fz^2}{2r} 2r \frac{y^2}{z^2} = fy^2,$$

d. h. gleich dem Trägheitsmoment des Teilchens  $f$  in Bezug auf die  $X$ -Achse.

Ebenso wird  $\sum mx_k = \sum fxy$  und  $\sum my_k = \sum fy^2$ . Die gesamte Hilfsmasse ist aber  $\sum \frac{fz^2}{2r} = \frac{1}{2r} T_p = m$ , also folgt, wenn  $y_t$  und  $x_t$  die Koordinaten von  $S_t$  sind,

$$m_t x_t = \sum fxy = M_{xy},$$

$$m_t y_t = \sum fy^2 = T_x.$$

Die Koordinaten von  $S_t$  sind also

$$x_t = \frac{M_{xy}}{m_t} = \frac{M_{xy}}{T_p} 2r$$

$$y_t = \frac{T_x}{m_t} = \frac{T_x}{T_p} 2r.$$

270) Auch Land giebt noch weitere Vereinfachungen an und baut die Theorie in eingehender Weise aus. Hier stehen, wie bei der früheren Behandlungsweise, die gewählten Achsen wieder aufeinander senkrecht, was zwar weniger allgemein ist, aber die Entwicklungen wesentlich erleichtert, ohne die technische Verwendbarkeit einzuschränken.

Mohr selbst äußert sich über einen Vorzug der von ihm geschaffenen Methode folgendermaßen:

„Man hat die Lehre von den Trägheitsmomenten als das eigentliche Gebiet der graphischen Statik bezeichnet. Diese Behauptung war bis jetzt kaum berechtigt, denn die Trägheitsellipse, mit welcher die Culmannsche graphische Statik operiert, bildet die seit langer Zeit bekannte Darstellung einer auf analytischem Wege abgeleiteten Formel, der ein statischer Sinn nicht untergelegt wird, dasselbe gilt von den früher bekannt gewordenen Darstellungen (Zeitschr. des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins, Jahrgang 1870, S. 41—63 und

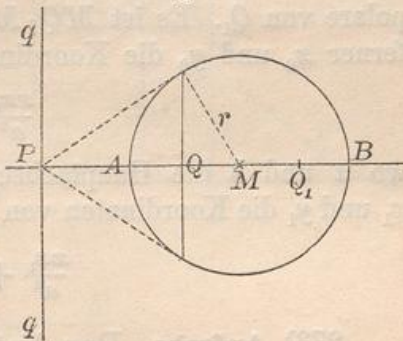
Jahrgang 1877, S. 51—62, ferner die Abhandlung von Lodge, Philosoph. magazine 1886, S. 453—458) der Trägheitsmomente durch Kreise, welche für die praktischen Anwendungen unzweifelhaft bequemer sind, als die Ellipsen. Erst durch die hier entwickelte Darstellung wird die Lehre von den Trägheitsmomenten auf diejenige von den statischen Momenten zurückgeführt und dadurch für das Gebiet der graphischen Statik gewonnen.“

Mohr fährt dann damit fort, seine Zahlenrechnungen durch graphische Operationen zu ersetzen, letztere im Anschluß an die Streckentheorie, wodurch er in der That Vereinfachungen erzielt.

### E. Einige Eigenschaften und Anwendungen der Culmannschen Trägheitsellipse.

271) Geometrische Vorbemerkung. In Fig. 199 ist  $q$  die Polare von  $Q$ , so daß  $PQAB$  harmonische Punkte sind. Nach Pythagoras ist  $r^2 = MQ \cdot MP$ , also  $MQ = \frac{r^2}{MP}$ , eine Beziehung, die für  $r = 1$  in die reciproke  $MQ = \frac{1}{MP}$  übergeht. Macht man  $MQ_1 = -MQ = -\frac{r^2}{MP}$ , so hat man die entsprechende „negative Abbildung“, und wie  $Q$  der Pol zu  $q$  heißt, so heißt  $Q_1$  der Antipol zu  $q$ . Ebenso wie  $q$  Polare zu  $Q$  ist, ist  $q$  Antipolare zu  $Q_1$ .

Fig. 199.



Hat  $Q$  die Koordinaten  $x_0, y_0$ , so ist die Gleichung der Polaren  $q$  (vgl. Meth. Lehrbuch, II), vorausgesetzt, daß  $M$  Nullpunkt des Koordinatensystems ist,

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

[Ist letzteres nicht der Fall, sondern hat  $M$  die Koordinaten  $p$  und  $q$ , so ist die Gleichung von  $q$

$$(x - p)(x_0 - p) + (y - q)(y_0 - q) = r^2.]$$

Ist  $M$  Nullpunkt, so sind die Koordinaten des Antipols  $x_1 = -x_0$  und  $y_1 = -y_0$ . Die Gleichung von  $q$  lautet in diesen Koordinaten

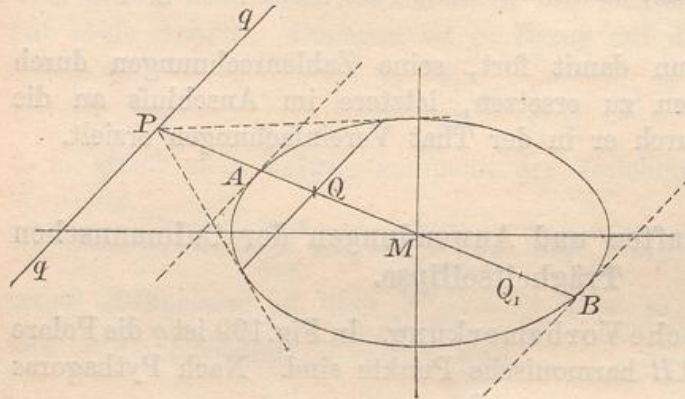
$$xx_1 + yy_1 = -r^2$$

oder

$$xx_1 + yy_1 + r^2 = 0.$$

272) Denkt man sich die Fig. 199 durch Parallelprojektion auf eine beliebige Ebene übertragen, so daß sich der Kreis in eine Ellipse verwandelt, so bleiben die harmonischen Beziehungen bestehen, ebenso die reciproke Beziehung, die Gerade  $q$  aber wird parallel zu den

Fig. 200.



Tangenten in den Endpunkten  $A$  und  $B$  des Durchmessers, so daß es sich um konjugierte Richtungen handelt.

Demnach sind in Fig. 200  $PQAB$  harmonische Punkte, die Parallele  $q$  zu den Tangenten in  $A$  und  $B$  ist die Polare von  $Q$  und zugleich die Antipolare von  $Q_1$ . Es ist  $MQ \cdot MP = MA^2$ ,  $MQ_1 \cdot MP = -MA^2$ . Sind ferner  $x_0$  und  $y_0$  die Koordinaten von  $Q$ , so ist die Gleichung von  $q$

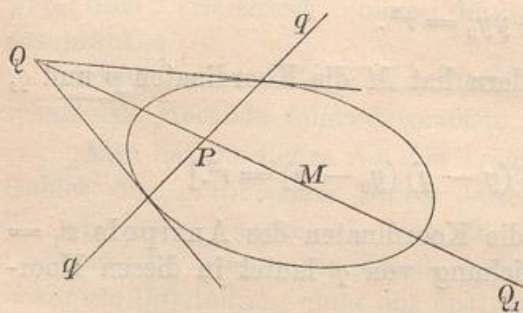
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

wo  $a$  und  $b$  die Hauptachsen der Ellipse bedeuten. Sind dagegen  $x_1$  und  $y_1$  die Koordinaten von  $Q_1$ , so hat die Antipolare  $q$  die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1 = 0.$$

273) Aufgabe. Den Antipol einer Geraden  $q$  zu bestimmen, welche die Ellipse nicht schneidet.

Fig. 201.



**Auflösung.** Man ziehe (Fig. 200) eine beliebige Sehne parallel zu  $q$  und verbinde ihren Halbierungspunkt mit  $M$ . Dies gibt den konjugierten Durchmesser  $MP$ . Von  $P$  aus lege man Tangenten an die Ellipse. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte gibt den Schnittpunkt  $Q$ . Man mache  $MQ_1 = MQ$ , dann ist  $Q_1$  der Antipol.

