



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Abschnitt VIII. Schwerpunkte und statische Momente homogener Körper.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Abschnitt VIII.

Schwerpunkte und statische Momente homogener Körper.

294) Bei den Flächen zerfielen die Momente jeder Ordnung in zwei Gruppen, polare und axiale Momente. Bei den Körpern dagegen sind drei Gruppen zu unterscheiden, denn je nachdem die Abstände der Körperteilchen auf einen Punkt oder Pol, auf eine geradlinige Achse, auf eine Ebene bezogen werden, handelt es sich um polare, axiale und Plan-Momente.

Am Beispiele der Halbkugel mögen die entsprechenden Momente erster Ordnung erläutert werden.

Teilt man die Wölbung mittelst zweier Scharen von Meridianen und Parallelkreisen in kleine „Quadrate“ ein und verbindet man deren Eckpunkte mit dem Kugelmittelpunkte, so ist die Halbkugel in ein System von Pyramiden eingeteilt. Der Schwerpunkt jeder Pyramide hat von dem Mittelpunkte die Entfernung $\frac{3}{4}r$. Demnach ist $\frac{3}{4}r$ der mittlere Abstand aller Punkte der Halbkugel vom Kugelmittelpunkte, und $\frac{3}{4}r \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{r^4\pi}{2}$ ist das Polarmoment erster Ordnung in Bezug auf den Mittelpunkt.

Teilt man, wie es in Fig. 54 angedeutet ist, die Halbkugel in unendlich viele Meridiankeile ein, so liegen die Schwerpunkte derselben nach Nr. 50) auf einem Kreise vom Radius $\frac{3\pi}{16}r$. Demnach ist $\frac{3\pi}{16}r$ der mittlere Abstand der Halbkugelpunkte von dem als Achse gewählten Durchmesser, und $\frac{3\pi}{16}r \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{r^4\pi^2}{8}$ ist das Axialmoment erster Ordnung in Bezug auf diese Achse.

Der Schwerpunkt der Halbkugel liegt in der Entfernung $\frac{3}{8}r$ von der Grundfläche. Demnach ist $\frac{3}{8}r$ der mittlere Abstand der Halbkugelpunkte von der Grundfläche und $\frac{3}{8}r \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{r^4\pi}{4}$ ist das Planmoment erster Ordnung in Bezug auf jene Ebene.

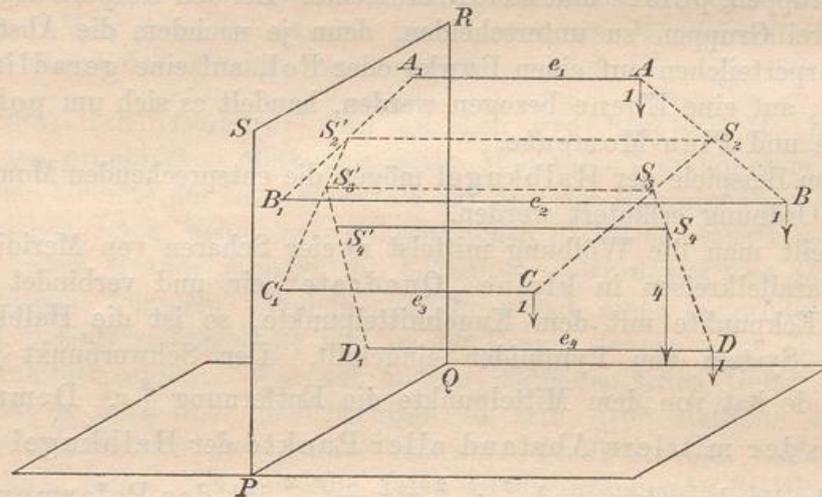
Ist eine Unterscheidung nötig, so kann das Polarmoment mit M_p , das Axialmoment mit M_a , das Planmoment, weil es auf eine Fläche bezogen ist, mit M_f bezeichnet werden.

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich nur mit den Momenten erster Ordnung, und zwar besonders mit den Planmomenten, die mit der Lehre vom Schwerpunkt zusammenhängen. Die Momente zweiter Ordnung kommen im nächsten Abschnitte zur Sprache.

295) Der Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte.

In der Mechanik wird der Schwerpunkt definiert als der Angriffspunkt eines Systems paralleler Kräfte, wobei die Richtung

Fig. 220.



dieser Kräfte gleichgültig ist. Angenommen wird, dass in den einzelnen Punkten gleichviel Masse angebracht sei, dass alle Punkte gleich schwer seien. Dann lässt sich beweisen, dass der Schwerpunkt der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene ist.

Beweis: Man denke sich die gegebenen Massenpunkte A, B, C, D durch die Lote e_1, e_2, e_3, e_4 mit der gegebenen Ebene $PQRS$ starr verbunden, die Ebene denke man sich senkrecht auf eine andere gestellt und die in jedem Punkte wirkende Schwerkraft als die Kraft-einheit angenommen.

Der Hebelarm jeder Kraft in Bezug auf die Achse PQ , um die sich die belastete Ebene mit den Punkten drehen will, wird gefunden, indem man von ihr aus auf jede Kraftlinie ein Lot fällt. Diese Lote erhalten die Längen der Abstände e_1, e_2, e_3, e_4 . Die statischen Momente werden $e_1 \cdot 1, e_2 \cdot 1, e_3 \cdot 1$ und $e_4 \cdot 1$. Denkt man sich

im Schwerpunkte S_4 , dem Angriffspunkte der Resultante, die Kraft 4 angebracht, und ist e_s die Entfernung des Schwerpunktes von der Ebene, so ist das statische Moment der Resultante gleich $e_s \cdot 4$. Dieses Moment muß gleich der Summe der Einzelmomente sein, also wird

$$4e_s = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

und daher

$$e_s = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{4}.$$

Ebenso wird für den Schwerpunkt von n Punkten gefunden

$$e_s = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n}{n}.$$

Der Schwerpunkt ist also der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene.

296) Bekanntlich kann er folgendermaßen gefunden werden:

Man halbiere AB , verbinde den Halbierungspunkt S_2 mit C und schneide von der Verbindungslinie den dritten Teil S_2S_3 ab. Man verbinde S_3 mit D und schneide auf S_3D den vierten Teil S_3S_4 ab, dann ist S_4 der Schwerpunkt der vier Massenpunkte u. s. w.

Beweis: Die Kräfte in A und B kann man ersetzen durch die in S_2 wirkende Resultante 2. Am Hebel S_2C wirkt in S_2 die Kraft 2, in C die Kraft 1, beide können ersetzt werden durch die in S_3 wirkende Resultante 3. Am Hebel S_3D wirkt in S_3 die Kraft 3, in D die Kraft 1, beide können ersetzt werden durch die in S_4 wirkende Resultante 4 u. s. w.

297) **Bemerkungen.** Diese Konstruktion ist erstens unabhängig von der Richtung der Parallelkräfte, der obige Satz gilt also von jeder beliebigen Ebene. Zweitens ist sie unabhängig von der Reihenfolge der Punkte. Man kann daraus geometrische Schlüsse ziehen.

Für drei Punkte folgt, daß die drei Mittellinien des Dreiecks einander in einem Punkte schneiden, der von jeder den dritten Teil abschneidet.

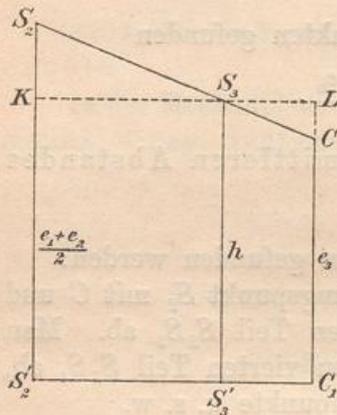
Für vier Punkte folgt, daß die vier Mittellinien des Tetraeders sich in einem Punkte schneiden, der von jeder den vierten Teil abschneidet.

Diese Art, geometrische Sätze mit Hilfe der Lehre vom Schwerpunkte zu finden, bezeichnet man als den barycentrischen Kalkül. Im Methodischen Lehrbuche, Band II, sind z. B. die Sätze von Ceva und Menelaos so bewiesen worden. Die Formel für e_s wird dort in der Koordinatenlehre abgeleitet. Die Guldinschen Regeln, die Sätze über abgeschrägte Prismen und über die Schwerpunkte von Drehungskörpern bzw. ihrer Sektoren, gehören hierher.

298) Dafs der so gefundene Schwerpunkt der Punkt mittleren Abstandes ist, läfst sich auch rein geometrisch beweisen.

Geometrischer Beweis. In Fig. 1 ist das Lot $S_2'S_2 = \frac{e_1 + e_2}{2}$ als mittlere Höhe des Trapezes A_1ABB_1 . Das dortige Trapez $C_1CS_2S_2'$ ist in Fig. 2 besonders gezeichnet und durch S_3 die Parallele KL zur Grundlinie gelegt. Wegen des Teilungsverhältnisses 1 : 2 der Linie S_2C ist

Fig. 221.



$$S_2K = 2LC,$$

d. h.

$$\frac{e_1 + e_2}{2} - h = h - e_3$$

oder

$$e_1 + e_2 - 2h = 2h - e_3,$$

also

$$h = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{3}.$$

Ebenso ist das nächstfolgende Trapez zu behandeln, in dem $S_3K = 3 \cdot LD$ wird u. s. w.

299) Die rein geometrische Definition des Schwerpunktes ist also folgende: Der Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte ist der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene.

Mit Hülfe dreier nicht paralleler Ebenen, z. B. der drei Koordinatenebenen, kann er bestimmt werden.

Sind die Raumkoordinaten der n Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; \dots x_n, y_n, z_n$, so sind die Schwerpunktskoordinaten

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}, \quad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n}{n},$$

$$z_s = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n}{n}.$$

Sind in den einzelnen Punkten die Massen $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$ angebracht, so sind die Schwerpunktskoordinaten, wie sich ganz ebenso zeigen läßt,

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{M_x}{m},$$

$$y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{M_y}{m},$$

$$z_s = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{M_z}{m}.$$

wo M_x , M_y , M_z die Planmomente des Systems für die Ebenen YZ , ZX und XY sind und m die Gesamtmasse bedeutet.

