Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

Erster Abschnitt. Phoronomie oder geometrische Bewegungslehre.

Erster Abschnitt.

Phoronomie oder geometrische Bewegungslehre.

§ I. Die geradlinige, gleichförmige Bewegung.

Bewegt sich ein starrer Körper so, daß alle seine Teilchen konstante Geschwindigkeit haben und parallele Wege beschreiben, dann ist seine Bewegung eine geradlinige, gleichförmige.

Die Lage des Körpers ist vollständig bestimmt, wenn man diejenige eines seiner Punkte kennt. Es läßt sich somit die Untersuchung der Bewegung auf die eines Punktes beschränken.

Da die Geschwindigkeit c konstant ist, wird nach einer Sekunde der Weg c Meter, nach 2 Sekunden der Weg $c \cdot 2$ Meter, nach t Sekunden der Weg $c \cdot t$ Meter zurückgelegt. Also erhält man für den Weg, welchen ein Körper gleichförmig macht, die Formel

$$s = c \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für die Zeit t_1 wäre der Weg $s_1 = c \cdot t_1$. — Durch Division der beiden letzten Gleichungen wird dann

$$\frac{s_1}{s} = \frac{t_1}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

„Bei gleichen Geschwindigkeiten verhalten sich die Wege wie die Zeiten, in welchen sie zurückgelegt werden."

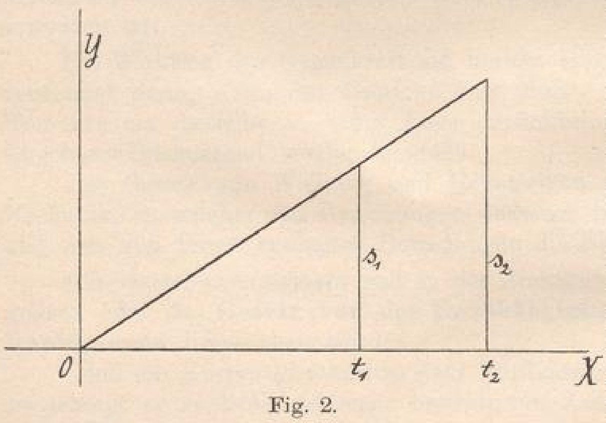

Fig. 2.

Eine zeichnerische (graphische) Darstellung des Weges bei einer gleichförmigen Bewegung ergibt sich auf folgende Weise:

Trägt man auf einer horizontalen Geraden $\overline{OX}$, Fig. 2, vom Punkte O aus die Zeiten als Längen auf und errichtet man in den einzelnen Zeitpunkten Senkrechte, deren Größe gleich den in diesen zurückgelegten Wege sind, so ergibt der geometrische Ort der Endpunkte der letzteren die sogenannte **Weg-**

linie. Dieselbe muß durch O gehen, weil für $t = o$ auch $s = o$ ist — sie ist eine Gerade, da laut Formel (4) $\frac{s_1}{s} = \frac{t_1}{t}$ sein muß. Die Geraden $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$, auf welchen Zeiten und Wege abgetragen werden, heißen **Koordinatenachsen**, die Zeiten und Wege **Koordinaten (Abszissen und Ordinaten)**.

Werden aber in den einzelnen Zeitpunkten Senkrechte von der Größe c errichtet, so ist die Verbindungslinie der Endpunkte der letzteren die zur $\overline{OX}$-Achse parallele **Geschwindigkeitslinie** $\overline{BC}$. — Der Inhalt des Rechteckes $OABC$, Fig. 3, ist $c \cdot t$, also gleich dem in der Zeit t mit der Geschwindigkeit c zurückgelegten Wege s. — Demnach ist der Weg einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung durch ein Rechteck mit der Basis t und der Höhe c dargestellt.

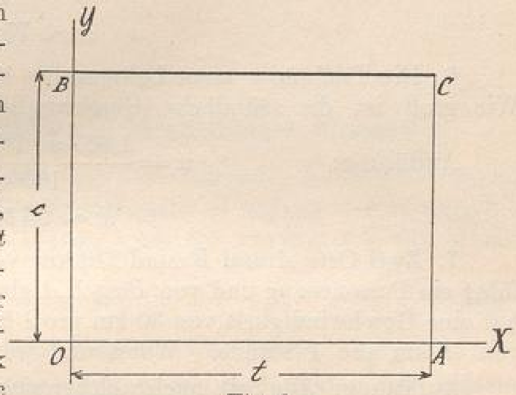

Fig. 3.

Beispiele.

1. Welche Geschwindigkeit besitzt ein Fußgänger, welcher in der Minute 115 Schritte à 0,75 m macht?

Auflösung: $$c = \frac{115 \cdot 0{,}75}{60} = \frac{115 \cdot 0{,}05}{4} = \frac{5{,}75}{4}$$
$$c \sim \mathbf{1{,}44\ m}$$

2. In welcher Zeit gelangt ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde, wenn die Entfernung beider 20000000 Meilen und die Geschwindigkeit des Lichtes mit 40000 Meilen angenommen wird?