Schneidet die Gerade die Ellipse, so ist die Konstruktion noch etwas einfacher. (Fig. 201.) Es gibt noch zahlreiche andere Lösungen.

274) **Satz.** Die Koordinaten des Antipols der Ordinatenachse in Bezug auf die Centralellipse einer Fläche  $F$  bestimmen sich mittels der Gleichungen

$$x_1 = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

$$y_1 = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

**Beweis.** In Fig. 202 sei  $S$  der Schwerpunkt der Fläche  $F$ , seine Koordinaten seien  $q$  und  $p$ ;  $P$  sei der nach obiger Methode konstruierte Antipol der Ordinatenachse  $OY$  in Bezug auf die Centralellipse. Die Hauptachsen der letzteren bilden ein zweites Koordinatensystem  $\xi\eta$ . In diesem System habe  $P$  die Koordinaten  $\xi_1$  und  $\eta_1$ , im anderen  $x_1$  und  $y_1$ . Die Gleichung der Antipolare  $OY$  ist dann in ersterem System nach Obigem

$$\frac{\xi \xi_1}{a^2} + \frac{\eta \eta_1}{b^2} + 1 = 0.$$

Setzt man  $\xi = 0$  und dann  $\eta = 0$ , so findet man die Abschnitte

$$SA = -\frac{a^2}{\xi_1}, \quad SB = -\frac{b^2}{\eta_1}.$$

Hat  $\alpha$  die aus Fig. 202 ersichtliche Bedeutung, so ist mit Hülfe der Schwerpunktskoordinaten

$$SA = -\frac{p}{\sin \alpha}, \quad SB = -\frac{p}{\cos \alpha}.$$

Setzt man dies in die vorigen Gleichungen ein, so folgen die Koordinaten des Antipols  $P$  als

$$\xi_1 = \frac{a^2}{p} \sin \alpha, \quad \eta_1 = \frac{b^2}{p} \cos \alpha.$$

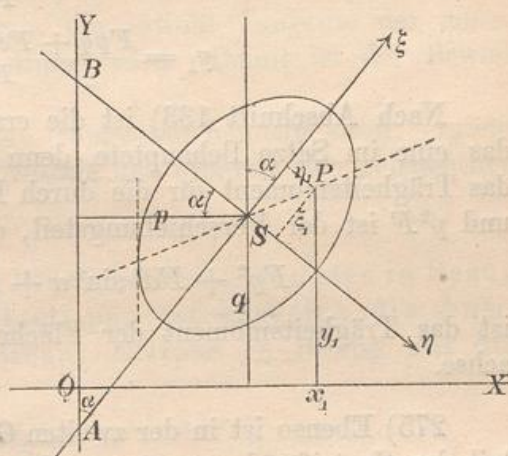
Zwischen den Koordinaten  $x_1, y_1, \xi_1$  und  $\eta_1$  bestehen aber folgende Beziehungen:

$$x_1 = p + \xi_1 \sin \alpha + \eta_1 \cos \alpha,$$

$$y_1 = q + \xi_1 \cos \alpha - \eta_1 \sin \alpha.$$

Einsetzung der Werte von  $\xi_1$  und  $\eta_1$  giebt

Fig. 202.



$$x_1 = p + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{p} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{p},$$

$$y_1 = q + \frac{a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{p} - \frac{b^2 \sin \alpha \cos \alpha}{p},$$

oder, wenn man gleichnamig macht und  $a^2 - b^2 = e^2$  setzt,

$$x_1 = \frac{p^2 + a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{p},$$

$$y_1 = \frac{pq + e^2 \sin \alpha \cos \alpha}{p}.$$

Multipliziert man oben und unten mit  $F$ , so wird

$$x_1 = \frac{Fp^2 + Fa^2 \sin^2 \alpha + Fb^2 \cos^2 \alpha}{Fp},$$

$$y_1 = \frac{Fpq + Fe^2 \sin \alpha \cos \alpha}{Fp}.$$

Nach Abschnitt 133) ist die erste Gleichung nichts anderes, als das eine im Satze Behauptete, denn  $Fa^2 \sin^2 \alpha + Fb^2 \cos^2 \alpha$  bedeutet das Trägheitsmoment für die durch Drehung um  $\alpha$  gewonnene Achse, und  $p^2 F$  ist der Verschiebungsteil, d. h.

$$Fp^2 + Fa^2 \sin^2 \alpha + Fb^2 \cos^2 \alpha = F\rho^2$$

ist das Trägheitsmoment der Fläche  $F$  in Bezug auf die Ordinatenachse.

275) Ebenso ist in der zweiten Gleichung  $Fpq$  der Verschiebungsteil des Centrifugalmomentes, während nach Nr. 140

$$Fe^2 \sin \alpha \cos \alpha = F \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha = F\lambda^2$$

das durch Drehung gewonnene Centrifugalmoment ist.

Die Nenner in beiden Gleichungen bedeuten das statische Moment  $M_y$ . Es ist also in der That

$$x_1 = \frac{T_y}{M_y}, \quad y_1 = \frac{M_{xy}}{M_y}.$$

Demnach stimmt der Antipol überein mit dem Angriffspunkte der Centrifugalkraft der um die Ordinatenachse gedrehten Fläche  $F$ , ebenso mit dem Angriffspunkte des seitlichen Wasserdrucks gegen diese Fläche, vorausgesetzt, daß die Ordinatenachse Wasserstandslinie ist, mit der Schwerpunktsprojektion des mittels einer durch  $OY$  gehenden Ebene abgeschrägten Cylinders, und das Entsprechende gilt von allen andern physikalischen, mechanischen und stereometrischen Problemen, die früher besprochen worden sind.

Graphisch lassen sich also die entsprechenden Punkte mit Hilfe der Culmannschen Centralellipse sehr leicht bestimmen.

276) Auch für den Zusammenhang zwischen der Culmannschen Centralellipse und den übrigen Culmannschen Trägheitsellipsen ist der Antipol von grundlegender Bedeutung, wie sich aus den folgenden Betrachtungen ergibt.

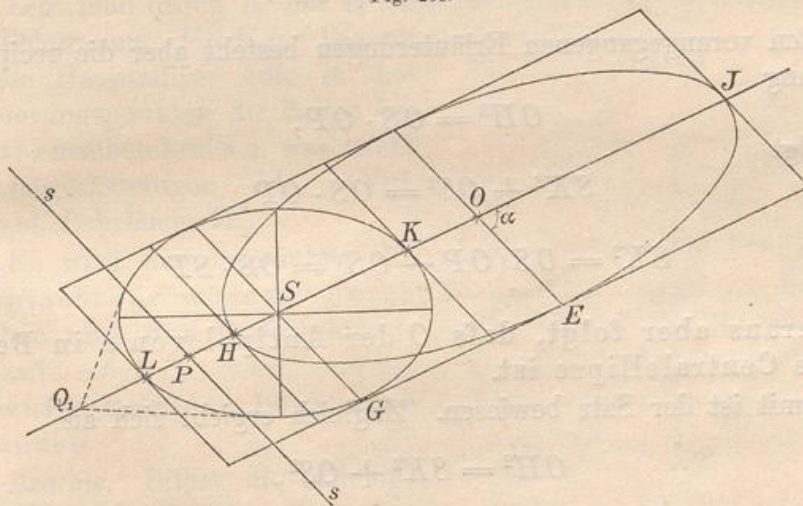
**Satz.** Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Culmannschen Trägheitsellipsen sind parallel zu ihrer Centrale.

**Beweis.** Sind  $P_1$  und  $P_2$  die Mittelpunkte, und ist  $F\varrho^2$  das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse  $P_1P_2$ , so hat man auf der letzteren in  $P_1$  bzw.  $P_2$  ein Lot  $\varrho$  zu errichten und durch seinen Endpunkt eine Parallele zu legen, die sowohl Tangente der einen, als auch der andern Trägheitsellipse wird. Damit ist der Beweis geliefert.

Dafs es sich nur um äufsere Tangenten handeln kann, ergibt sich aus dem Parallelismus zur Centrale und erhärtet sich gelegentlich des folgenden Satzes.

277) **Satz.** Die Polare des Flächenschwerpunktes in Bezug auf eine beliebige Trägheitsellipse ist zugleich die Antipolare des Mittelpunktes dieser Ellipse in Bezug auf die Centralellipse.