300) Die gefundenen Formeln sind allerdings nur für eine endliche Anzahl von Massenpunkten abgeleitet worden; da aber die Zahl derselben beliebig groß angenommen werden darf, läßt man die Beweise auch für unendlich viele Punkte gelten. Jede Linie, jede Fläche und jeder Körper kann als aus unendlich vielen „Punkten“ bestehend angenommen werden, und so bleibt der Schwerpunkt auch für solche Gebilde der Punkt mittleren Abstandes in Bezug auf jede beliebige Ebene, nur muß die Anordnung der Punkte als eine homogene angenommen werden. Dies entspricht der in der Mechanik gebräuchlichen Annahme, daß der Körper überall gleich dicht sei, daß er überall dasselbe spezifische Gewicht habe.

301) **Allgemeine Sätze.** Besitzt ein Körper eine Symmetrieebene, so geht diese durch den Schwerpunkt; besitzt er zwei Symmetrieebenen, so geht ihre Schnittlinie durch den Schwerpunkt; besitzt er drei Symmetrieebenen, die nicht durch dieselbe Gerade gelegt sind, so schneiden sich die drei Schnittlinien im Schwerpunkte. Sind mehr als drei Symmetrieebenen vorhanden, so gehen sämtliche Schnittlinien derselben durch den Schwerpunkt. Der Schwerpunkt regelmäßiger Körper fällt daher mit dem Mittelpunkte zusammen.

Stimmen die Querschnitte zweier Körper im Sinne des Cavalierischen Prinzips überein, so liegen ihre Schwerpunkte in derselben Höhe. An Stelle der Gleichheit der zusammengehörigen Querschnitte kann auch ein konstantes Verhältnis der Flächeninhalte treten. Der Beweis für den ersten Fall liegt darin, daß je zwei zusammengehörige Querschnitte in Bezug auf die Grundfläche gleiche statische Momente haben. Demnach stimmen auch die Momentsummen überein. Bei beiden Körpern wird

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{\text{statisches Moment}}{\text{Inhalt}}.$$

Entsprechendes geschieht im zweiten Falle.

Die oben gegebenen Formeln bleiben auch dann richtig, wenn die Ebene, auf welche die Abstände bezogen sind, den Körper schneidet. Dabei sind die auf der einen Seite befindlichen Abstände als positiv; die andern als negativ einzurechnen. Geht die Ebene durch den Schwerpunkt des Körpers, so ist der mittlere Abstand gleich Null.

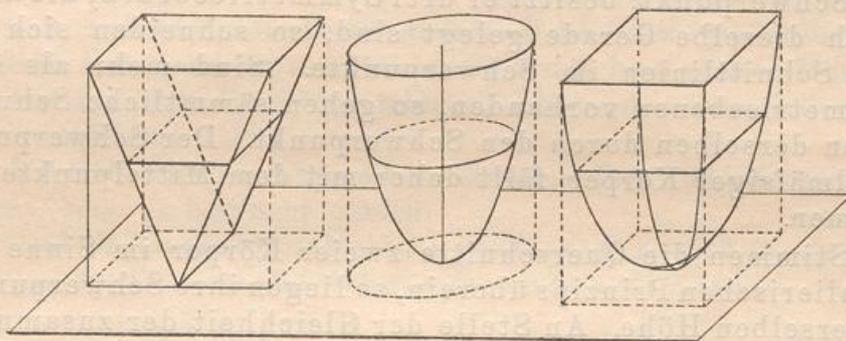
Für zahlreiche Körper ergibt sich die Schwerpunktslage durch einfache Betrachtungen, die hier unterbleiben können; für viele andere ist sie in den früheren Kapiteln bestimmt worden. Hier soll eine Zusammenstellung des Wichtigsten gegeben werden.

302) Körper von der Ordnung Null. Bei senkrechten und schrägen Prismen und Cylindern liegt der Schwerpunkt im Halbierungspunkte der Mittellinie, d. h. der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden parallelen Grundflächen.

Solche Körper werden als solche von der Ordnung Null bezeichnet, weil der Querschnitt von der Form $q_y = a = ay^0$ ist. Alle früher behandelten ebenen Flächen, deren Schwerpunkte bestimmt worden sind, geben zu entsprechenden Übungsbeispielen Anlaß.

303) Körper erster Ordnung, deren Querschnitt von der Form $q_y = by^1$ ist, sind z. B. der Dreieckskörper, das Drehungsparaboloid, das elliptische Paraboloid, parabolisch begrenzte

Fig. 222.



Körper, deren Querschnitte ähnliche Vielecke sind, z. B. Quadrate, regelmäßige Sechsecke und dergl. Die letzteren Körper können bei umgekehrter Aufstellung als parabolische Gewölbe aufgefalist werden.

Weil bei dem ersten dieser Körper der Schwerpunkt in der Höhe $\frac{2}{3}h$ liegt, liegt er bei sämtlichen in dieser Höhe. Dies gilt auch dann, wenn, wie in Fig. 223, die Schwerpunkte der Querschnitte auf schiefer Achse angeordnet sind.

304) Stumpfe der Körper erster Ordnung. Diese Stumpfe sind in Fig. 3 mit angedeutet worden. Der Schwerpunkt des ersten läßt sich mit Hilfe der Trapezformel berechnen. Ist G_1 die kleinere,

G_2 die grössere Grundfläche und ist h die Höhe des Stumpfes, so folgt nach Nr. 4 als Schwerpunktshöhe

$$h_s = \frac{h(G_1 + 2G_2)}{s(G_1 + G_2)}.$$

Dies gilt nach Cavalieri überhaupt von den Körpern dieser Art.

305) Eine zweite Berechnungsmethode ergibt sich nach Nr. 164 folgendermassen:

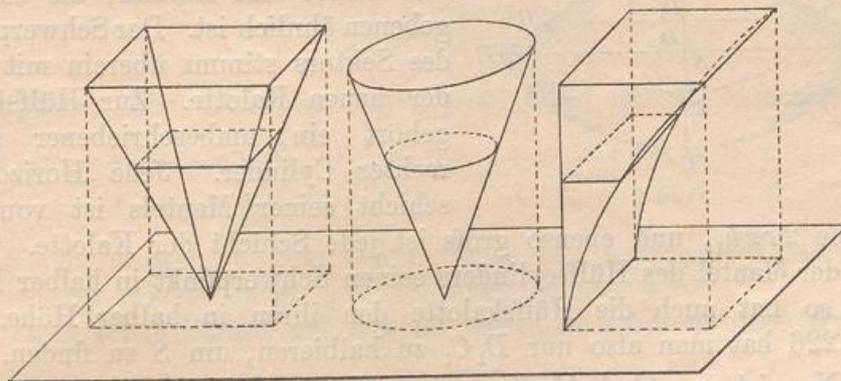
Ist, von der gemeinschaftlichen Grundebene der Fig. 222 aus gerechnet, h_1 die kleinere, h_2 die grössere Höhe, so ist bei Querschnittsformel $q_y = by$ die Schwerpunktshöhe

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{\frac{bh_2^3}{3} - \frac{bh_1^3}{3}}{\frac{bh_2^2}{2} - \frac{bh_1^2}{2}} = \frac{h_2^3 - h_1^3}{h_2^2 - h_1^2},$$

was noch mit $h_2 - h_1$ gekürzt werden könnte.

306) Körper zweiter Ordnung, deren Querschnitt von der Form $q_y = cy^2$ ist, sind z. B. die Pyramiden und die Kegel

Fig. 224.



von beliebiger Grundfläche, ausserdem der in Fig. 224 dargestellte parabolische Cylinder. Bei sämtlichen liegt der Schwerpunkt in der Höhe $\frac{3}{4}h$. Dies folgt nach Nr. 164 aus der Formel

Fig. 223.

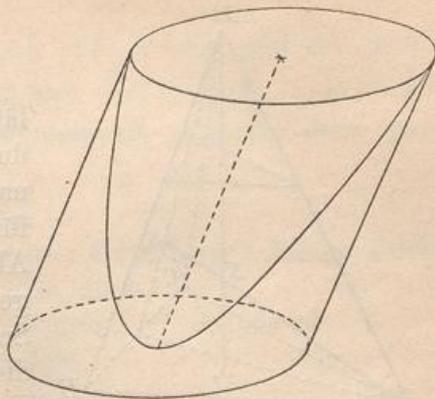
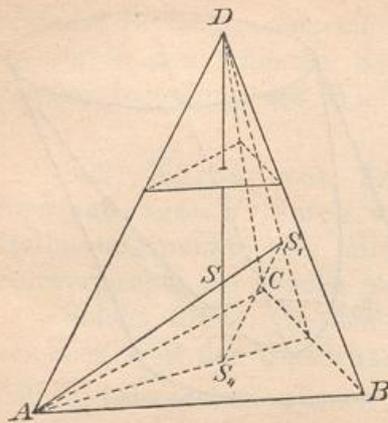


Fig. 225.



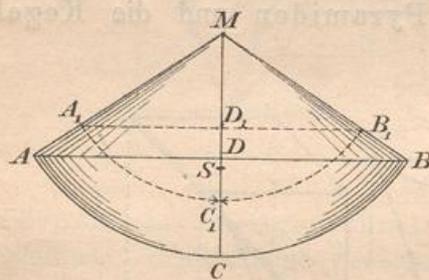
$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{ch^4}{\frac{4}{3}ch} = \frac{3}{4}h,$$

läßt sich aber auch für die Pyramide durch eine geometrische Betrachtung nachweisen und gilt dann nach Cavalieri für die sämtlichen Körper dieser Gruppe. Alle Schichten der in Fig. 225 dargestellten Pyramide haben nämlich die Schwerpunkte in der Mittellinie DS_4 , in dieser muß also der Schwerpunkt liegen. Dasselbe gilt von der Mittellinie AS_1 . Die Dreiecke ASD und S_1SS_4 sind ähnlich und ihr Maßstabverhältnis ist $3:1$, folglich ist $S_4S = \frac{1}{3}SD$, folglich $S_4S = \frac{1}{4}S_4D$ und daher bei dieser Aufstellung $h_s = \frac{1}{4}h$.