Auflösung: $$t = \frac{s}{c} = \frac{20000000}{40000} = 500 \text{ Sek.}$$
$$\boldsymbol{t = 8 \text{ Min. } 20 \text{ Sek.}}$$

3. Ein Bote brauchte zu einem Wege von 30 km 4 Stunden 40 Minuten. Welchen Weg legte er in einer Stunde zurück?

Auflösung: $t = 4^2/_3$ Stunden, daher
$$x = \frac{30}{4\frac{2}{3}} = \frac{30}{\frac{14}{3}} = \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$$
$$x \sim \mathbf{6{,}45\ km}$$

4. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Schnellzuges, der in einer Stunde 90 km zurücklegt?

Auflösung: $$c = \frac{90000}{60 \cdot 60} = \frac{100}{4}$$
$$\boldsymbol{c = 25\ \mathrm{m/sek.}}$$

5. Ein Schnellzug legt die Strecke von 30 km in 24 Minuten zurück. Wie groß ist seine stündliche Geschwindigkeit?

Auflösung:

$$\begin{array}{l} \text{In } 24 \text{ Min. } \ldots\ldots 30 \text{ km} \\ \text{,, } 60 \text{ ,, } \ldots\ldots x \text{ ,,} \\ \hline x : 30 = 60 : 24 \\ x = \frac{30 \cdot 60}{24} \end{array}$$

$$\boldsymbol{x \sim 75 \text{ km}/1^h}$$

6. Die Triebräder einer Lokomotive haben einen Durchmesser von 1,98 m. Wie groß ist die stündliche Geschwindigkeit der Maschine bei 250 Touren?

Auflösung: $$x = \frac{1{,}98 \cdot \pi \cdot 250 \cdot 60}{1000} \text{ km}$$

$$\boldsymbol{x \sim 93 \text{ km}}$$

7. Zwei Orte A und B sind 210 km voneinander entfernt. Von A nach B fährt ein Personenzug und von B nach A gleichzeitig ein Schnellzug ab. Ersterer hat eine Geschwindigkeit von 30 km pro 1 Stunde, letzterer eine Geschwindigkeit von 75 km pro 1 Stunde. Wann und wo begegnen sich die Züge?

Auflösung: Die Zeit, nach welcher sich beide Züge begegnen, sei x Stunden. Dann ist der Weg des Personenzuges $30\,x$, derjenige des Schnellzuges $75\,x$ km. Beide Wege müssen 210 km sein. Demnach gilt

$$30\,x + 75\,x = 210$$

$$105\,x = 210$$

$$\boldsymbol{x = 2 \text{ Stunden}}$$

Die Züge begegnen sich **150 km von B** oder **60 km von A** entfernt.

8. Ein Schiff fährt von Dover nach Calais in 2 Stunden. Auf der Rückfahrt hat es ungünstigen Wind und legt infolgedessen um $1^1/_2$ Meilen pro Stunde weniger zurück. Auf der Hälfte der Fahrt dreht sich der Wind günstig, so daß es $^1/_2$ Meile mehr pro Stunde zurücklegen kann und noch früher ankommt. Die Zeiten der Fahrt verhalten sich wie 6 : 7. Welche Entfernung hat Dover von Calais und wieviel legt das Schiff pro Stunde bei der Rückfahrt in der ersten und zweiten Hälfte des Weges zurück?

Auflösung: Ist x die gesuchte Entfernung, so ist $\frac{x}{2}$ die stündliche Geschwindigkeit während der Hinfahrt.

Dann ist in der ersten Hälfte der Rückfahrt die Geschwindigkeit $\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$, in der zweiten Hälfte $\frac{x}{2} - \frac{2}{2}$ Meilen, somit folgt

$$\frac{x}{\frac{x}{2} - \frac{3}{2}} : \left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x-3}{2}} + \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x-2}{2}} \right) = 7 : 6$$

$$\frac{2\,x}{x-3} : \left(\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x-2} \right) = 7 : 6$$

$$2\,x\,(x-2) : [x\,(x-2) + x\,(x-3)] = 7 : 6$$

$$2\,(x-2) : (2\,x-5) = 7 : 6$$

$$12\,x - 24 = 14\,x - 35$$

$$\boldsymbol{x = 5^1/_2 \text{ Meilen}}$$

Geschwindigkeit in der 1. Hälfte der Rückfahrt $\frac{x-3}{2} = 1^1/_4$ **Meilen**