Fig. 203.



**Beweis:** In Fig. 203 ist die um  $S$  gelegte Centralellipse und die um einen beliebigen Punkt  $O$  gelegte Trägheitsellipse dargestellt. Die gemeinschaftlichen Tangenten sind nach Nr. 276 parallel zu  $OS$ .

Die in den Schnittpunkten  $L, H, K, J$  dieser Geraden mit den Ellipsen an die letzteren gelegten Tangenten sind sämtlich parallel (konjugierte Richtung zum Durchmesser  $OS$ ). Die Gerade  $s$ , die Polare des Punktes  $S$  in Bezug auf die Ellipse  $O$ , ist parallel zu den Tangenten, ebenso die zu  $OS$  konjugierten Halbmesser  $OE$  und  $SG$ . Der von diesen konjugierten Richtungen eingeschlossene spitze Winkel sei  $\alpha$ , der senkrechte Abstand der gemeinschaftlichen Tangenten vom Durchmesser  $OS$  also  $OE \cdot \sin \alpha$ , während  $OH \cdot \sin \alpha$  der Abstand der in  $H$  und  $J$  berührenden Tangenten von  $O$  ist.

Das Trägheitsmoment der Fläche  $F$  für die Achse  $OE$  ist, wie sich aus der Erklärung der Culmannschen Ellipse ergibt,

$$FQ^2 = F(OH \cdot \sin \alpha)^2 = T_1,$$

das in Bezug auf die Achse  $SG$  genommen ist ebenso

$$T = F(SK \cdot \sin \alpha)^2.$$

Nach dem Verschiebungssatze ist ferner

$$T_1 = T + e^2 F,$$

also hier

$$F \cdot (OH \cdot \sin \alpha)^2 = F \cdot (SK \cdot \sin \alpha)^2 + F(OS \cdot \sin \alpha)^2,$$

denn  $OS \cdot \sin \alpha$  ist die Verschiebungslänge von  $SG$  nach  $OE$ . Daraus folgt

$$OH^2 = SK^2 + OS^2.$$

Nach den vorangegangenen Erläuterungen besteht aber die reciproke Beziehung

$$OH^2 = OS \cdot OP,$$

also folgt

$$SK^2 + OS^2 = OS \cdot OP,$$

so dafs

$$SK^2 = OS(OP - OS) = OS \cdot SP$$

ist.

Daraus aber folgt, dafs  $O$  der Antipol von  $s$  in Bezug auf die Centralellipse ist.

Damit ist der Satz bewiesen. Zugleich ergibt sich aus

$$OH^2 = SK^2 + OS^2,$$

dafs  $OH > OS$  ist. Der Schwerpunkt  $S$  wird also von jeder Culmannschen Trägheitsellipse umschlossen.

**Bemerkung.** Kennt man mehrere Trägheitsellipsen und den Schwerpunkt, so kann man auch mehrere (doppelt so viel) Tangenten



der Centralellipse zeichnen. Es muß demnach eine ganze Reihe von Konstruktionsaufgaben bestehen, z. B.:

278) **Aufgabe.** Die Trägheitsellipse einer Fläche  $F$  für einen beliebigen Punkt  $O$  sei gegeben, ebenso der Schwerpunkt  $S$  der Fläche; die Centralellipse mit ihren Hauptachsen soll konstruiert werden.

**Auflösung.** Die in Figur 204 um  $O$  gelegte Ellipse sei die gegebene,  $S$ , welches nach Obigem innerhalb liegen muß, sei der gegebene Schwerpunkt. Man ziehe  $OS$  und die beiden parallelen Tangenten, konstruiere zu  $S$  die Polare  $s$  und bestimme  $SK = SL$  mittels der Gleichung (vgl. Nr. 277)

$$SK^2 = SO \cdot PS.$$

Legt man durch  $K$  und  $L$  Parallele zur Polare, so erhält man ein Parallelogramm  $FGHJ$ . Diesem ist die Hauptellipse (die in den Halbierungspunkten die Seiten berührt) einzubeschreiben, was leicht zu bewerkstelligen ist. (Vgl. Method. Lehrbuch, II.)

Es wird nun behauptet, die Hauptachsen würden durch Halbierung des Brennstrahlwinkels  $F_1SF_2$  und seines Nebenwinkels der Lage nach gefunden.

**Beweis.** Bildet die beliebige Achse  $OZ$  mit  $OF_2$  den Winkel  $\alpha$ , so ist nach Nr. 133 der Radius des Trägheitsmomentes in Bezug auf diese Achse zu bestimmen aus

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha.$$

Fig. 204.

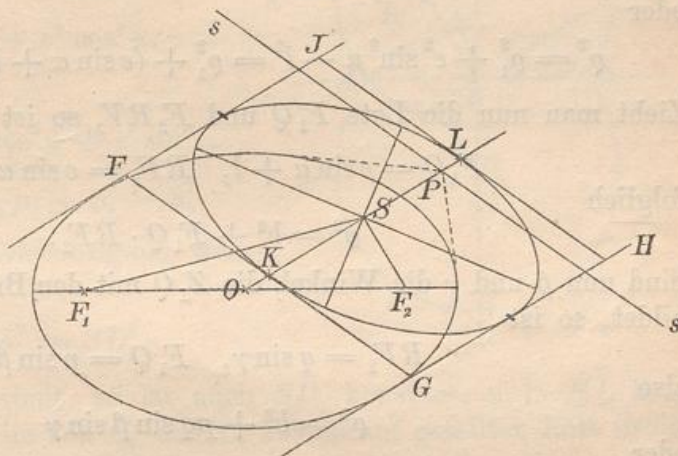
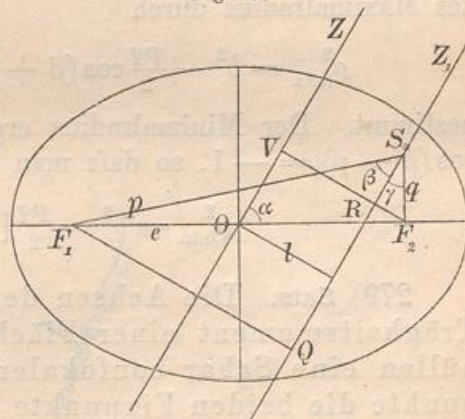


Fig. 205.



Für eine Parallele durch  $S$ , die von  $O$  um  $l$  entfernt sein mag, ist demnach

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha - l^2,$$

oder, da  $\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = e^2$  ist,

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 \sin^2 \alpha + e^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha - l^2$$

oder

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + e^2 \sin^2 \alpha - l^2 = \varrho_1^2 + (e \sin \alpha + l)(e \sin \alpha - l).$$

Zieht man nun die Lote  $F_1Q$  und  $F_2RV$ , so ist

$$F_1Q = e \sin \alpha + l, \quad RF_2 = e \sin \alpha - l,$$

folglich

$$\varrho^2 = b^2 + F_1Q \cdot RF_2.$$

Sind nun  $\beta$  und  $\gamma$  die Winkel, die  $Z_1Q$  mit den Brennstrahlen  $p$  und  $q$  bildet, so ist

$$RF_2 = q \sin \gamma, \quad F_1Q = p \sin \beta,$$

also

$$\varrho^2 = b^2 + pq \sin \beta \sin \gamma$$

oder

$$\varrho^2 = b^2 + \frac{1}{2} pq [\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)].$$

Hier ist rechts alles konstant, mit Ausnahme der Differenz  $(\beta - \gamma)$ . Ein Maximum tritt also ein, wenn  $\beta - \gamma = 0$ , folglich ist die Winkelhalbierende die Achse des Maximalmomentes, das Lot dazu die des Minimalmomentes.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Zugleich ist die Gröfse des Maximalradius durch

$$\varrho_{\max}^2 = b^2 - \frac{pq}{2} \cos(\beta + \gamma) = b^2 - \frac{pq}{2} \cos(F_1SF_2)$$

bestimmt. Der Minimalradius ergibt sich für  $\beta - \gamma = 180^\circ$ , also  $\cos(\beta - \gamma) = -1$ , so daß man erhält

$$\varrho_{\min}^2 = b^2 - \frac{pq}{2} [1 + \cos(F_1SF_2)].$$

279) **Satz.** Die Achsen der Ebene, in Bezug auf die das Trägheitsmoment einer Fläche konstanten Wert hat, umhüllen eine Schar confokaler Kegelschnitte, deren Brennpunkte die beiden Fixpunkte sind.