An Stelle der in Figur 224 dargestellten Körper können auch solche mit schiefen Mittellinien (bezw. schiefen Seitenflächen) treten.

307) Anwendung auf den Kugelsektor. Wie bei der Rechnungsmethode der Kalotte denke man sich den Sektor in lauter Pyramiden zerlegt, die ihre unendlich kleine Basis in der Kalotte haben, deren Spitze aber in M liegt.

Fig. 226.



Alle diese Pyramiden haben ihre Schwerpunkte in der Entfernung $\frac{3}{4}r$ von M . Die Schwerpunkte bilden also selbst eine Kalotte, die der gegebenen ähnlich ist. Der Schwerpunkt des Sektors stimmt überein mit dem der neuen Kalotte. Zur Hilfskugel gehört ein unbeschriebener senkrechter Cylinder. Jede Horizontalschicht seiner Mantels ist von der

Fläche $2r\pi h_1$, und ebenso groß ist jede Schicht der Kalotte. Weil nun der Mantel des Hülfszylinders seinen Schwerpunkt in halber Höhe hat, so hat auch die Hülfskalotte den ihren in halber Höhe. In Fig. 226 hat man also nur D_1C_1 zu halbieren, um S zu finden.

Nun ist aus Ähnlichkeitsgründen $MD_1 = \frac{3}{4}MD = \frac{3}{4}(r-h)$, wo h die Pfeilhöhe der Kalotte ist, also $D_1C_1 = \frac{3}{4}r - \frac{3}{4}(r-h) = \frac{3}{4}h$, folglich

$$D_1S = \frac{1}{2}D_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{8}h,$$

folglich

$$MS = \frac{3}{4}(r-h) + \frac{3}{8}h = \frac{3}{8}[2r-2h+h] = \frac{3}{8}(2r-h).$$

Anwendung auf die Halbkugel. Für $h=r$ geht der Sektor in die Halbkugel über, für diese folgt also $MS = \frac{3}{8}(2r-r) = \frac{3}{8}r$. Die Wiederholung der vorigen Berechnungsart fällt für diese ganz einfach aus.

308) Stumpfe der Körper zweiter Ordnung. Einige solche sind in Fig. 224 angedeutet. Kann man die Berechnung für den Kegelstumpf durchführen, so ist sie für alle andern Formen erledigt.

In Fig. 227 seien die Radien r und ρ , die Stumpfhöhe h . Der ergänzte Kegel hat die Höhe $y = \frac{hr}{r-\rho}$, wie eine einfache Betrachtung ergibt, also liegt der Schwerpunkt S_2 des Ergänzungskegels in der Höhe

$$h + \frac{y-h}{4} = \frac{3h+y}{4},$$

der des ganzen Kegels in der Höhe $\frac{y}{4}$. Nach dem Satze von den statischen Momenten ist

$AS_1 \cdot \text{Stumpf} + AS_2 \cdot \text{Ergänzungskegel} = SA \cdot \text{ganzer Kegel}$, oder

$$h_s \left[\frac{\pi h}{3} (r^2 + r\rho + \rho^2) \right] + \frac{3h+y}{4} y \left(\rho^2 \pi \frac{y-h}{3} \right) = \frac{y}{4} \left(r^2 \pi \frac{y}{3} \right).$$

Setzt man $\frac{hr}{r-\rho}$ für y ein, so ergibt sich schliesslich

$$h_s = \frac{h r^2 + 2 r \rho + 3 \rho^2}{4 r^2 + r \rho + \rho^2}.$$

Multipliziert man oben und unten jedes Glied mit π , so erhält man

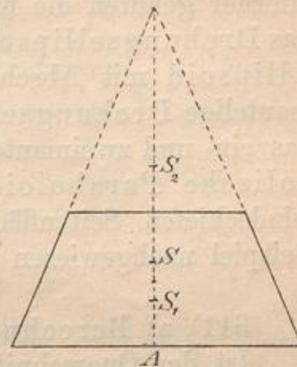
$$h_s = \frac{h r^2 \pi + 2 \sqrt{r^2 \pi \rho^2 \pi} + 3 \rho^2 \pi}{4 r^2 \pi + \sqrt{r^2 \pi \rho^2 \pi} + \rho^2 \pi} = \frac{h G_1 + 2 \sqrt{G_1 G_2} + 3 G_2}{4 G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2},$$

wo G_1 die untere, G_2 die obere Fläche ist, wobei gleichgültig ist, welche von beiden als die grössere angenommen wird.

Diese letzte Formel gilt nun für sämtliche Stumpfe dieser Gruppe.

309) Nach Nr. 164 läst sich für die Querschnittsformel $q_y = cy^2$ im Anschluß an die Figur 224, auf deren Grundfläche die Abstände h_1 und h_2 zu beziehen sind, die Schwerpunktshöhe folgendermassen berechnen:

Fig. 227.



$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{\frac{ch_2^4}{4} - \frac{ch_1^4}{4}}{\frac{ch_2^3}{3} - \frac{ch_1^3}{3}} = \frac{3}{4} \frac{h_2^4 - h_1^4}{h_2^3 - h_1^3},$$

was noch durch $h_2 - h_1$ gekürzt werden könnte, wodurch jedoch die Formel an Einfachheit verliert.

Dafs sich auch die Simpsonsche Regel anwenden läfst, ergibt aus den nachstehenden allgemeinen Betrachtungen.

310) Körper gemischter Ordnung bis zum zweiten Grade. Hierher gehören die Kugel, der Kugelabschnitt und die Kugelschicht, das Drehungsellipsoid mit Abschnitt und Schicht, das dreiachsige Ellipsoid mit Abschnitt und Schicht, das einmantelige und zweimantelige Drehungsellipsoid (letzteres auch mit seinen Schichten), das ein- und zweimantelige dreiachsige Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid, sämtliche Prismatoide mit ebenen oder windschiefen Seitenflächen. Dafs dies der Fall ist, soll für jedes Beispiel nachgewiesen werden.

311) a) Berechnung mit Hülfe der Schichtenformel.

Ist der Querschnitt von der Form

$$q_y = a + by + cy^2,$$

so liegt nach Nr. 178 der Schwerpunkt in der Höhe

$$y_s = \frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4}}{\frac{ay^2}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3}}.$$

Hier könnte noch durch y gekürzt werden, jedoch verliert die Formel dadurch an Übersichtlichkeit.

312) b) Berechnung mit Hülfe der Simpsonschen Regel.

Ist der Querschnitt von der Form

$$q_y = a + by + cy^2,$$

so ist sein statisches Moment in Bezug auf die Grundfläche

$$m_y = ay + by^2 + cy^3.$$

Da nun der dritte Grad nicht überstiegen ist, kann sowohl der Inhalt, als auch das statische Moment nach der Simpsonschen Regel berechnet werden.

Der Inhalt wird

$$J = \frac{h}{6} (U + O + 4M),$$

wo U den Unterschnitt, O den Oberschnitt, M den Mittelschnitt bedeutet. Das statische Moment wird

$$M_1 = \frac{h}{6} (U' + O' + 4M'),$$

wo U' das statische Moment des Unterschnittes, O' das des Oberschnittes, M' das des Mittelschnittes in bezug auf die Grundfläche bedeutet.

Demnach wird die Schwerpunktshöhe

$$h_s = \frac{M_1}{J} = \frac{U' + O' + 4M'}{U + O + 4M}.$$

Nun ist aber $U' = U \cdot 0 = 0$, $O' = O \cdot h$, $M' = M \cdot \frac{h}{2}$, also wird der Zähler gleich $Oh + 4M \frac{h}{2} = h(O + 2M)$. Demnach folgt

$$h_s = h \frac{O + 2M}{U + O + 4M}.$$

Im allgemeinen ist die Summenformel vorzuziehen, weil man bei ihr den Mittelschnitt nicht besonders zu berechnen braucht. In vielen Fällen aber wird die Simpsonsche Regel dadurch besonders einfach, daß einzelnes ganz wegfällt.

313) Beispiel des Kugelabschnitts.

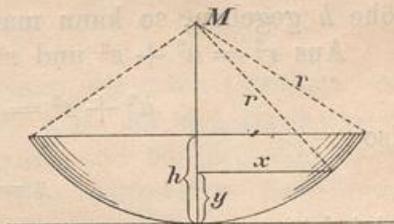
Aus $x^2 = r^2 - (r - y)^2 = 2ry - y^2$ folgt als Querschnittsfläche

$$q_y = x^2 \pi = 2r\pi y - \pi y^2.$$

Hat also das Kugelsegment die Höhe h , so folgt als Schwerpunktshöhe

$$y_s = \frac{M}{J} = \frac{2r\pi \frac{h^3}{3} - \pi \frac{h^4}{4}}{2r\pi \frac{h^2}{2} - \pi \frac{h^3}{3}} = \frac{h}{4} \cdot \frac{8r - 3h}{3r - h}.$$

Fig. 228.



(Für $h = r$ ergibt sich $\frac{5}{8}r$ als Schwerpunktshöhe der Halbkugel.) Die Simpsonsche Regel ist hier unbequemer, als die Summenformel. Man wende sie trotzdem zur Übung an.