„ „ „ 2. „ „ „ $\frac{x-2}{2} = 1^3/_4$ „

§ 2. Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Die Zunahme der Geschwindigkeit pro eine Sekunde, die Beschleunigung, werde mit p bezeichnet. Ist die Geschwindigkeit zu Anfang der Bewegung c, so ist sie nach der ersten Sekunde $c+p$, nach der zweiten $c+2p$, endlich nach der t ten Sekunde

$$v = c + pt \qquad (5)$$

Zur Ermittlung des Weges s führt folgende Überlegung. Trägt man auf der Achse $\overline{OX}$ gleiche Zeiten (Sekunden) und in den Endpunkten der letzteren Senkrechte von der Größe der zugehörigen Geschwindigkeit auf, so ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser Senkrechten die Geschwindigkeitslinie $\overline{AB}$, Fig. 4.

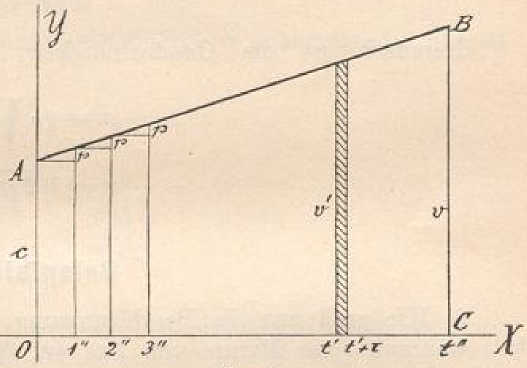

Fig. 4.

Zur Zeit t' sei eine Geschwindigkeit v' vorhanden. In der folgenden unendlich kleinen Zeit τ kann man die Bewegung gleichförmig erfolgend denken, und es stellt daher die Fläche $v' \cdot \tau$ den Weg in derselben vor. Ist nun der Weg s in t Sekunden durch lauter in unendlich kleinen Zeiten gleichförmig zurückgelegten Wegen zustande gekommen, so findet sich somit seine Größe als Maß der Fläche $OABC$, d. h. mit

$$s = \frac{v+c}{2} \cdot t \qquad (6)$$

„Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung kann somit ersetzt werden durch eine geradlinige, gleichförmige, deren Geschwindigkeit das arithmetische Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit der ersteren ist.“

Wird für v der Wert aus **(5)** in **(6)** substituiert, dann folgt

$$s = ct + \frac{p}{2} t^2 \qquad (7)$$

Durch Elimination von t aus s ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Größen s, v, c und p. Aus Gleichung **(5)** ist

$$t = \frac{v-c}{p}$$

Demnach wird $s = \frac{v + c}{2} \cdot \frac{v - c}{p}$ oder

$$\boldsymbol{s = \frac{v^2 - c^2}{2p}} \qquad \textbf{(8)}$$

Ein frei fallender Körper macht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung; seine Beschleunigung beträgt, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, $g = 9{,}81$ m. Die Anfangsgeschwindigkeit beim freien Fall ist $c = o$. Somit sind die Formeln für die Endgeschwindigkeit und für den Weg

$$\boldsymbol{v = g \cdot t} \qquad \textbf{(9)}$$

$$\text{und } \boldsymbol{s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{g}{2} t^2} \qquad \textbf{(10)}$$

Beträgt die Fallhöhe h, dann ist laut Gleichung **(10)**

$$h = \frac{g}{2} t^2, \text{ woraus}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ sich ergibt.}$$

Demnach ist die Geschwindigkeit, welche der Körper erlangt hat,

$$v = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}}; \qquad \textbf{(11)}$$

Beispiele.

9) Wie groß war die Beschleunigung eines Punktes, dessen Geschwindigkeit während einer Minute von 2 m auf 60 m gestiegen ist?

Auflösung:

$$v = c + pt$$

$$62 = 2 + p \cdot 60$$

$$p = \frac{62 - 2}{60}$$

$$\boldsymbol{p = 1 \text{ m}}$$

10. Wie lange muß sich ein Punkt bewegen, um von einer Anfangsgeschwindigkeit $c = 2$ m auf eine Endgeschwindigkeit $v = 14$ m bei einer Beschleunigung $p = 0{,}1$ m zu gelangen?

Auflösung:

$$v = c + pt$$

$$t = \frac{v - c}{p} = \frac{14 - 2}{0{,}1} = \frac{12}{0{,}1} = 120 \text{ Sek.}$$

$$\boldsymbol{t = 2 \text{ Min.}}$$

11. Die Anfangsgeschwindigkeit eines Punktes beträgt $c = 10$ m, seine Endgeschwindigkeit ist $v = 20$ m. — Wie lange braucht er, um einen Weg von $s = 2250$ m zurückzulegen?