**Beweis.** Nach Nr. 145 war in Bezug auf eine Achse, die von den Fixpunkten die Entfernung  $p_1$  und  $p_2$  hatte, der Trägheitsradius  $\varrho$  zu bestimmen aus der Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + p_1 p_2.$$

Aus Figur 206 folgt ferner

$$SD_1^2 = p^2 + DD_1^2 = p^2 + e^2 \sin^2 \alpha.$$

Außerdem war schon in Nr. 145 gezeigt, daß, wenn  $SC_1 = e$  gesetzt wird,

$$p_1 p_2 = p^2 - e^2 \cos^2 \alpha,$$

also

$$p^2 = p_1 p_2 + e^2 \cos^2 \alpha.$$

Demnach ist

$$SD_1^2 = p_1 p_2 + e^2 \cos^2 \alpha + e^2 \sin^2 \alpha$$

$$= p_1 p_2 + e^2 = p_1 p_2 + \varrho_1^2 - \varrho_2^2,$$

folglich unter Berücksichtigung der ersten Gleichung

$$SD_1^2 = \varrho^2 - \varrho_2^2 = SD_2^2.$$

Ist nun  $\varrho$  konstant, so ist auch  $SD_1$  konstant, d. h.  $KL$  liegt dann stets so, daß die von  $C_1$  und  $C_2$  aus darauf gefällten Lote in die

Peripherie des mit  $SD_1 = \sqrt{\varrho^2 - \varrho_2^2}$

um  $S$  geschlagenen Kreises fallen.

Dies ist aber eine bekannte Brennpunkteigenschaft der Ellipse

und der Hyperbel. Ist  $SD_1 > e$ ,

so schneidet  $KL$  die Gerade  $C_1 C_2$  außerhalb der Strecke  $C_1 C_2$ ,

und es handelt sich um eine Ellipse. Dabei ist  $\varrho^2 - \varrho_2^2 > e^2$ ,

d. h.  $\varrho^2 - \varrho_2^2 > \varrho_1^2 - \varrho_2^2$ , demnach

handelt es sich um den Fall  $\varrho > \varrho_1$ .

Ist dagegen  $SD_1 < e$ , so schneidet

die Gerade  $KL$  zwischen  $C_1$  und  $C_2$ ,

was auf den Fall der Hyperbel führt. Dabei ist  $\varrho < \varrho_1$ .

Ist endlich  $SD_1 = e$ , so ist

$\varrho = a$ , d. h. die Strahlen geben

zwei Büschel durch  $C_1$  und  $C_2$ , welches gewissermaßen die un-

endlich flache Ellipse  $C_1 C_2$  bezw. die unendlich flache Hyperbel (die von  $C_1$  nach  $+\infty$ , von  $C_2$  nach  $-\infty$  geht) umhüllt.

Fig. 207 stellt die betreffende Doppelschar confokaler Kegel-

Fig. 206.

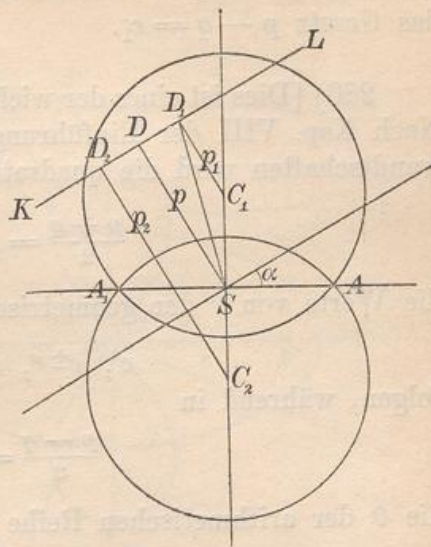
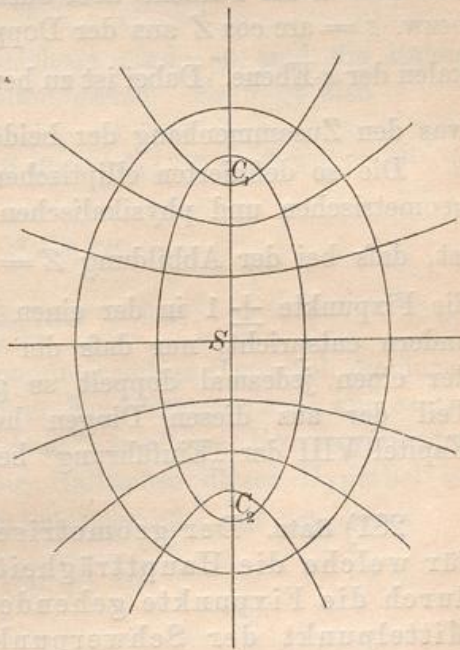


Fig. 207.



schnitte dar. Die eine Schar hat das Gesetz  $p + q = c$ , die andere das Gesetz  $p - q = c_1$ .

280) [Dies ist eines der wichtigsten isothermischen Kurvensysteme. Nach Kap. VIII der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften wird die quadratische Einteilung erreicht, wenn in

$$\frac{p + q}{2} = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) = c$$

die Werte von  $r$  der geometrischen Reihe

$$e^0, e^{\pm \alpha}, e^{\pm 2\alpha}, e^{\pm 3\alpha}, \dots$$

folgen, während in

$$\frac{p - q}{2} = \cos \vartheta = c_1$$

die  $\vartheta$  der arithmetischen Reihe

$$0, \pm \alpha, \pm 2\alpha, \pm 3\alpha, \dots$$

folgen. Das System entsteht mit Hilfe der Abbildung  $Z = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  bzw.  $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$  aus dem System der concentrischen Kreise und Radien der  $z$ -Ebene, aber auch mit Hilfe der Abbildung  $Z = \cos z$  bzw.  $z = \arccos Z$  aus der Doppelschar der Horizontalen und Vertikalen der  $z$ -Ebene. Dabei ist zu beachten, daß  $\cos z = \frac{1}{2} \left( e^{zi} + \frac{1}{e^{zi}} \right)$  ist, was den Zusammenhang der beiden Abbildungsarten aufklärt.

Die so definierten elliptischen Koordinaten geben zu zahlreichen geometrischen und physikalischen Betrachtungen Anlaß. Interessant ist, daß bei der Abbildung  $Z = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  dem Kreisbüschel durch die Fixpunkte  $\pm 1$  in der einen Ebene wiederum ein solches in der andern entspricht, nur daß der Schnittwinkel zweier Individuen in der einen jedesmal doppelt so groß ist, wie in der andern. Ein Teil der aus diesen Dingen hervorgehenden Folgerungen ist in Kapitel VIII der „Einführung“ behandelt.]

281) **Satz.** Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für welche die Hauptträgheitsachsen parallel sind, ist eine durch die Fixpunkte gehende gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt ist und deren Asymptoten den beiden gegebenen Richtungen parallel sind.

**Beweis.** Die Figur stelle die um  $S$  gelegte Centralellipse dar. Die Achsen  $\xi$  und  $\eta$  sollen die gegebene konstante Richtung der zu untersuchenden Hauptachsen darstellen. Die Winkelhalbierenden  $X$

und  $Y$  geben also die Richtungen der Gleichheitsachsen an, die ebenfalls für alle zu untersuchenden Punkte konstant sind. Diese letzteren mögen mit der Hauptachse der Centralellipse den Winkel  $\alpha$  einschließen.