314) Beispiel der Kugelschicht.

a) Sind h_2 , h_1 und r gegeben, so ist nach dem Vorigen in Bezug auf die Grundfläche

$$J_2 - J_1 = \left(2r\pi \frac{h_2^2}{2} - \pi \frac{h_2^3}{3}\right) - \left(2r\pi \frac{h_1^2}{2} - \pi \frac{h_1^3}{3}\right),$$

$$M_2 - M_1 = \left(2r\pi \frac{h_2^3}{3} - \pi \frac{h_2^4}{4}\right) - \left(2r\pi \frac{h_1^3}{3} - \pi \frac{h_1^4}{4}\right),$$

folglich

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{M_2 - M_1}{J_2 - J_1} = \frac{\frac{2r\pi}{3}(h_2^3 - h_1^3) - \frac{\pi}{4}(h_2^4 - h_1^4)}{\frac{2r\pi}{2}(h_2^2 - h_1^2) - \frac{\pi}{3}(h_2^3 - h_1^3)} \\ &= \frac{8r(h_2^3 - h_1^3) - 3(h_2^4 - h_1^4)}{12r(h_2^2 - h_1^2) - 4(h_2^3 - h_1^3)}. \end{aligned}$$

Hier könnte noch mittels $(h_2 - h_1)$ gekürzt werden, was aber die Formel nicht vereinfachen würde.

Fig. 229.

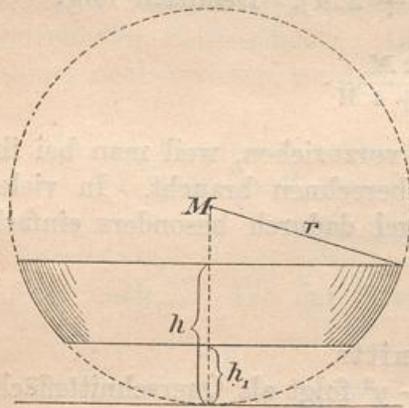
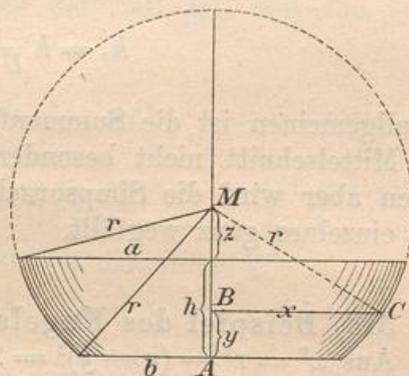


Fig. 230.



b) Sind jedoch die meßbaren Radien a und b und die Schichthöhe h gegeben, so kann man folgendermaßen verfahren.

Aus $r^2 = a^2 + z^2$ und $r^2 = b^2 + (h + z)^2$ folgt

$$a^2 + z^2 = b^2 + h^2 + 2hz + z^2,$$

also

$$z = \frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}.$$

Jetzt ist

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2 - MB^2 = a^2 + z^2 - (z + h - y)^2 \\ &= (a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z + h)y - y^2, *) \end{aligned}$$

also

$$q_y = x^2\pi = \pi[(a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z + h)y - y^2],$$

*) Dies ist die Gleichung des Kreises in Bezug auf A als Nullpunkt des Koordinatensystems.

folglich

$$J_0^h = \pi \left[(a^2 - h^2 - 2h) \frac{h}{1} + 2(z+h) \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right] = \pi h \left[a^2 - zh - \frac{h^2}{3} \right].$$

Setzt man hier den Wert von z ein, so erhält man

$$J = \frac{\pi h}{6} [3a^2 + 3b^2 + h^2].$$

Dagegen wird

$$M_0^h = \pi \left[(a^2 - h^2 - 2h) \frac{h^2}{2} + 2(z+h) \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \right] = \frac{\pi h^2}{12} [6a^2 - 4hz - h^2].$$

Einsetzung des Wertes von z giebt

$$M = \frac{\pi h^2}{12} [4a^2 + 2b^2 + h^2].$$

Endlich folgt

$$y_s = \frac{M}{J} = \frac{h}{2} \cdot \frac{4a^2 + 2b^2 + h^2}{3a^2 + 3b^2 + h^2}.$$

Setzt man $b = 0$, so erhält man eine neue Formel für das Segment, nämlich

$$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{4a^2 + h^2}{3a^2 + h^2},$$

die der früheren vorzuziehen ist, weil sie nur meßbare Stücke enthält. Setzt man oben $a = 0$, so folgt

$$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}$$

als Schwerpunktsabstand des Segments von seiner Grundfläche. Die vorangehende Formel gab den vom Scheitelpunkte aus gemessenen Abstand.

315) Damit sind zugleich die Schichten der nach Cavalieri aus der Kugel abzuleitenden Körper erledigt, z. B. der des Drehungsellipsoids, des dreiachsigen Ellipsoids und der aus der Halbkugel abzuleitenden Gewölbe. Bei den Ellipsoiden kann man selbstverständlich auch von der Ellipsengleichung ausgehen, ähnlich wie es nachstehend für das Hyperboloid geschehen soll.

316) Beispiel des einmanteligen Drehungshyperboloids.

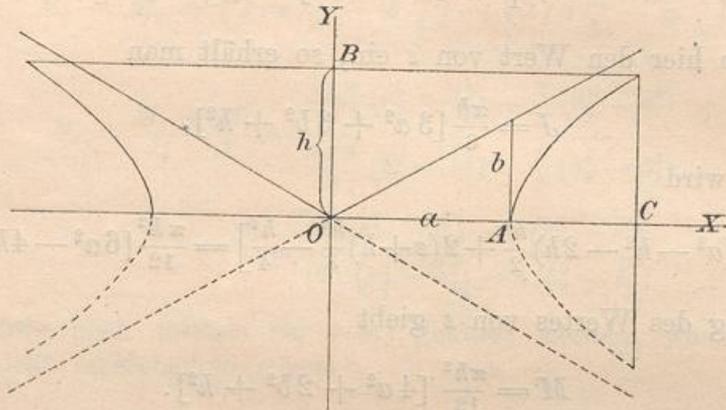
a) Berechnung mit Hülfe der Schichtenformel.

Die Gleichung der Hyperbel sei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Durch Drehung um die Y -Achse entsteht ein einmanteliges Drehungshyperboloid.

Fig. 231.



Aus der Gleichung folgt

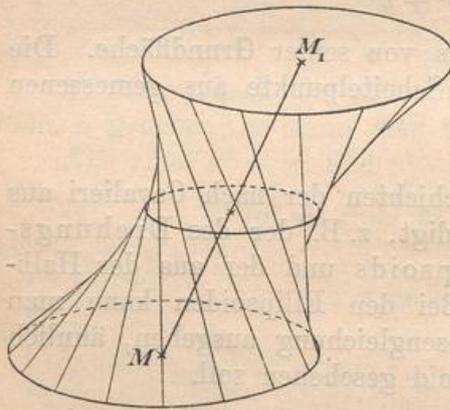
$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2,$$

so daß der Querschnitt des Körpers in der Höhe y wird

$$q_y = x^2 \pi = a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{b^2} y^2.$$

Die Schwerpunkthöhe wird also nach Nr. 174 für den von 0 bis h reichenden Körper

Fig. 232.



$$\begin{aligned} y_s &= \frac{a^2 \pi \frac{h^2}{2} + \frac{a^2 \pi}{b^2} \frac{h^4}{4}}{a^2 \pi \frac{h}{1} + \frac{a^2 \pi}{b^2} \frac{h^3}{3}} \\ &= \frac{3h}{4} \cdot \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}, \end{aligned}$$

was nur von h und b_1 , nicht aber von a abhängig ist.

Ist z. B. $b = 1$ und $h = 2$, so folgt $y_s = \frac{9}{7}$.

Alle nach Cavalieri daraus abzuleitenden Körper, auch die durch Affinität (schräges Koordinatensystem) damit zusammenhängenden,

werden ebenso behandelt, z. B. der in Fig. 232 dargestellte.

b) Berechnung mit Hülfe der Simpsonschen Regel.

Aus der Gleichung

$$q_y = a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{b^2} y^2$$

folgt als Oberschnitt

$$O = a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{b^2} h^2,$$

als Mittelschnitt

$$M = a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{b^2} \left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

während der Unterschnitt $U = a^2 \pi$ ist.

Dies ist nach Nr. 312 in die Formel

$$h_s = h \frac{O + 2M}{U + O + 4M}$$

einzusetzen und giebt

$$h_s = h \frac{\left(a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{b^2} h^2\right) + 2 \left(a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{b^2} \frac{h^2}{4}\right)}{a^2 \pi + \left(a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{b^2} h^2\right) + 4 \left(a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{b^2} \frac{h^2}{4}\right)} = \frac{3h}{4} \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2},$$

was mit dem obigen Resultate übereinstimmt. Die Schichtenformel war offenbar vorzuziehen.

317) Das zweimantelige Hyperboloid. Die Gleichung der Hyperbel sei zunächst dieselbe wie vorher, nur geschehe die Drehung um die X-Achse. Um die Schichtenformel anzuwenden, verlege man den Koordinatenanfang nach A , so daß man statt x zu schreiben hat $(x + a)$, während y unverändert bleibt. Die Gleichung geht dadurch über in

$$\frac{(x + a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder in

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

so daß der senkrechte Querschnitt des Drehungskörpers in der Entfernung x von A wird

$$q_x = y^2 \pi = \frac{2b^2 \pi}{a} x + \frac{b^2 \pi}{a^2} x^2.$$

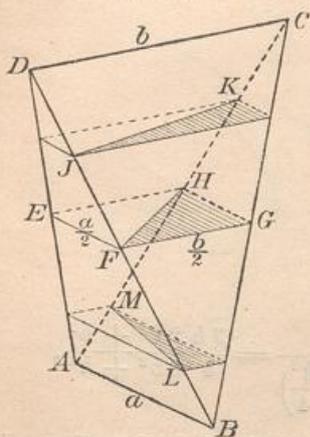
Für den von A bis x_1 (bei C) reichenden Körper wird der von A aus gerechnete Schwerpunktsabstand

$$x_s = \frac{\frac{2b^2 \pi}{a} \frac{x_1^3}{3} + \frac{b^2 \pi}{a^2} \frac{x_1^4}{4}}{\frac{2b^2 \pi}{a} \frac{x_1^2}{2} + \frac{b^2 \pi}{a^2} \frac{x_1^3}{3}} = \frac{x_1}{4} \cdot \frac{8a + 3x_1}{3a + x_1}.$$

Ist z. B. $AC = x_1 = 1$ und $a = 1$, so folgt $x_s = \frac{1}{4} \cdot \frac{8+3}{3+1} = \frac{11}{16}$. Der für x_s gefundene Ausdruck ist von b unabhängig. — Aus beiden

Arten von Hyperboloiden lassen sich auch Gestalten ableiten, deren Querschnitte ähnliche Polygone sind, z. B. hyperbolische Gewölbe.