Auflösung:
$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t$$
$$2250 = \frac{20 + 10}{2} \cdot t = 15\,t$$
$$t = \frac{2250}{15}$$
$$\boldsymbol{t = 150\ \text{Sek.} = 2^1/_2\ \text{Min.}}$$

12. Eine Lokomotive fährt in 4 Minuten auf eine Geschwindigkeit von 24 m/Sek. an. Wie groß ist ihre mittlere Beschleunigung?

Auflösung:
$$v = c + pt$$
$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{24 - 0}{240}$$
$$\boldsymbol{p = 0{,}1\ \text{m}}$$

13. Ein Körper wird 2,15 m hoch gehoben und dann frei fallen gelassen. Mit welcher Geschwindigkeit langt er in der Anfangslage an?

Auflösung:
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}15}$$
$$\boldsymbol{v = 6{,}5\ \text{m}}$$

14. Welche Höhe hat ein mit 15 m Geschwindigkeit ankommender Körper durchfallen?

Auflösung:
$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$
$$h = \frac{v^2}{2\,g}$$
$$h = \frac{15^2}{2 \cdot 9{,}81} = \frac{225}{19{,}62}$$
$$\boldsymbol{h = 11{,}45\ \text{m}}$$

15. Wie verhalten sich die in einzelnen, gleichen Zeiten zurückgelegten Wege einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null?

Auflösung: Die Wege nach 0, 1, 2, 3 .... Sekunden sind 0, $\frac{p}{2} \cdot 1$, $\frac{p}{2} \cdot 4$, $\frac{p}{2} \cdot 9$ ...., daher die Wege in der 1., 2., 3. .... Sekunde $\frac{p}{2}$, $\frac{3}{2}p$, $\frac{5}{2}p$ .... — Demnach verhalten sich die in einzelnen, gleichen Zeiten zurückgelegten Wege wie
$$\frac{p}{2} : \frac{3}{2} : \frac{5}{2}p : \ldots \text{ oder wie}$$
$$\mathbf{1 : 3 : 5 : \ldots}, \text{ d. h.}$$
wie die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen.

16. Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null ist der Weg in der fünften Sekunde 18 m; wie groß ist derselbe in der siebenten Sekunde?

Auflösung:
$$18 : x = 9 : 13$$
$$x = \frac{18 \cdot 13}{9} = 2 \cdot 13$$
$$\boldsymbol{x = 26\ \text{m}}$$

17. Zwei Körper bewegen sich von zwei $d = 205$ m entfernten Orten gegeneinander. Der erstere hat die Anfangsgeschwindigkeit $c_1 = 10$ m und die Beschleunigung $p_1 = 7$ m, der zweite die Anfangsgeschwindigkeit $c_2 = 6$ m und die Beschleunigung $p_2 = 3$ m. — Wann und wo treffen sie sich?

Auflösung: $$c_1 t + \frac{p_1}{2} t^2 + c_2 t + \frac{p_2}{2} t^2 = d$$

$$10 t + \frac{7}{2} t^2 + 6 t + \frac{3}{2} t^2 = 205$$

$$16 t + 5 t^2 = 205$$

$$t^2 + 3{,}2 t - 41 = 0$$

$$t = 1{,}6 \pm \sqrt{2{,}56 + 41} = -1{,}6 \pm \sqrt{43{,}56}$$

$$t = -1{,}6 \pm 6{,}6$$

Die brauchbare Lösung ist $\boldsymbol{t = 5}$ **Sek.**

Der erste Körper ist dann von A entfernt um $x = 10 \cdot 5 + \frac{7}{2} \cdot 25$, d. h. um $$\boldsymbol{x = 137{,}5} \textbf{ m}$$

18. Ein Stein fällt in einen Schacht. Nach $t = 6{,}33$ Sekunden hört man das Auffallen des Steines. Wie tief ist der Schacht, wenn die Schallgeschwindigkeit $c = {}^1/_3$ km/sek. beträgt?

Auflösung:

Die Zeit für den Weg des Schalles ist aus $x = c \cdot t_1 \ldots . \; t_1 = \frac{x}{c}$.

Die Zeit für den Weg des Steines ist aus $x = \frac{g}{2} t_2^2 \ldots . \; t_2 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$.

Demnach wird $$\frac{x}{c} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t$$

$$\frac{2x}{g}\left(t - \frac{x}{c}\right)^2$$

$$\frac{2x}{g} = t^2 - 2t \cdot \frac{x}{c} + \frac{x^2}{c^2}$$

$$x^2 - 2tc \cdot x - \frac{2c^2}{g} x + t^2 \cdot c^2 = 0.$$

Werden die Längen in km eingesetzt, so ergibt sich

$$x^2 - 2 \cdot 6{,}33 \cdot \frac{1}{3} x - \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 0{,}00981} x + \frac{6{,}33^2 \cdot 1}{9} = 0$$

$$x^2 - 4{,}22 x - 22{,}65 + 4{,}4521 = 0$$

$$x = 13{,}435 \pm \sqrt{180{,}4992 - 4{,}4521}$$

$$x = 13{,}435 \pm \sqrt{176{,}0471}$$

$$x = 13{,}435 \pm 13{,}268.$$

Bedeutung hat nur das Minuszeichen; daher

$$x = 0{,}167 \text{ km} \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{x = 167} \textbf{ m}$$

§ 3. Die geradlinige, gleichförmig verzögerte Bewegung.