Ist nun  $P$  ein Punkt des zu untersuchenden Ortes, so ist nach dem Verschiebungssatze und dem Drehungssatze in Bezug auf die beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  für das Trägheitsmoment (vgl. Nr. 133)

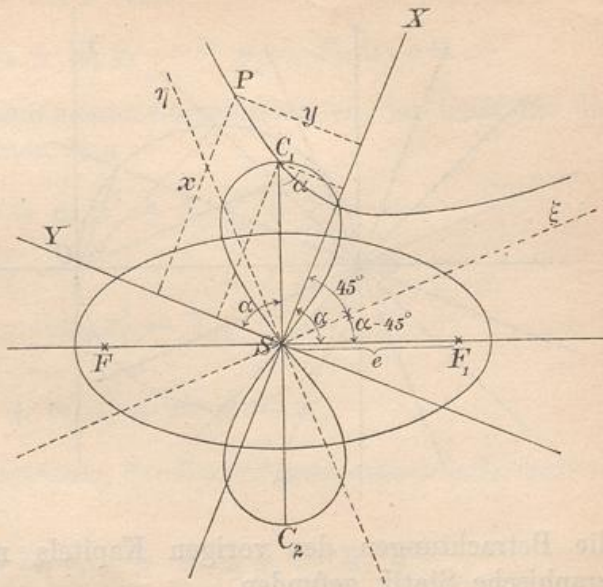


Fig. 208.

$$\varrho_x^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha + y^2,$$

$$\varrho_y^2 = \varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha + x^2.$$

Da aber  $X$  und  $Y$  die Gleichheitsachsen sind, so sind die linken Seiten, folglich auch die rechten Seiten gleich. Es folgt also

$$y^2 - x^2 = \cos^2 \alpha (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) - \sin^2 \alpha (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) = e^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

oder

$$y^2 - x^2 = e^2 \cos 2\alpha,$$

oder auch

$$x^2 - y^2 = e^2 \cos (180^\circ - 2\alpha).$$

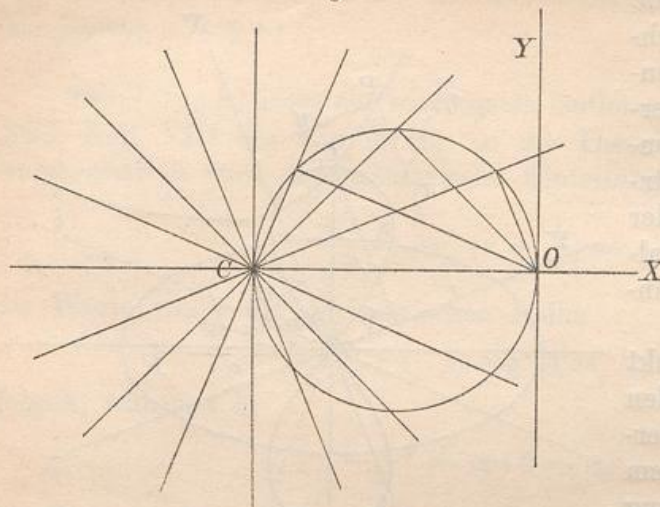
Demnach ist der geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel, die durch die Fixpunkte  $C_1$  und  $C_2$  geht, weil deren Koordinaten  $e \cos \alpha$  und  $e \sin \alpha$  der Gleichung  $y^2 - x^2 = e^2 \cos^2 \alpha - e^2 \sin^2 \alpha$  genügen. Ihre Asymptoten aber haben die Richtung  $\xi, \eta$ . Die Halbachse dieser Hyperbel ist gleich  $e \sqrt{\cos (180^\circ - 2\alpha)}$ , der Scheitel liegt also auf der durch

$$r^2 = e^2 \cos (180^\circ - 2\alpha)$$

bestimmten Lemniskate.

282) Das durch die Fixpunkte gehende Büschel gleichseitiger Hyperbeln giebt die geometrischen Orte für alle möglichen konstanten Richtungen von Hauptachsen an. Die Figur ist nichts anderes, als

Fig. 209.



die Abbildung der nebenstehenden mit Hilfe der Funktion  $Z = \sqrt{z}$ , wobei  $C$  nach den Fixpunkten  $C_1$  und  $C_2$  transformiert wird. Das Strahlenbündel durch  $C$  giebt das Hyperbelbündel durch  $C_1$  und  $C_2$ , der Fußpunktkreis durch  $O$  und  $C$  giebt die Lemniskate durch  $O$ ,  $C_1$  und  $C_2$ .

So haben denn die Betrachtungen des vorigen Kapitels neue Bedeutung für die graphische Statik gefunden.

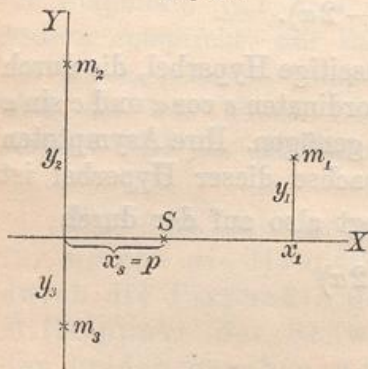
### F. Ersatz der homogenen ebenen Fläche $F$ durch drei Massenpunkte nach Reye.

283) Soll eine Fläche  $F$  in mechanischer Hinsicht durch drei Massenpunkte  $m_1, m_2, m_3$  ersetzt werden, z. B. bezüglich der Drehung um irgend einen Punkt oder eine Gerade der Ebene, so muß zunächst sein

$$1) \quad m_1 + m_2 + m_3 = F.$$

Werden hierbei  $m_1$  und  $m_2$  willkürlich gewählt, so ist die dritte Masse durch  $m_3 = F - (m_1 + m_2)$  bestimmt.

Fig. 210.



Damit z. B. auch die Centrifugalkräfte übereinstimmen, müssen die statischen Momente der Fläche und des Punktsystems in Bezug auf willkürliche Koordinatenachsen identisch sein, so daß auch die Schwerpunkte zusammenfallen. Um die Gleichungen möglichst einfach zu machen, kann man die Gerade  $m_2 m_3$  zur  $Y$ -Achse machen, das vom Schwerpunkte  $S$  auf diese Gerade gefällte Lot zur  $X$ -Achse. Dann muß in Bezug auf die  $Y$ -Achse sein

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = F x_s,$$

oder, da  $x_2 = x_3 = 0$ ,

$$2) \quad m_1 x_1 = F x_s = F p.$$

In Bezug auf die X-Achse muß sein

$$3) \quad m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = F \cdot y_s = F \cdot 0 = 0.$$

Damit auch die Trägheitsmomente übereinstimmen, so muß für die gewählten Koordinatenachsen sein

$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = T_y$$

oder, da  $x_2 = 0 = x_3$  ist,

$$4) \quad m_1 x_1^2 = T_y,$$

und

$$5) \quad m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 = T_x.$$

Endlich ist noch Übereinstimmung der Centrifugalmomente erforderlich, d. h. es muß sein

$$m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3 = M_{xy},$$

oder einfacher

$$6) \quad m_1 x_1 y_1 = M_{xy}.$$

Da die Anzahl der Unbekannten  $m_1, m_2, m_3, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  größer ist, als die der Gleichungen, so kann man die Größe und Lage der drei Massenpunkte nicht durch Rechnung bestimmen, sondern man darf drei Elemente willkürlich wählen und die übrigen sechs berechnen. An Stelle der Rechnung aber können geometrische Beziehungen treten, wie sie aus der Lehre vom geometrischen Orte bekannt sind.

Zunächst ergibt sich Folgendes: Aus Gleichung 2) und 4) folgt durch Division

$$x_1 = \frac{T_y}{pF} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

aus 6) und 2) folgt

$$y_1 = \frac{M_{xy}}{m_1 x_1} = \frac{M_{xy}}{pF} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Nach Nr. 274 ist demnach  $m_1$  der Antipol der Koordinatenachsen in Bezug auf die Centralellipse der Fläche. Ist diese bekannt, so kann also die Lage von  $m_1$  nach Nr. 273 leicht konstruiert werden, sobald nur  $m_2$  und  $m_3$  festgelegt sind.

Was von der Geraden  $m_2 m_3$  gilt, gilt auch von den Geraden  $m_3 m_1$  und  $m_1 m_2$ . Also:

Die drei Massenpunkte müssen so liegen, daß jeder von ihnen der Antipol für die Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf die Centralellipse von  $F$  ist.

Angenommen, diese Aufgabe wäre gelöst, dann findet sich die Größe der Massen aus den Gleichungen

$$m_1 = \frac{Fp}{x_1}, \quad m_2 + m_3 = F - m_1, \quad m_2 y_2 + m_3 y_3 = -m_1 y_1.$$

Damit würde die Aufgabe überhaupt erledigt sein.