Fig. 233.



318) Prismatoid. Im Method. Lehrbuch, Bd. II, Stereometrie 37 bis 39, sind die allgemeinsten Prismatoide mit ebenen und windschiefen Seitenflächen behandelt, und zwar mit Hilfe des sog. Halbtetraeders.

Führt man in Fig. 233 einen Horizontalchnitt in der Höhe y , so entsteht ein Parallelogramm, dessen Winkel durch den Kreuzungswinkel der beiden Horizontalen a und b bestimmt werden. Die Parallelogrammseiten b_1 und a_1 ergeben sich aus ähnlichen Dreiecken mit Hilfe der Proportionen $y : h = b_1 : b$ und $(h - y) : h = a_1 : a$ als $b_1 = y \frac{b}{h}$ und

$a_1 = a - \frac{a}{h} y$, so daß die Schnittfläche wird

$$q_y = a_1 b_1 \sin \gamma = \left(a - \frac{a}{h} y \right) \frac{b}{h} y \sin \gamma = \frac{ab \sin \gamma}{h} y - \frac{ab \sin \gamma}{h^2} y^2.$$

Die schraffierte Fläche des Halbtetraeders wird halb so groß, sein Inhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe y_1 wird

$$J = \frac{ab \sin \gamma}{2h} \left[\frac{y_1^2}{2} - \frac{1}{h} \frac{y_1^3}{3} \right],$$

das statische Moment des bis dahin reichenden Körpers in Bezug auf die Grundfläche wird

$$M = \frac{ab \sin \gamma}{2h} \left[\frac{y_1^3}{3} - \frac{1}{h} \frac{y_1^4}{4} \right],$$

die entsprechende Schwerpunktshöhe also

$$y_s = \frac{\frac{y_1^3}{3} - \frac{y_1^4}{4h}}{\frac{y_1^2}{2} - \frac{y_1^3}{3h}} = \frac{y_1}{2} \frac{4h - 3y_1}{3h - 2y_1}.$$

Ebenso konnte die Simpsonsche Regel angewandt werden, da q_y den zweiten Grad nicht überschreitet. Setzt man $y_1 = h$, so erhält man $y_s = \frac{h}{2}$.

319) Die windschiefe Fläche des Halbtetraeders ist ein hyperbolisches Paraboloid, über welches man Method. Lehrbuch, Band III,

Kegelschnittflächen Nr. 42 vergleiche. In Fig. 234 hat man nur BD zu ziehen, um den Raum des Halbtetraeders zu begrenzen.

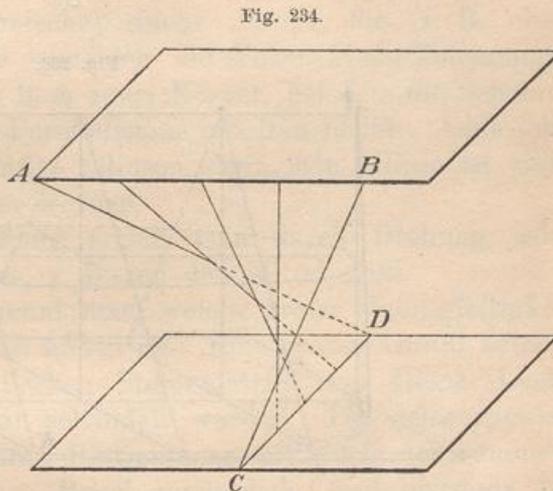
Der ganze Raum wird

$$J = \frac{ab \sin \gamma}{2h} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3h} \right]$$

$$= \frac{ab \sin \gamma h}{12}.$$

Sein Schwerpunkt liegt in halber Höhe. Die Schicht von beliebiger Höhe y_1 bestimmt sich nach den obigen Formeln.

Damit sind sämtliche Flächen zweiten Grades im wesentlichen erledigt.

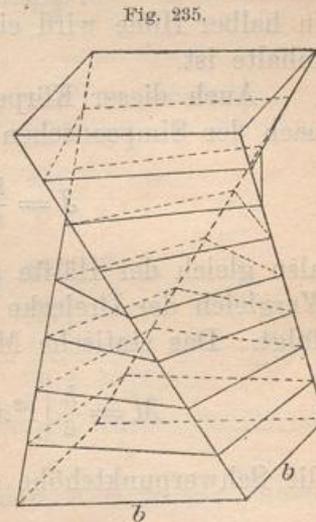


320) Fig. 235 stellt ein besonderes Prisma mit windschiefen Seitenflächen dar. Im Method. Lehrbuche II, Stereometrie 40, ist es behandelt worden. Man braucht nur einen Eckpunkt der Grundfläche mit dem drüber liegenden der oberen Fläche zu verbinden, um zu erkennen, dass aus dem prismatischen Körper vier Halbtetraeder ausgeschnitten worden sind. Ganz Entsprechendes geschieht bei dem Prisma mit zwei verschiedenen, ganz beliebig gestalteten Grundflächen. Aus dem Prisma mit ebenen Seitenflächen sind Halbtetraeder in beliebiger Zahl ausgeschnitten.

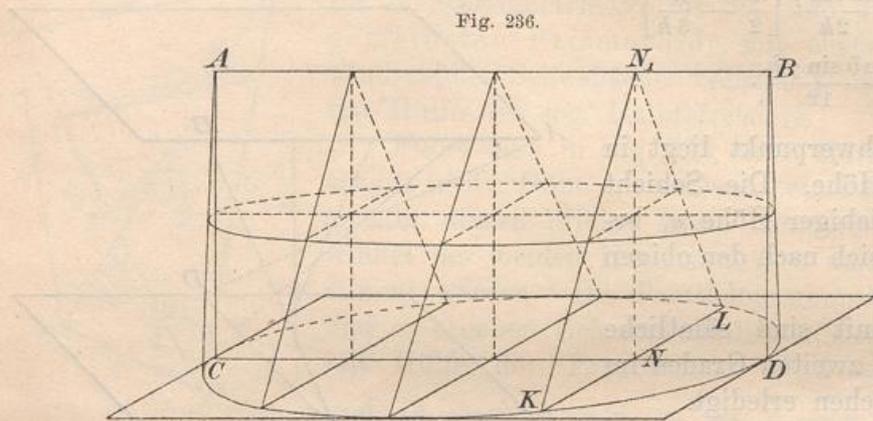
Daraus folgt, dass die Querschnittsformel der Prismatoide den zweiten Grad nicht übersteigt, dass also Inhalt und statisches Moment mit Hilfe der Simpsonschen Regel und ebenso mit Hilfe der Summenformel bestimmt werden können.

Die einmanteligen Hyperboloide sind als Prismatoide zu betrachten, deren Grundflächen regelmäßige Polygone mit unendlich vielen Seiten oder entsprechende elliptische Polygone sind.

321) Zu den Prismatoiden gehören noch Formen, die man sich in beliebiger Zahl darstellen kann.



Ein Beispiel sei hier angegeben. Fig. 236 stellt einen Körper dar, dessen untere Grundfläche ein Kreis ist, während die obere Grundfläche durch eine Gerade AB dargestellt wird, deren Projektion der



Kreisdurchmesser CD ist. Die senkrecht zu CD stehenden Sehnen, z. B. KL , sind mit der oberen Projektion (z. B. N_1) ihres Halbierungspunktes N verbunden, so daß Dreiecke wie KLN_1 entstehen. Die Schenkel dieser Dreiecke bilden eine krumme Fläche. Der Querschnitt in halber Höhe wird eine Ellipse, deren Inhalt die Hälfte vom Kreisinhalt ist.

Auch dieser Körper ist als Prismatoid zu betrachten, kann also nach der Simpsonschen Regel berechnet werden. Sein Inhalt ist

$$J = \frac{h}{6} \left(r^2 \pi + 0 + 4 \frac{r^2 \pi}{2} \right) = \frac{r^2 \pi h}{2},$$

also gleich der Hälfte des zugehörigen Cylinders, wie auch aus dem Vergleich der Dreiecke mit den zugehörigen Rechtecken des Cylinders folgt. Das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche ist

$$M = \frac{h}{6} \left[r^2 \pi \cdot 0 + 0 \cdot h + 4 \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{h}{2} \right] = \frac{h^2}{3} r^2 \pi,$$

die Schwerpunkthöhe also

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{2}{3} h,$$

wie auch sofort aus den Schwerpunkten der Dreiecksschnitte geschlossen werden kann.

Jeder Horizontalschnitt des Körpers ist eine Ellipse, die Ellipsen gehen nach oben hin aus der Kreisgestalt allmählich in die der Geraden über. Der Körper kann, wie der Kegel, nach oben hin fortgesetzt werden, ebenso nach unten.

322) Durch Horizontalverschiebung der Querschnitte erhält man den in Affinitätsbeziehung zum vorigen stehenden Schrägkörper.

Eine andere Transformation erhält man, wenn man statt der parallelen Schnittebenen (Dreiecke) solche nimmt, die (z. B. oberhalb AB) sich in einer Kante schneiden, die senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Dadurch erhält man einen Körper, bei dem die Schneide $AB < CD$ ist, während der Parallelismus erhalten bleibt. Auch jetzt sind sämtliche Horizontalschnitte Ellipsen, denn jede Ellipse ist einer Centralprojektion unterworfen worden.

Eine weitere Umgestaltung erzielt man durch Drehung jedes Querschnittes in seiner Ebene, z. B. um den Mittelpunkt.