Die Beziehungen für die geradlinige, gleichförmig verzögerte Bewegung ergeben sich, wenn man in denen der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung statt $p \ldots (-p)$ setzt.

Demnach lauten sie für die Endgeschwindigkeit und für den Weg

$$v = c - pt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$s = \frac{v+c}{2} \cdot t = ct - \frac{p}{2} t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Für den vertikalen Wurf nach aufwärts ergeben sich folgende Formeln nach Substitution von g für p

$$v = c - gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$s = ct - \frac{g}{2} t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Die Höhe, welche ein Körper, welcher mit der Anfangsgeschwindigkeit c vertikal nach aufwärts geworfen wird, erreicht, folgt aus der Erwägung, daß $v = o$ sein muß. Dann wird aus (14)

$$t = \frac{c}{g}.$$

Somit wird durch Einsetzen dieses Wertes der **Steigzeit** in (15) die **Steighöhe**

$$h = c\frac{c}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{c^2}{g^2} = \frac{c^2}{g} - \frac{c^2}{2g}$$

$$h = \frac{c^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Bei allen bisher besprochenen Bewegungen ist von den auftretenden Bewegungshindernissen abgesehen worden.

Beispiele.

19. Die Anfangsgeschwindigkeit eines Körpers beträgt 80 m und wird jede Sekunde um 0,5 m verzögert. Wie groß ist die Geschwindigkeit v nach 2 Minuten und welche Weglänge hat der Körper in dieser Zeit durchlaufen?

Auflösung: $v = c - pt = 80 - 0{,}5 \cdot 120$

$$\mathbf{v = 20\ m}$$

$$s = \frac{v+c}{2} \cdot t = \frac{20+80}{2} \cdot 120 = 50 \cdot 120$$

$$\mathbf{s = 6000\ m}$$

20. Wie groß muß die Verzögerung einer gleichförmig verzögerten Bewegung sein, damit die Anfangsgeschwindigkeit eines Körpers in t Sekunden auf die Hälfte reduziert werde?

Auflösung:

$$v = c - pt$$

$$\frac{c}{2} = c - pt$$

$$pt = \frac{c}{2}$$

$$p = \frac{c}{2t}$$

21. Eine Lokomotive mit 20 m Geschwindigkeit soll auf einer Strecke von 600 m durch Bremsen zum Stillstand gebracht werden. Welche Verzögerung muß ihr erteilt werden?

Auflösung:

$$v = c - pt = 0$$
$$c = pt = 20$$
$$s = \frac{v+c}{2} \cdot t = \frac{c}{2} t = 600$$
$$ct = 1200$$
$$20t = 1200$$
$$t = \frac{1200}{20} = 60''$$
$$p = \frac{20}{60}$$
$$\boldsymbol{p = \frac{1}{3}\ \mathrm{m}}$$

22. Eine Kugel wird mit einer Geschwindigkeit von 10 m eine schiefe Ebene hinaufgestoßen und erreicht nach 20 Sekunden ihre höchste Lage. Mit welcher Verzögerung bewegte sich die Kugel, welchen Weg legte sie zurück und wann hatte sie die Geschwindigkeit von 4 m?

Auflösung: a)

$$v = c - pt = 0$$
$$c = pt$$
$$10 = p \cdot 20$$
$$\boldsymbol{p = 0{,}5\ \mathrm{m},}$$

b) $$s = \frac{v+c}{2} \cdot t = \frac{10}{2} \cdot 20 = 5 \cdot 20$$
$$\boldsymbol{s = 500\ \mathrm{m},}$$

c) $$4 = c - pt_1$$
$$4 = 10 - 0{,}5 \cdot t_1$$
$$0{,}5 t_1 = 6$$
$$t_1 = \frac{6}{0{,}5}$$
$$\boldsymbol{t_1 = 12\ \mathrm{Sek.}}$$

23. Ein Projektil wird mit einer Geschwindigkeit von 600 m vertikal emporgeschossen. Nach welcher Zeit hat es die halbe Geschwindigkeit?

Auflösung:

$$300 = 600 - 9{,}81 \cdot t$$
$$9{,}81 \cdot t = 300$$
$$t = \frac{300}{9{,}81}$$
$$\boldsymbol{t \sim 30{,}5\ \mathrm{Sek.}}$$

24. Zwei Punkte A und B sind vertikal voneinander um h Meter entfernt. Von A fällt ein Körper frei herab und von B wird gleichzeitig ein

anderer mit der Geschwindigkeit c vertikal nach aufwärts geworfen. Wann treffen sich beide Körper?