284) Um weitere Gesichtspunkte aufzufinden, denke man sich die Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  der Größe nach willkürlich gegeben und nach Art der Figur 211 die Centralellipse in das System eingezeichnet, wobei zunächst nur darauf Rücksicht zu nehmen ist, daß  $x_1$  als Antipol der Koordinatenachsen erscheint.

In Nr. 274 war nun

$$x_1 = \frac{p^2 + a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{p} = p + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{p} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{p},$$

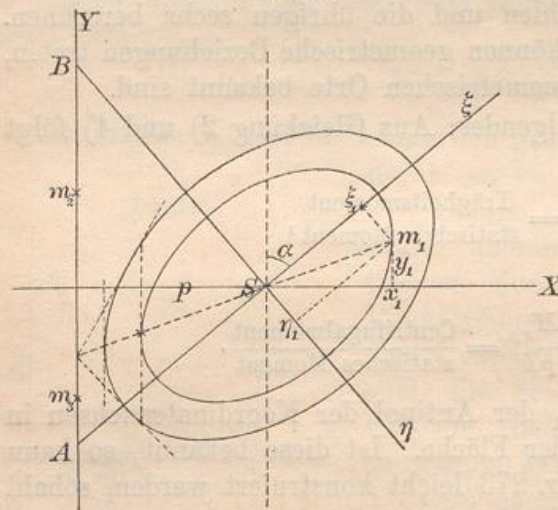
also

$$\frac{x_1}{p} = 1 + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{p^2} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{p^2},$$

oder, da nach Gleichung 2)

$$\frac{x_1}{p} = \frac{F}{m_1}, \quad \text{also} \quad \frac{x_1}{p} - 1 = \frac{F}{m_1} - 1 = \frac{F - m_1}{m_1}$$

Fig. 211.



ist,

$$\frac{F - m_1}{m_1} = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{p^2} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{p^2}.$$

Dort war ferner

$$\xi_1 = \frac{a^2}{p} \sin \alpha, \quad \eta_1 = \frac{b^2}{p} \cos \alpha,$$

so daß man hat

$$\frac{F - m_1}{m_1} = \frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2}.$$

Demnach ist der geometrische Ort von  $m_1$  eine Ellipse mit dem Mittelpunkte  $S$ , die der Centralellipse ähnlich ist und ähnlich zu ihr liegt. Ihre Achsen sind von der Länge

$$a_1 = a \sqrt{\frac{F - m_1}{m_1}}, \quad b_1 = b \sqrt{\frac{F - m_1}{m_1}}.$$

Ebenso ist es mit den andern Massenpunkten. Also:



Denkt man sich  $m_1, m_2$  (und dadurch  $m_3$ ) der Größe nach gewählt, so sind die drei Punkte in ihrer Lage auf drei Ellipsen mit dem Mittelpunkt  $S$  beschränkt, die ähnlich und ähnlich liegend zur Centralellipse sind und folgende Gleichungen haben:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = \frac{F - m_1}{m_1}, \quad \frac{\xi_2^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = \frac{F - m_2}{m_2},$$

$$\frac{\xi_3^2}{a^2} + \frac{\eta_3^2}{b^2} = \frac{F - m_3}{m_3}.$$

285) Einen von den Punkten darf man auf der ihm entsprechenden Ellipse willkürlich legen. Die Lage der andern ergibt sich dann aus Folgendem:

Es wird sich zeigen, daß das von den Punkten gebildete Dreieck einen konstanten Inhalt haben muß.

Nach Gleichung 1) und 5) ist nämlich

$$m_2 + m_3 = F - m_1,$$

$$m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 = T_x - m_1 y_1^2,$$

folglich durch Multiplikation

$$m_2^2 y_2^2 + m_2 m_3 (y_2^2 + y_3^2) + m_3^2 y_3^2 = T_x (F - m_1) - F m_1 y_1^2 + m_1^2 y_1^2.$$

Da nach Gleichung 3)

$$m_2 y_2 + m_3 y_3 = -m_1 y_1$$

und durch Quadrierung

$$m_2^2 y_2^2 + 2m_2 m_3 y_2 y_3 + m_3^2 y_3^2 = m_1^2 y_1^2$$

ist, so ergibt sich durch Subtraktion

$$m_2 m_3 (y_2^2 - 2y_2 y_3 + y_3^2) = T_x (F - m_1) - F m_1 y_1^2.$$

Multipliziert man beiderseits mit  $m_1 x_1^2$ , so folgt

$$m_1 m_2 m_3 (y_2 - y_3)^2 x_1^2 = (F - m_1) m_1 x_1^2 T_x - F m_1^2 x_1^2 y_1^2.$$

Nun ist der Inhalt des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks

$$\Delta = \frac{1}{2} (y_2 - y_3) x_1,$$

folglich

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = 4 \cdot \frac{1}{4} (y_2 - y_3)^2 x_1^2 m_1 m_2 m_3$$

$$= (F - m_1) m_1 x_1^2 T_x - F m_1^2 x_1^2 y_1^2.$$

Da nach Gleichung 6)

$$m_1 x_1 y_1 = M_{xy}$$

und, wenn  $T_s$  das Trägheitsmoment von  $F$  in Bezug auf die senkrechte Schwerpunktsachse bedeutet,

$$m_1 x_1^2 = T_y = T_s + Fp^2$$

ist, so folgt

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = (F - m_1) (T_s + Fp^2) T_x - FM_{xy}^2$$

oder

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = FT_s T_x - FM_{xy}^2 + T_x [F^2 p^2 - m_1 (T_s + Fp^2)].$$

Setzt man wieder  $m_1^2 x_1^2 = F^2 p^2$  und  $m_1 (T_s + Fp^2) = m_1^2 x_1^2$  ein, so wird der dritte Posten gleich Null, und es bleibt stehen

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = F (T_s T_x - M_{xy}^2),$$

woraus folgt

$$4\Delta^2 \frac{m_1 m_2 m_3}{F} = T_s T_x - M_{xy}^2.$$

Nach dem Verschiebungssatze für das Centrifugalmoment ist dieses für die  $X$ -Achse und die durch  $S$  gelegte Senkrechte ebenso groß, wie  $M_{xy}$ , so daß man schreiben kann

$$M_{xs} = M_{xy}.$$

Nach Nr. 152 ist dann

$$M_{xs}^2 = T_x T_s - a^2 b^2 F^2$$

oder

$$T_x T_s - M_{xs}^2 = a^2 b^2 F^2.$$

Dies in die obige Gleichung eingesetzt giebt

$$4\Delta^2 \frac{m_1 m_2 m_3}{F} = a^2 b^2 F^2,$$

so daß

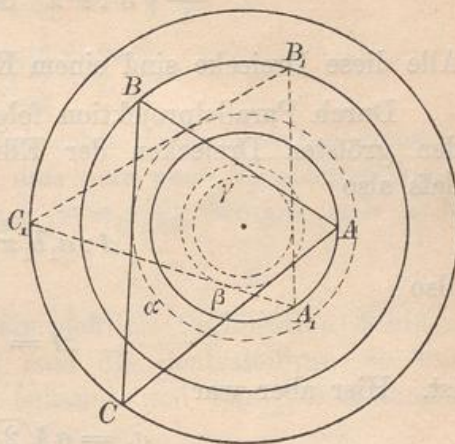
$$\Delta = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{F^3}{m_1 m_2 m_3}}.$$

Damit ist nachgewiesen, daß das von den Massenpunkten gebildete Dreieck nicht von der Lage der Punkte auf den drei Ellipsen abhängig ist, sondern einen konstanten Inhalt hat. Hat man eins von diesen Dreiecken, so kann man unendlich viele andere leicht konstruieren. Sind nämlich  $r_1, r_2, r_3$  die Radien von drei concentrischen Kreisen, auf deren Umfängen die Ecken eines Dreiecks  $ABC$  liegen, so berührt jede Seite einen concen-

trischen Kreis  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Beginnt man das Tangenziehen an einer andern Stelle  $A_1$  des ersten Kreises, so schließt die Figur stets und erhält konstanten Inhalt.