An diesem Beispiele erkennt man, welche große Mannigfaltigkeit im Gebiete der Prismatoide zu finden ist. Eine große Anzahl solcher Körper sind in der „Genetischen Stereometrie“ von Heinze-Lucke (Leipzig, bei Teubner, 1886) behandelt worden. Die Schwerpunkte sämtlicher sind der elementaren Bestimmung mit Hilfe der Summenformel und der Simpsonschen Regel zugänglich, weil nirgends der 2. bzw. 3. Grad überstiegen wird.

323) Körper vom Querschnitt

$$q_y = a + by + cy^2 + \dots + ky^p.$$

Nach Nr. 172 wird

$$J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \dots + \frac{kh^{p+1}}{p+1},$$

$$M = \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \dots + \frac{kh^{p+2}}{p+2},$$

folglich

$$h_s = \frac{\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \dots + \frac{kh^{p+2}}{p+2}}{\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \dots + \frac{kh^{p+1}}{p+1}}.$$

Hier könnte noch durch h gekürzt werden, jedoch würde die Formel dadurch an Einfachheit verlieren.

Einige Beispiele sind früher gegeben worden, z. B. in der Tabelle über Parabeln höherer Ordnung.

324) Eine umfangreiche Gruppe von Drehungskörpern. Eine Kurve habe die Gleichung

$$x = a + by + cy^2 + \dots + ky^p.$$

Durch Drehung um die Y -Achse entsteht ein Drehungskörper, dessen Querschnittsformel $q_y = x^2\pi$ auf die Form

$$q_y = a_1 + b_1 y + c_1 y^2 + \dots + r_1 y^{2p}$$

gebracht werden kann, so daß die Schwerpunkthöhe des Körpers wird

$$h_s = \frac{M_u}{J} = \frac{\frac{a_1 h^2}{2} + \frac{b_1 h^3}{3} + \frac{c_1 h^4}{4} + \dots}{\frac{a_1 h}{1} + \frac{b_1 h^2}{2} + \frac{c_1 h^3}{3} + \dots}$$

Nach Nr. 116 ist aber zugleich

$$h_s = \frac{M_{xy}}{J} = \frac{M_{xy}}{M_y}$$

folglich

$$M_{xy} = h_s M_y = \frac{M_u M_y}{J} = \frac{M_u \cdot F \varrho}{2 \varrho \pi F} = \frac{M_u}{2\pi}$$

Darin liegt ein Mittel, für zahlreiche Flächen das Centrifugalmoment in Bezug auf die Koordinatenachsen bequem zu bestimmen.

Entsprechendes gilt von den Kurven, deren Gleichung lautet

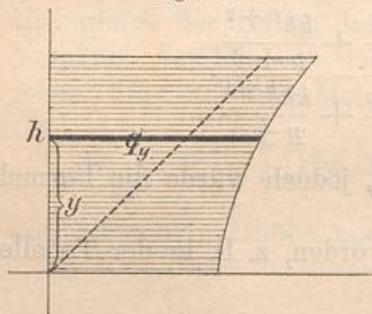
$$x^2 = a + by + cy^2 + \dots + ky^p.$$

Der letzte Satz kann überhaupt für alle Flächen benutzt werden, bei denen aus irgend welchen Gründen (z. B. Symmetrie) die Schwerpunkthöhe des Drehungskörpers leicht bestimmt werden kann.

325) Beispiel der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.

Für den gezeichneten Quadranten ist das Centrifugalmoment mit Hilfe des Drehungskörpers folgendermaßen zu bestimmen. Moment des Streifens

Fig. 237.



$$m_u = y \cdot q_y = y \cdot x^2 \pi = \pi y (1 + y^2),$$

also

$$M_u = \frac{\pi h^2}{2} + \frac{\pi h^4}{4} = \frac{\pi h^2}{4} (2 + h^2).$$

Demnach

$$M_{xy} = \frac{M_u}{2\pi} = \frac{h^2}{8} (2 + h^2).$$

326) Beispiel des Halbkreises in dem Sonderfalle der Fig. 238.

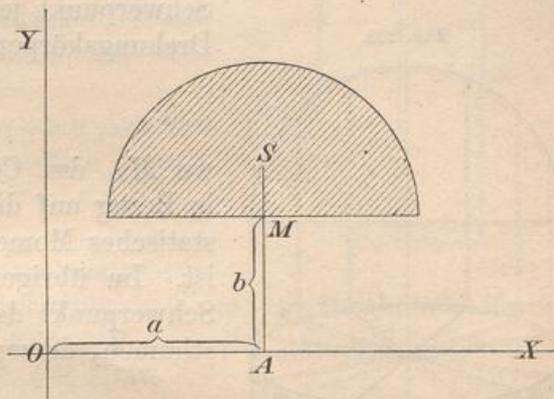
Da die Symmetrieachse parallel der Drehungsachse ist, so ist nach Nr. 117 der Schwerpunkt des Drehungskörpers in der Höhe $b + \frac{4r}{3\pi}$ zu finden. Sein Inhalt ist $\frac{r^2\pi}{2} \cdot 2a\pi = a\pi^2 r^2$, also das Moment $M_u = (a\pi^2 r^2) \left(b + \frac{4r}{3\pi}\right)$, folglich

$$M_{xy} = \frac{a\pi^2 r^3 (3b\pi + 4r)}{2\pi \cdot 3\pi} = \frac{ar^3}{6} (3b\pi + 4r).$$

Im letzteren Falle war die Summenformel für ganze Exponenten nicht ohne weiteres brauchbar, denn die Kreisgleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ führt auf $x = a + \sqrt{r^2 - (y-b)^2}$, wobei rechts erst nach Potenzen von y in unendlicher Reihe entwickelt werden müßte.

Der gewonnene Satz über das Centrifugalmoment sagt nichts Neues, bietet aber doch für viele Flächen einen bequemen Weg zur Berechnung. Er gilt auch für die Fälle, wo x oder x^2 durch eine unendliche Reihe gegeben ist, sobald man nur im Konvergenzgebiete bleibt.

Fig. 238.



327) Negative und gebrochene Exponenten.

Ist die Querschnittsgleichung von der Form

$$x = q_y = ay^\alpha + by^\beta + cy^\gamma + dy^\delta + \dots,$$

wobei unter den Exponenten auch negative und gebrochene sind, so ist nach Abschnitt V. C (Nr. 179 bis 195) zu verfahren. Tritt in der Querschnittsformel für den Körper oder für sein statisches Moment der Exponent -1 auf, der als Ausnahmefall zu betrachten ist und auf den natürlichen Logarithmus führt, so ist einige Vorsicht nötig, denn der unendlich werdende Streifen darf nicht zu der Fläche gehören, die untersucht werden soll. Sind sämtliche Exponenten größer als -1 , so kann der Körper von Null bis zu jeder beliebigen endlichen Höhe y berechnet werden. Kommen Exponenten vor, die kleiner als -1 sind, so darf nicht von Null ausgegangen werden, da dann der entsprechende Diagrammteil im allgemeinen unendlich groß wird. Dagegen kann die Fläche zwischen einem endlichen y_1 und einem endlichen y_2 berechnet werden.

328) Irrationale und transcendente Querschnittsgleichungen können insoweit berücksichtigt werden, als die Entwicklung von q_y in unendliche Reihen möglich ist. Auch hierüber ist schon vorher, z. B. in Nr. 195, das Nötige mitgeteilt, jedoch kann auch der entsprechende Abschnitt in Band III des Method. Lehrbuchs verglichen werden. Bei der Anwendung der Summenformel erhält man Reihen, die man entweder zu geschlossenen Ausdrücken

summieren kann, wovon in Nr. 195 einige Beispiele vorkommen, oder bei denen man auf eine geschlossene Summierung verzichten muß. Im letzteren Falle erhält man Annäherungsergebnisse, indem man eine hinreichende Anzahl von Reihengliedern summiert.

329) Sektoren allgemeiner Drehungskörper. Ist die Y -Achse die Drehungsachse für eine Fläche, so liegt nach Nr. 116 der Schwerpunkt jedes Sektors des entstehenden Drehungskörpers in der Höhe

$$y = \frac{M_{xy}}{M_y},$$

wo M_{xy} das Centrifugalmoment der Fläche in Bezug auf die Koordinatenachsen, M_y ihr statisches Moment in Bezug auf die Y -Achse ist. Im übrigen ist (nach Nr. 47—50) der Schwerpunkt desjenigen Kreisbogens zu bestimmen, dessen Radius

$$e = \frac{T_y}{M_y}$$

ist und dessen Centriwinkel α der des Sektors ist. Nach Nr. 9 ergibt sich als Abstand

$$\varrho = \frac{es}{b} \text{ bzw. } \varrho = \frac{2e^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{b},$$

wo $\alpha = \frac{b}{e\pi} 180^\circ$ ist.

Die Beispiele aus Nr. 49) und 50) mögen genügen.

330) Körperliche Schraubengewinde. Im Method. Lehrbuche, Teil III, Stereometrie, ist an Fig. 91 gezeigt, daß der Inhalt der körperlichen Schraubengewinde ohne weiteres nach der Guldinschen Regel berechnet werden kann, da die einzelnen Sektoren des Drehungskörpers nur in ihrer Lage verschoben sind, was den Inhalt nicht ändert. (Dies entspricht ganz der Flächenverschiebung beim Cavalierischen Prinzip).

Für einen vollen Umgang findet man also nach Nr. 116 den Schwerpunkt folgendermaßen. In der erzeugenden Fläche bestimme man den Punkt mit den Koordinaten $y = \frac{M_{xy}}{M_y}$, $x = \frac{T_y}{M_y}$. In der durch diesen

Fig. 239.