Auflösung:
$$\frac{g}{2}t^2 + ct - \frac{g}{2}t^2 = h$$
$$t = \frac{h}{c}$$

25. Ein Körper wird pro Sekunde um 5 m verzögert. Wenn er zur Ruhe kommt, hat er einen Weg von 360 m gemacht. Ein zweiter Körper hat die doppelte Anfangsgeschwindigkeit, erfährt dieselbe Verzögerung und bewegt sich 8 Sekunden lang. Wie lange hat sich der erste Körper bewegt, welche Anfangsgeschwindigkeiten hatten beide Körper und welchen Weg hat der zweite Körper zurückgelegt?

Auflösung: Für die erste Bewegung ist
$$0 = c_1 - 5t_1$$
$$c_1 = 5t_1 \text{ und}$$
$$360 = c_1 t_1 - \frac{5}{2}t_1^2$$
$$360 = 5t_1^2 - \frac{5}{2}t_1^2 = \frac{5}{2}t_1^2$$
$$\boldsymbol{t_1 = 12 \text{ Sek.}}$$
$$\boldsymbol{c_1 = 60 \text{ m}}$$
$$\boldsymbol{c_2 = 120 \text{ m}}$$
$$s_2 = \frac{120}{2} \cdot 8 = 60 \cdot 8$$
$$\boldsymbol{s_2 = 480 \text{ m}}$$

26. Ein Körper wurde vertikal emporgeschleudert und kam nach 40 Sekunden an die Ausgangstelle zurück. Wie groß berechnet sich seine Anfangsgeschwindigkeit, wenn auf Luftwiderstand keine Rücksicht zu nehmen ist?

Auflösung: Der Körper steigt ebenso viele Sekunden als er hernach fällt. Demnach beträgt die Fallzeit 20 Sekunden. Die Steighöhe ist $\frac{c^2}{2g}$, die Fallhöhe $\frac{0+c}{2} \cdot 20$. — Beide Werte gleichgesetzt, ergibt sich
$$\frac{c^2}{2g} = \frac{c}{2} \cdot 20 \quad \text{oder}$$
$$\frac{c}{g} = 20$$
$$\boldsymbol{c = 196{,}2 \text{ m}}$$

§ 4. Zusammensetzung und Zerlegung geradliniger Bewegungen.

In der Einleitung wurde schon gezeigt, daß ein Körper, welcher zwei geradlinige Bewegungen gleichzeitig machen muß, nach Ablauf einer bestimmten Zeit an den vierten Eckpunkt des aus den Seitenwegen konstruierten Parallelogrammes gelangt.

Es wird sich nun fragen, welche Linie der Körper beschreibt, wenn die Art der Seitenbewegungen gegeben ist.

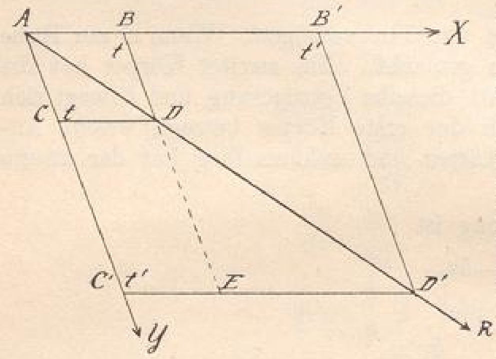

Fig. 5.

a) Beide Seitenbewegungen seien gleichförmige. Fig. 5.

Die Bewegung in der Richtung $\overline{AX}$ erfolge mit der Geschwindigkeit c, die in der Richtung $\overline{AY}$ mit der Geschwindigkeit γ. — Nach Ablauf der Zeit t befinde sich der Körper in der Richtung $\overline{AX}$ in B, in der Richtung $\overline{AY}$ in C, nach Ablauf der Zeit t' in der Richtung $\overline{AX}$ in B' in der Richtung $\overline{AY}$ in C'.

Dann ergeben sich die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} &= c\cdot t\\ \overline{AB'} &= c\cdot t'\end{aligned}\right\}\overline{BB'} = c\,(t'-t)$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{AC} &= \gamma\cdot t\\ \overline{AC'} &= \gamma\cdot t'\end{aligned}\right\}\overline{CC'} = \gamma\,(t'-t).$$

Nun folgt
$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} : \overline{BB'} &= t : (t'-t)\\ \overline{AC} : \overline{CC'} &= t : (t'-t)\end{aligned}\right\}\text{ daraus}$$

$$\overline{AB} : \overline{BB'} = \overline{AC} : \overline{CC'} \text{ oder}$$

$$\overline{CD} : \overline{ED'} = \overline{AC} : \overline{DE}, \text{ d. h.}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle DED', \text{ somit}$$

muß ADD' eine gerade Linie sein. Es ergibt sich also das Gesetz:

„Die resultierende Bewegung aus zwei gleichförmigen Seitenbewegungen ist eine geradlinige.“

b) Beide Seitenbewegungen seien gleichförmig beschleunigte mit den Anfangsgeschwindigkeiten Null.