Durch Parallelprojektion entsteht eine Figur aus concentrischen und ähnlichen Ellipsen. Auch bei diesen schließt die Tangentenkonstruktion stets und giebt ebenfalls flächengleiche Dreiecke. Daraus ergeben sich unendlich viele mögliche Lagen der drei Punkte.

Fig. 212.



286) Aufgabe. Eine Fläche  $F$  durch drei mit gleicher Masse belegte Punkte zu ersetzen.

Auflösung. Jede der Massen ist gleich  $\frac{F}{3}$  zu setzen.

Die drei oben besprochenen Ellipsen fallen in eine einzige zusammen, deren Gleichung wird

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{F - \frac{F}{3}}{\frac{F}{3}} = 2$$

oder

$$\frac{\xi^2}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{\eta^2}{(b\sqrt{2})^2} = 1.$$

Ihre Achsen sind also das  $\sqrt{2}$ -fache von den Achsen der Central-ellipse.

Das von den drei Massenpunkten gebildete Dreieck erhält den Inhalt

$$\Delta = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{F^3}{\frac{F^3}{27}}} = \frac{3ab}{2} \sqrt{3}.$$

Dies ist aber, wie leicht gezeigt werden kann, der Inhalt der größten Dreiecke, die sich überhaupt einer Ellipse einbeschreiben lassen.

Das größte aller Dreiecke, die dem Kreise einbeschrieben werden können, ist, wie leicht bewiesen werden kann, das gleichseitige. Sein Inhalt ist  $\frac{3r^2}{4} \sqrt{3}$ .

Er verhält sich zum Kreisinhalt, wie

$$\frac{3r^2}{4}\sqrt{3} : r^2\pi \quad \text{oder wie} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} : 1.$$

Alle diese Dreiecke sind einem Kreise vom Radius  $\frac{r}{2}$  umschrieben.

Durch Parallelprojektion folgt, daß dasselbe Verhältnis zwischen den größten Dreiecken der Ellipse und ihrem Inhalte stattfindet, daß also

$$\Delta : a_1 b_1 \pi = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} : 1,$$

also

$$\Delta = \frac{a_1 b_1 3\sqrt{3}}{4}$$

ist. Hier aber war

$$a_1 = a\sqrt{2}, \quad b_1 = b\sqrt{2},$$

also

$$a_1 b_1 = 2ab,$$

es ist also

$$\Delta = \frac{3}{2} ab\sqrt{3}.$$

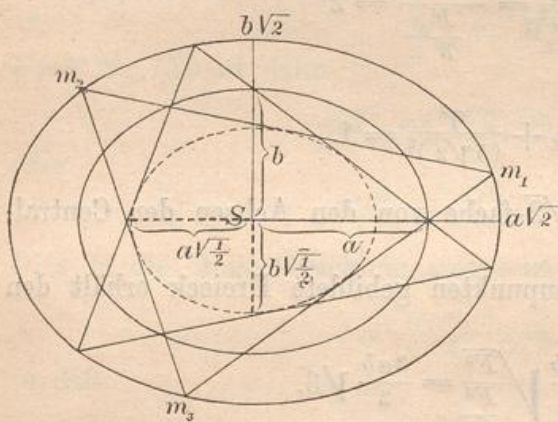
Damit ist die obige Behauptung bewiesen. Alle diese Dreiecke sind aber einer ähnlichen Ellipse halben Maßstabes umschrieben.

In Fig. 213 sei die mittlere Ellipse die Centralellipse der Fläche  $F$  mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ ; die größte Ellipse habe die Halbachsen  $a\sqrt{2}$  und  $b\sqrt{2}$ , die kleinste die Halbachsen  $a\sqrt{\frac{1}{2}}$  und  $b\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Um die kleinste Ellipse lassen sich unendlich viele Tangentendreiecke legen, die ihre Ecken auf der größten Ellipse haben. Bringt man in den Ecken

eines beliebigen dieser Dreiecke Massen von der Größe  $\frac{F}{3}$  an, so können diese Massen die Fläche  $F$  in mechanischer Hinsicht ersetzen.

287) Der Hauptvorteil der Reyeschen Methode beruht darin, daß man die statischen und die Trägheitsmomente einer Figur für beliebige Achsen sofort hinschreiben kann, sobald man eins der Punktdreiecke kennt. Sind nämlich  $x_1, x_2, x_3$  die Entfernungen der

Fig. 213.



Punkte von der Achse, so ist das gesuchte  $T_1 = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2$ , dagegen ist  $M = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$ , also z. B.

$$\frac{T_x}{M_y} = \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2}{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}$$

Dasselbe kann in Bezug auf jede Senkrechte zu jener Achse gemacht werden, wodurch man  $T_y$  erhält, so daß man auch  $T_p$  ableiten kann. Ferner wird  $M_{xy} = m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3$ , woraus sich z. B.

$$\frac{T_x}{M_{xy}} \text{ und } \frac{T_y}{M_{xy}}$$

entwickeln läßt.

Endlich lassen sich durch Parallelprojektion (Collineation) Schlüsse auf andere Figuren ziehen. Kennt man die Centralellipse, so sind auch die beiden andern Ellipsen bekannt und alle Berechnungen kommen auf die eines Punktdreiecks hinaus.

Einige Beispiele werden dies erläutern.

288) Das Dreieck. Sollen die Punkte gleiche Massen  $\frac{F}{3}$  haben, so muß für den Fall, daß die Verbindungslinie  $m_2 m_3$  der Basis parallel sein soll,  $SA : SB = 1 : 2$  sein. Es folgt also

$$\frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} (2y)^2 = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$$

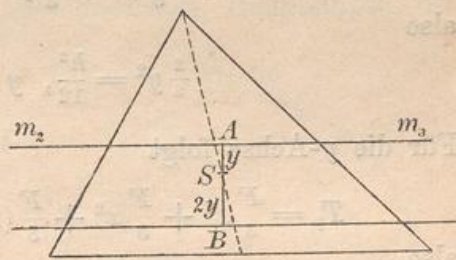
oder

$$2y^2 = \frac{h^2}{18},$$

also

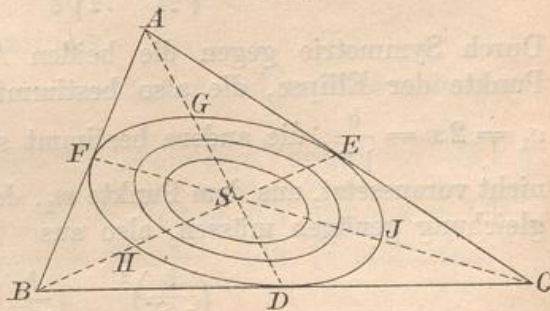
$$y = \frac{h}{6}, \quad 2y = \frac{h}{3},$$

Fig. 214.



d. h. der untere Punkt fällt in die Grundlinie, die beiden andern in die Verbindungslinie der Halbierungspunkte. Für das gleichseitige Dreieck also ist das Fußpunktdreieck der Höhen, für jedes beliebige Dreieck durch Parallelprojektion das Fußpunktdreieck der Mittellinien eins der gesuchten. Von der äußeren Ellipse hat man, da  $SG = GD$ ,  $SH = SE$ ,  $SJ = SF$  sein muß, sechs Punkte. Diese Ellipse aber ist identisch mit der in

Fig. 215.

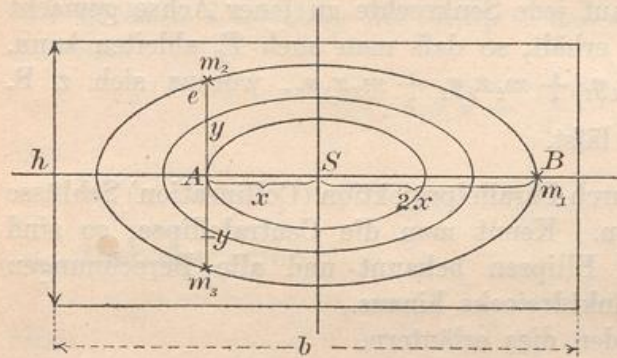


$D, E, F$  berührend. Dies konnte auch durch Projektion aus dem Falle des gleichseitigen Dreiecks geschlossen werden, wo es sich um

den In-Kreis handelt. Die Verkleinerung auf  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  und  $\frac{1}{2}$  des Maßstabes giebt die Centralellipse und die einbeschriebene Ellipse für sämtliche möglichen Punktdreiecke. Die Richtungen der Hauptachsen

sind mit Hilfe eines Kreises um  $S$ , der in symmetrisch liegenden Punkten schneidet, bequem zu bestimmen.