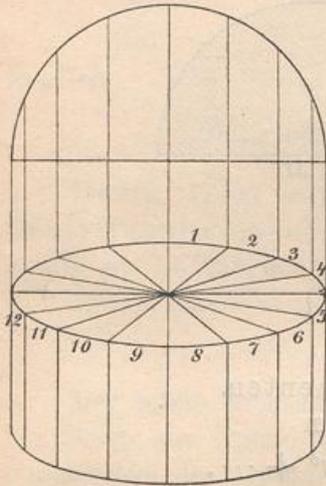
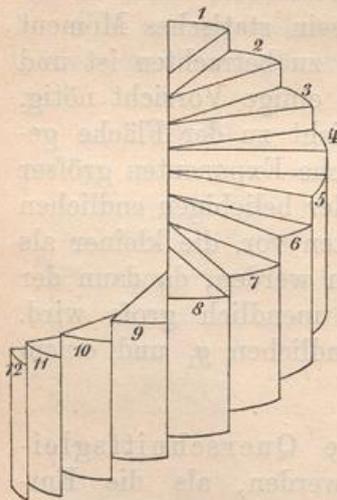


Fig. 240.

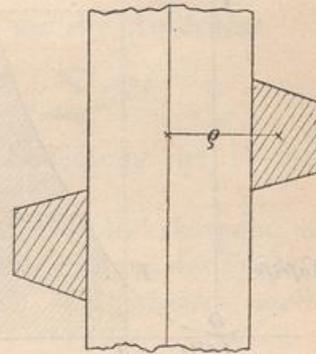


Punkt gehenden Schraubenlinie liegen die Schwerpunkte aller unendlich kleinen Sektoren. Der Schwerpunkt dieser Schraubenlinie ist zu suchen. Er liegt in halber Höhe. Seine Entfernung von der Achse stimmt überein mit der des Schwerpunktes für den Kreisbogen, in den sich diese Schraubenlinie projizieren läßt, wobei übrigens $\alpha > 360^\circ$ sein kann.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich ebenfalls aus dem Prinzip von Cavalieri.

Als Beispiel behandle man nach Art von Nr. 165 das in der Figur angedeutete Trapezgewinde.

Fig. 241.



331) **Aufgabe.** Ein Schraubengewinde entstehe durch Drehung eines Halbkreises um eine unendlich dünne Spindel und zwar so, wie es Fig. 242 darstellt. Er soll im Aufrifs genau konstruiert werden, z. B. mit Hilfe der durch die Punkte C, D, E, F, G, H, J gehenden Schraubenlinien.

Der Inhalt und der Schwerpunkt sollen für einen halben Umgang bestimmt werden.

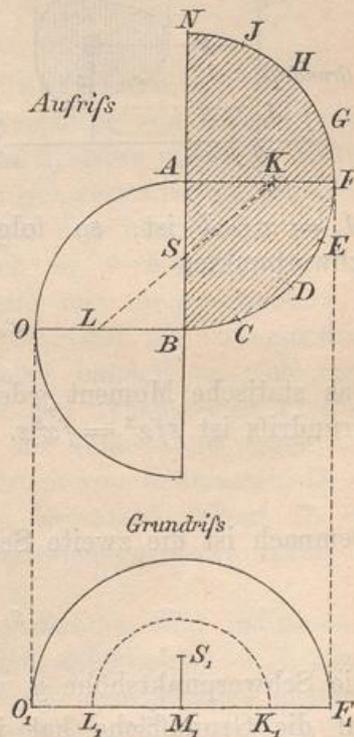
Das Ausführen der Zeichnung wird dem Leser überlassen. Der Inhalt wird gleich dem der Halbkugel, also $J = \frac{2}{3} r^3 \pi$. Der Schwerpunkt liegt in der Höhe von S . Der Punkt K , durch den die Hilfsschraubenlinie geht, hat nach Nr. 50 den Abstand $AK = \frac{3\pi}{16} r$, demnach ist im Grundrifs die Schwerpunktsentfernung $M_1 S_1 = \frac{2AK}{\pi} = \frac{3}{8} r$, was dem Schwerpunkte der Halbkugel entspricht.

Für einen beliebigen Umdrehungswinkel findet man die Lösung

$$M_1 S_1 = \frac{135}{2} \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

ebenso, wie in Nr. 50.

Fig. 242.



332) Andeutung über parabolisch abgeschnittene Prismen und Cylinder.

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \sum f x^4}{\sum f x^2}.$$

Ahnlich ist es bei der Parabel $y = cx^2$.

Bei der Parabel $y = x^p$ handelt es sich um die Ausdrücke

$$\sum f x^p, \quad \sum f x^{p+1}, \quad \sum f x^p y, \quad \frac{1}{2} \sum f x^{2p}.$$

An diesen Beispielen erkennt man die Bedeutung der Flächenmomente höherer Ordnung.

Das Beispiel des regelrecht aufgestellten Rechteckskörpers, der in solcher Weise abgeschnitten ist, läßt sich an der Hand des Früheren bequem durchführen. Andere Grundriffsformen sind schwerer zu behandeln.

Das Abschneiden kann auch mit Hilfe eines Drehungsparaboloides p^{ter} Ordnung erfolgen, wobei Polarmomente höherer Ordnung auftreten.

Auf diesen Gegenstand, der nur theoretische Bedeutung hat, soll nicht näher eingegangen werden. Er bietet zahlreiche Übungsbeispiele für die höhere Analysis.

333) Anwendungen der Schwerpunktslehre.

a) In der Mechanik spielt der Schwerpunkt von Körpern eine hervorragende Rolle als Angriffspunkt eines Systems paralleler Kräfte, in ihm greift die Resultante der einzelnen Schwerkräfte an, und zwar für alle möglichen Stellungen des Körpers. Die elementare Theorie der einfachen Maschinen ist dort dadurch zu verfeinern, daß der Einfluß des Gewichtes der einzelnen Teile mit eingerechnet wird. Ein interessantes Beispiel bietet in dieser Hinsicht die Untersuchung über die Empfindlichkeit der Wage. Dabei handelt es sich nicht nur um den statischen, sondern auch um den dynamischen Einfluß.

b) Die Stabilität von Mauern, d. h. der Widerstand gegen seitlichen Druck (Winddruck, Wasserdruck, Druck von Erdmassen, Druck von fehlerhaften Dachkonstruktionen, von Gewölben) hängt ab von dem Momente der im Schwerpunkte angreifenden Schwerkraft in Bezug auf die Kippkante der Mauer.

c) Die Untersuchungen über labiles, stabiles und indifferentes Gleichgewicht von sich drehenden, rollenden, schwimmenden Körpern beruhen auf der Schwerpunktslehre. Die bei dem stabilen Zustande eintretenden Pendelschwingungen und ähnliche Erscheinungen erfordern die Kenntnis derselben Theorie.

d) In den Lehrbüchern der Mechanik werden die Sätze über den Angriffspunkt des Auftriebs bei schwimmenden Körpern

vielfach falsch angegeben, indem der Angriffspunkt in vollem Widerspruch zu den Hebelgesetzen einfach in den Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse gelegt wird. Die Korrektur ergibt sich aus Folgendem: Der Druck p bei der Stelle A in Fig. 244 zerlegt sich in einen Seitendruck und einen Auftrieb. Der erstere

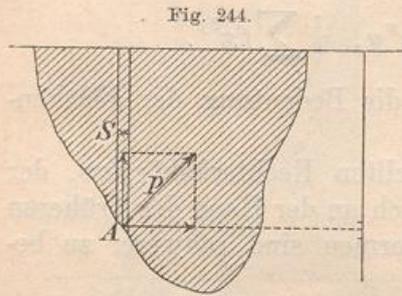


Fig. 244.

ist gleich dem Drucke gegen die entsprechende Wandprojektion des Flächenteilchens, der letztere gleich dem Gewichte der verdrängten Wassersäule. Der Angriffspunkt A liegt aber doppelt so tief, wie der Schwerpunkt der Wassersäule. Da dies für alle Säulchen gilt, so liegt der Angriffspunkt des Auftriebs im Falle der Fig. 244 senkrecht unter dem Schwer-

punkte der verdrängten Wassermasse und zwar in doppelter Tiefe. (Darin liegt eine Anwendung des Prinzips von Cavalieri versteckt.)

Ist der Körper vollständig untergetaucht, so findet dasselbe statt. Ist nämlich in Fig. 245 S_u der Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse, S_o der Schwerpunkt der darüber schwebenden Wassermasse, S_g der Schwerpunkt des Gesamtraums, und

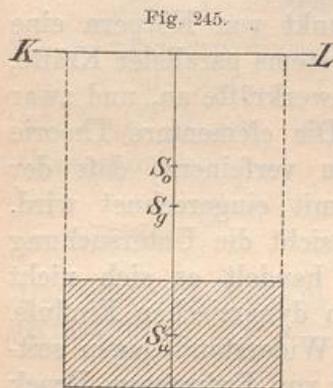


Fig. 245.

sind J_u , J_o und J_g die entsprechenden Räume, so ist in Bezug auf die Niveaulfläche KL das gesamte statische Moment gleich der Summe der Einzelmomente, d. h. (wenn die Schwerpunktstiefen mit t_u , t_o und t_g bezeichnet werden)

$$J_g t_g = J_o t_o + J_u t_u,$$

demnach ist die Schwerpunktstiefe der verdrängten Wassermasse

$$1) \quad t_u = \frac{J_g t_g - J_o t_o}{J_u}.$$

Dies gilt für jede Gestalt und Lage des untergetauchten Körpers, auch kann dabei $S_o S_u$ eine schräge Gerade sein.