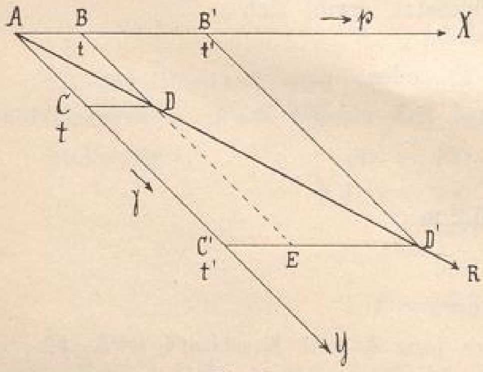

Fig. 6.

Die Beschleunigungen in den Richtungen $\overline{AX}$ und $\overline{AY}$ seien p und γ. Fig. 6.

Dann folgt analog wie früher

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} &= \frac{p}{2}t^2\\ \overline{AB'} &= \frac{p}{2}t'^2\end{aligned}\right\}\overline{BB'} = \frac{p}{2}\,(t'^2 - t^2)$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{AC} &= \frac{\gamma}{2}t^2\\ \overline{AC'} &= \frac{\gamma}{2}t'^2\end{aligned}\right\}\overline{CC'} = \frac{\gamma}{2}\,(t'^2 - t^2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{somit } \overline{AB} : \overline{BB'} = t^2 : (t'^2 - t^2) \\ \overline{AC} : \overline{CC'} = t^2 : (t'^2 - t^2)\end{array}\right\}\text{daraus}$$

$$\overline{AB} : \overline{BB'} = \overline{AC} : \overline{CC'} \text{ oder}$$

$$\overline{CD} : \overline{ED'} = \overline{AC} : \overline{DE}.$$

Demnach wieder $\triangle ACD \sim \triangle DED'$, so daß ADD' auch hier eine gerade Linie wird. Das Gesetz lautet daher:

„Die resultierende Bewegung aus zwei gleichförmig beschleunigten Seitenbewegungen mit den Anfangsgeschwindigkeiten Null ist eine geradlinige.“

Die beiden letzten Sätze lassen sich in einen einzigen zusammenfassen, nämlich:

„Die resultierende Bewegung aus zwei gleichartigen Seitenbewegungen ist eine geradlinige.“

c) Die Seitenbewegungen seien ungleichartige. Die Bewegung in der Richtung $\overline{AX}$ sei eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit c, die in der Richtung $\overline{AY}$ eine gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null und mit der Beschleunigung p, Fig. 7.

Dann wird ebenso wie früher

$$\overline{AB} = c \cdot t \qquad \overline{AC} = \frac{p}{2} t^2$$

$$\overline{AB'} = c \cdot t' \qquad \overline{AC'} = \frac{p}{2} t'^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} : \overline{AC} = c : \frac{p}{2} t \\ \overline{AB'} : \overline{AC'} = c : \frac{p}{2} t'\end{array}\right\} \text{da } \frac{p}{2} t' > \frac{p}{2} t,$$

wird auch $\overline{AB} : \overline{AC} > \overline{AB'} : \overline{AC'}$

oder $\overline{AB} : \overline{BD} > \overline{AB'} : \overline{B'D'}$.

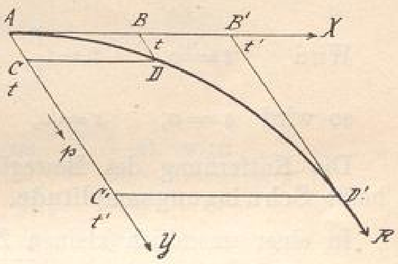

Fig. 7.

Dies ist der Fall, wenn ADD' eine Kurve ist. Es ergibt sich somit der Satz:

„Die resultierende Bewegung aus zwei ungleichartigen Seitenbewegungen ist eine krummlinige und wendet ihre konvexe Seite der gleichförmigen Seitenbewegung zu.“

Die Zerlegung einer geradlinigen, auch einer krummlinigen Bewegung, in zwei Seitenbewegungen ist möglich, wenn entweder die Richtungen der letzteren oder Richtung und Art der einen Seitenbewegung gegeben sind.

§ 5. Die schwingende Bewegung als Komponente einer gleichförmigen Kreisbewegung.