Fig. 216.



metrisch, wie  $m_1, m_2, m_3$  liegen, wobei  $SB = 2AS$  sein muß. Es folgt für die X-Achse

$$T_x = \frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} 0^2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{12},$$

also

$$\frac{2}{3} y^2 = \frac{h^2}{12}, \quad y = h \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{h}{2\sqrt{2}}.$$

Für die y-Achse folgt

$$T_y = \frac{F}{3} x^2 + \frac{F}{3} x^2 + \frac{F}{3} (2x)^2 = 2Fx^2 = \frac{hb^3}{12} = \frac{Fb^2}{12},$$

also

$$x^2 = \frac{b^2}{24},$$

daher

$$x = \frac{b}{\sqrt{24}} = \frac{b}{2\sqrt{6}}, \quad 2x = \frac{b}{\sqrt{6}}.$$

Durch Symmetrie gegen die beiden Achsen findet man drei neue Punkte der Ellipse, die also bestimmt ist. Die eine Halbachse ist  $a_1 = 2x = \frac{b}{\sqrt{6}}$ , die andere bestimmt sich, wenn man Vorkenntnisse nicht voraussetzt, aus dem Punkte  $m_2$ , dessen Koordinaten der Ellipsengleichung genügen müssen, also aus

$$\frac{\left(\frac{b}{\sqrt{24}}\right)^2}{a_1^2} + \frac{\left(\frac{h}{\sqrt{8}}\right)^2}{b_1^2} = 1$$

oder

$$\frac{b^2}{24 \frac{b^2}{6}} + \frac{h^2}{8 b_1^2} = 1$$

oder 
$$\frac{1}{4} + \frac{h^2}{8 b_1^2} = 1,$$

also 
$$\frac{h^2}{8 b_1^2} = \frac{3}{4}, \text{ d. h. } b_1 = h \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

Die Halbachsen verhalten sich also wie  $b$  und  $h$ , was nach Nr. 135 selbstverständlich war.

290) Für das Parallelogramm ergeben sich die drei Ellipsen durch Parallelprojektion der Figur 216. Ihre konjugierten Halbachsen bestimmen sich als  $\frac{b}{\sqrt{6}}$  und  $\frac{a}{\sqrt{6}}$ . Eins der Punktdreiecke ist eingezeichnet. Die drei Ellipsen sind ähnlich der einbeschriebenen Hauptellipse des Parallelogramms.

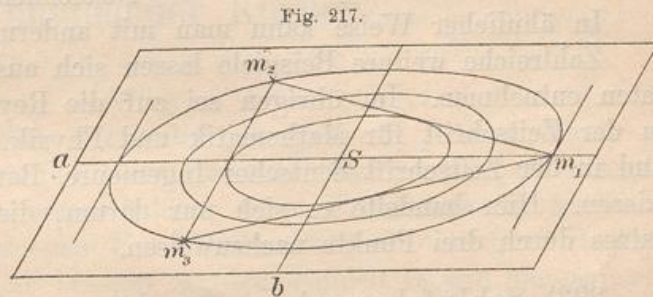


Fig. 217.

291) Kreis. Aus 
$$\frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} 0^2 = \frac{2}{3} F y^2 = \frac{r^4 \pi}{4} = \frac{F r^2}{4}$$

folgt 
$$y = r \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Aus 
$$\frac{2}{3} F x^2 + \frac{F}{3} (2x)^2 = \frac{F r^2}{4}$$

folgt 
$$x = r \sqrt{\frac{1}{8}}, \quad 2x = a_1 = r \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

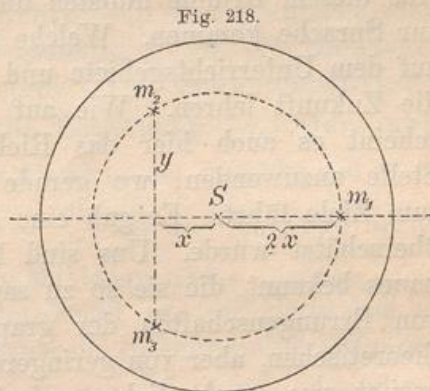


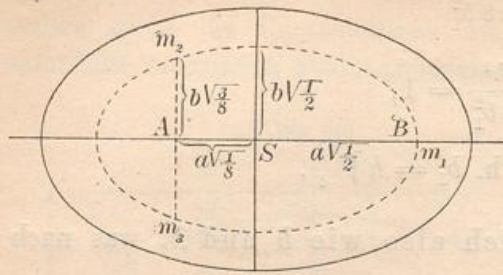
Fig. 218.

Die drei Punkte bilden einen Kreis mit Radius  $a_1 = r \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Die beiden andern Kreise sind leicht einzuzeichnen.

292) Ellipse. Durch Projektion folgt aus dem Vorigen  $SA = a \sqrt{\frac{1}{8}}$ , für  $m_1$  folgt der Abstand  $a \sqrt{\frac{1}{2}}$ , für  $m_2$  und  $m_3$  der Abstand  $\pm b \sqrt{\frac{3}{8}}$ . Nun muß  $m_2$  der Ellipsengleichung genügen, d. h. es muß sein

$$\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{8}}\right)^2}{\left(a \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{\left(b \sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2}{b_1^2} = 1,$$

Fig. 219.



$$\text{d. h.} \quad \frac{1}{4} + \frac{3b^2}{8b_1^2} = 1$$

$$\text{oder} \quad \frac{3b^2}{8b_1^2} = \frac{3}{4}$$

Es folgt  $b_1 = b\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Die beiden Ellipsen sind also ähnlich, die andern Ellipsen sind leicht einzuzeichnen.

In ähnlicher Weise kann man mit andern Gestalten fortfahren.

Zahlreiche weitere Beispiele lassen sich aus den früheren Resultaten entnehmen. Im übrigen sei auf die Reyeschen Abhandlungen in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 10, Seite 433 und in der Zeitschrift deutscher Ingenieure, Band 19, Seite 401 verwiesen. Hier handelte es sich nur darum, die Möglichkeit des Ersatzes durch drei Punkte nachzuweisen.

293) Schlussbemerkung zu den graphischen Methoden. Von den graphischen Methoden, deren Wichtigkeit in höherem Grade auf dem Gebiete des Bauwesens, als auf dem des Maschinenbaues liegt, ist bisher noch keine zur unbestrittenen Alleinherrschaft gelangt. Aus diesem Grunde mußten die bekannter gewordenen hier sämtlich zur Sprache kommen. Welche von ihnen sich einen dauernden Platz auf dem Unterrichtsgebiete und in der Praxis sichern wird, das muß die Zukunft lehren. Wie auf andern mathematischen Gebieten, so scheint es auch hier das Richtige zu sein, jede Methode an der Stelle anzuwenden, wo gerade sie am schnellsten und einfachsten zum Ziele führt. Es gab eine Zeit, wo die graphische Statik etwas überschätzt wurde. Uns sind hervorragende Lehrer des Maschinenbaues bekannt, die sie so zu sagen gar nicht anwenden. Eine Reihe von Errungenschaften der graphischen Statik ist zwar von hohem theoretischen, aber von geringerem praktischen Werte. Einen Vorzug besitzt sie: anschaulicher zu sein, als der abstrakte Funktionsbegriff oder die Integralformel. Wo es sich nicht um allzugroße Genauigkeit handelt, und wo Übung im Gebrauche des Polarplanimeters und sonstiger mechanischer Integratoren\*) vorhanden ist, scheint sie am ersten am Platze zu sein. Der Blick dafür, welche besondere Methode in den einzelnen Fällen am besten zu gebrauchen ist, schärft sich durch den praktischen Gebrauch. An eine vollständige Verdrängung der rechnenden Methoden ist nicht zu denken.

\*) Das sonst gebräuchliche Wort „Integrat“ ist als sprachliche Mißbildung zu vermeiden, da integer und  $\gamma\rho\acute{\alpha}\phi\omega$  in der Zusammensetzung etwas ganz anderes ergeben würden.