Die Auftriebsverhältnisse gestalten sich nun folgendermaßen. Nach unten drückt den Körper die Wassermasse des Raums J_o , nach oben drückt ihn die dem Gesamtraum J_g entsprechende Wassermasse. Die Resultante beider Kräfte ist $J_g - J_o = J_u$. Nun liegt der Angriffspunkt A_o doppelt so tief wie S_o , also in der Tiefe $2t_o$; der Angriffspunkt A_g liegt ebenso in der Tiefe $2t_g$. Die beiden Kräfte sind entgegengesetzte, der Angriffspunkt bleibt nach bekanntem Satze derselbe,

wenn man die Richtungen der Kräfte ändert, wenn sie nur entgegengesetzte bleiben. In der Fig. 246 sind die Kräfte der Deutlichkeit halber in horizontale Lage gedreht worden. Dort stelle $\overline{A_oB}$ die Kraft J_o , $\overline{A_gC}$ die Kraft J_g vor. Macht man dann $\overline{A_oD} = \overline{A_gC}$ und $\overline{A_gE} = -\overline{A_oB}$, dann giebt DE auf A_oA_g den Schnittpunkt A_u als den Angriffspunkt der Resultante. Dabei muß nach dem Gesetz der statischen Momente in Bezug auf KL sein

$$J_g \cdot 2t_g - J_o \cdot 2t_o = J_u \cdot t_u.$$

Demnach ist die Tiefe

$$2) \quad t_u = \frac{2(J_g t_g - J_o t_o)}{J_u},$$

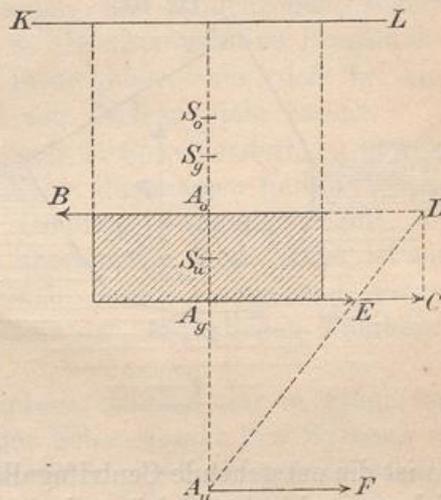
d. h. das Doppelte von der Tiefe des Punktes S_u .

(Auf diesen Umstand hat meines Wissens zuerst Herr Ingenieur H. Hädicke in einem Schriftchen vom Jahre 1881 aufmerksam gemacht, welches unter dem Titel „der Angriffspunkt des Auftriebs“ bei Orell und Füssli in Zürich erschienen ist. Die hier gegebene Darlegung ist allerdings einfacher und kürzer.)

$\overline{A_uF} = J_u$ stellt die Resultante dar. Bringt man sie in A_u entgegengesetzt an, so herrscht zwischen den Kräften $\overline{A_oB}$, $\overline{A_gC}$ und $-\overline{A_uF}$ Gleichgewicht. Die Resultante ist senkrecht nach oben gerichtet zu denken.

Der horizontale Seitendruck gegen den Körper ist in jeder Richtung genommen gleich Null. Er besteht aus zwei gleichen und entgegengesetzten Komponenten, deren Gröfse man folgendermaßen findet. Man projiziere den Körper auf eine senkrechte Wand, die zugleich senkrecht gegen die gewählte Richtung liegt (z. B. auf eine der senkrechten Koordinatenebenen). Der eine Teil des Seitendrucks ist dann gleich dem statischen Momente M_o der Projektionsfläche in Bezug auf die Wasseroberfläche, der Angriffspunkt liegt in der Tiefe $\frac{T_o}{M_o}$, wo T_o das Trägheitsmoment, M_o das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Wasseroberfläche ist. Die andere Koordinate wird mittels der Formel $\frac{M_{xy}}{M}$ gefunden, wo M_{xy} das Centrifugalmoment der Projektionsfläche in Bezug auf den Schnitt der Wasserfläche und der senkrechten Koordinatenebene ist. (Vgl. Nr. 113.) Jetzt ist

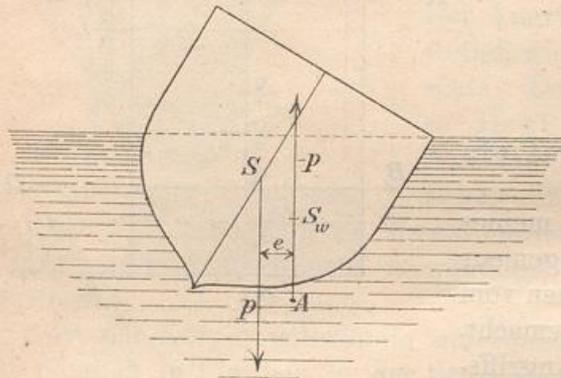
Fig. 246.



die Lage und GröÙe der betreffenden Druckresultante genau bestimmt. Die andere ist ihr entgegengesetzt und gleich groÙ, die Summe beider also Null. Das Gesagte gilt für jede beliebige Gestalt. Damit ist die Statik untergetauchter Körper erledigt.

e) Stabilität eines Schiffskörpers in schräger Lage. Ist S der Schwerpunkt des Schiffskörpers, p das gesamte Gewicht des Schiffes, so ist der Auftrieb nach Archimedes gleich $-p$. Ist S_w der Schwerpunkt

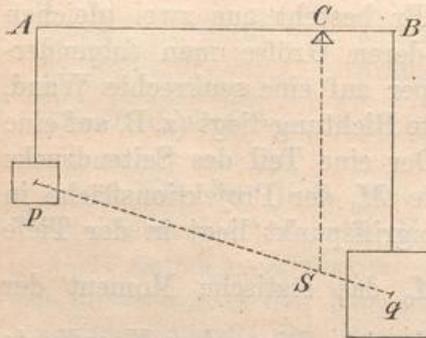
Fig. 247.



punkt der verdrängten Wassermasse, so liegt der Angriffspunkt A des Auftriebs doppelt so tief. Das Moment des Kräftepaars ist für diese Lage des Schiffes gleich pe . Da es ein aufrichtendes ist, kann das Schiff noch einen Winddruck vom Momente $-pe$ aushalten, ohne zu kentern.

f) Dreht sich ein Körper um eine beliebige Achse, so ist die entstehende Centrifugalkraft gleich der Centrifugalkraft der im Schwerpunkte vereinigt gedachten Masse. Im allgemeinen greift sie aber in einem anderen Punkte an und giebt für jeden Punkt der Achse ein bestimmtes Centrifugalmoment. In der Regel zerlegt man die gesamte Centrifugalwirkung in eine im Schwerpunkte angreifende Kraft und in ein Kräftepaar, dessen Ebene besonders konstruiert

Fig. 248.



werden muß (vgl. Fig. 101 für den Fall ungleicher Kräfte). Die drei Hauptachsen des Centralellipsoids sind freie Umdrehungsachsen. Das Problem kann also nur mit Hilfe der körperlichen Trägheitsmomente zum Abschluss gebracht werden. — Über die Centrifugalkraft, die einen um seine Achse drehenden Rotationskörper zerreißen will, vgl. Nr. 49.

g) Wird ein physisches Pendel vom Gewicht p aus der Ruhelage gebracht und hebt sich dabei sein Schwerpunkt um h , so ist die geleistete Arbeit gleich $p \cdot h$. (LäÙt man es in die Ruhelage zurückschwingen, so wird der tiefste Punkt mit einer Drehungsgeschwindigkeit passiert, die sich aus

$T \frac{\vartheta^2}{2} = ph$ als $\vartheta = \sqrt{\frac{2ph}{T}}$ berechnen läßt. Die Schwingungsdauer ist $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, wo $l = \frac{T}{M}$ ist.)

h) Ist ein Hebel AB durch Lasten p und q ins Gleichgewicht versetzt und dreht man ihn um C , so bleibt der Schwerpunkt S beider Lasten in derselben Höhe. Entsprechendes gilt vom Gleichgewichtszustande anderer einfacher oder zusammengesetzter Maschinen, z. B. Rad und Welle, alle Arten von Flaschen- und Rollenzügen, schiefe Ebenen, Schraubenmechanismen u. s. w. Hierher gehören Fragen des indifferenten Gleichgewichtes. Dazu gehört eben, daß bei eintretender Bewegung der Schwerpunkt sein Niveau nicht ändert.

i) Wird ein Körper durch einen Stofs fortgeschleudert, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer Parabel (im allgemeinen Falle in einem Kegelschnitte) und außerdem finden Drehbewegungen statt, die mit Hülfe der Trägheitsmomente zu untersuchen sind. Dies ist ein Fall des sogenannten Schwerpunktprinzips. Zur Lehre vom excentrischen Stofse ist ebenfalls die Kenntnis der körperlichen Trägheitsmomente nötig.

k) Bewegen sich zahlreiche kosmische Massen nur in Folge der gegenseitigen Anziehung, so bleibt der Schwerpunkt des Systems in Ruhe. Wurde vorher jeder Masse ein Stofs gegeben, so bewegt sich der Schwerpunkt des Systems in gerader Linie. Handelt es sich nur um zwei Körper, so bewegt sich der Schwerpunkt in gerader Linie und beide Körper drehen sich in Ellipsen um den Schwerpunkt des Systems (allgemeiner in Kegelschnitten).

l) Daß in der Theorie der Gewölbe der Körperschwerpunkt eine wichtige Rolle spielt, ist selbstverständlich. Dasselbe gilt noch von vielen anderen Lehren der Mechanik, auf die jetzt nicht eingegangen werden soll. Über die Flächenschwerpunkte sei noch folgendes gesagt:

m) Bei Schiefsversuchen gilt der Schwerpunkt sämtlicher Treffpunkte als mittlerer Treffpunkt. Bei den Untersuchungen über die Abweichung rotierender Langgeschosse wird er zu Grunde gelegt.

n) Soll bei einer Gleichung n^{ten} Grades durch eine Substitution das zweite Glied entfernt werden, so handelt es sich um eine Verlegung des Nullpunktes des Koordinatensystems nach dem Schwerpunkte der Wurzelpunkte, mögen diese nun reell oder imaginär sein. (Die Gleichung darf auch komplexe Koeffizienten haben.)

o) Strömt in n Punkten einer sehr großen Platte Elektrizität in den Quantitäten v_1, v_2, \dots, v_n ein, und wird sie in großer Entfernung abgeleitet, so gehen die Asymptoten der Stromlinien durch den Schwerpunkt der mit dem Gewichte v_1, v_2, \dots, v_n zu belegenden Einströmungspunkte.