Das Bewegliche A, Fig. 8, habe im Kreise die Geschwindigkeit c und die Umlaufszeit T. — Daher gilt

$$c \cdot T = 2a\pi \text{ und}$$

$$c = \frac{2a\pi}{T}$$

Die Kreisbewegung AM werde nun in Komponenten $\overline{AM_1}$ und $\overline{AM_2}$

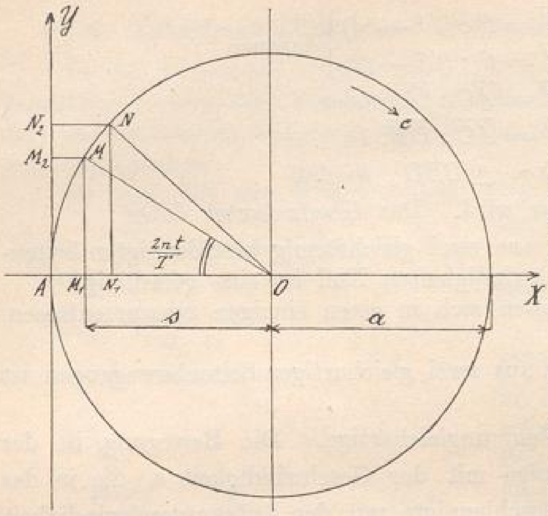

Fig. 8.

zerlegt. Untersucht soll nun die erstere, in der Richtung $\overline{AX}$ erfolgende Bewegung werden.

Die jeweilige Entfernung des Beweglichen vom Mittelpunkte O des Kreises wurde mit s bezeichnet. Dann ergibt sich für die Lage M_1

$$s = a \cdot \cos \alpha.$$

In einer Sekunde legt der Punkt A den Winkel $\frac{2\pi}{T}$ zurück, mithin in t Sekunden den Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t$. — Daher wird die Formel für s

$$\boldsymbol{s = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(17)}$$

Wird $\quad t = o, \quad t = \frac{T}{4}, \quad t = \frac{T}{2}, \quad t = \frac{3}{4}T, \quad t = T,$

so wird $\quad s = a, \quad s = o, \quad s = -a, \quad s = o, \quad s = +a.$

Die Entfernung des Beweglichen von O verändert sich also mit t. — a heißt **Schwingungsamplitude.**

In einer unendlich kleinen Zeit t kommt das Bewegliche im Kreise von M nach N, in der Richtung $\overline{AX}$ von M_1 nach N_1. — Die Geschwindigkeit in letzterer ist daher

$$v = \frac{\overline{M_1 N_1}}{\tau} = \frac{\overline{M_1 O} - \overline{N_1 O}}{\tau}$$

$$= \frac{a}{\tau} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) - a \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{T}(t + \tau)\right]$$

Da $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$ ist, wird

$$v = -\frac{2a}{\tau} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\tau}{T}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi\tau}{T}\right)$$

$$v = \frac{2a}{\tau} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\tau}{T}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi\tau}{T}\right)$$

Nun kann wegen der Kleinheit von $\frac{\pi\tau}{T}$ statt $\sin \frac{\pi\tau}{T}$ der Bogen $\frac{\pi\tau}{T}$ selbst gesetzt werden; aus eben demselben Grunde darf $\frac{\pi\tau}{T}$ gegen $\frac{2\pi t}{T}$ vernachlässigt werden, so daß

$$v = \frac{2a}{\tau} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \frac{\pi\tau}{T} \text{ oder}$$

$$v = \frac{2a\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \text{ wird.}$$

$$\frac{2a\pi}{T} = c, \text{ daher}$$

$$\boldsymbol{v = c \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(18)}$$

für $t = o$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3}{4}T$, $t = T$

werden $v = o$, $v = c$, $v = o$, $v = -c$, $v = o$

„Das Maximum der Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung ist in O, die Minima sind in den Punkten A und B vorhanden.“

In N_1 ist die Geschwindigkeit $v_1 = c \cdot \sin\left[\frac{2\pi(t+\tau)}{T}\right]$

Daher wird die Beschleunigung dort

$$b = \frac{v_1 - v}{\tau} = \frac{c \cdot \sin\left[\frac{2\pi(t+\tau)}{T}\right] - c\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\tau}$$

Da $\sin x - \sin y = \frac{1}{2} \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ ist, wird

$$b = \frac{c}{\tau} \cdot 2\sin\left(\frac{\pi\tau}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\tau}{T}\right)$$

$$b = 2\frac{c}{\tau} \cdot \frac{\pi\tau}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \text{ also}$$

$$b = \frac{2\pi c}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{2\pi c}{T} \cdot \frac{s}{a}$$

für $c = \frac{2a\pi}{T}$ substituiert, wird auch

$$b = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2a\pi}{T} \cdot \frac{s}{a} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s$$

Demnach ergibt sich die Beziehung

$$\boldsymbol{b = \frac{2\pi c}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{2\pi c}{T} \cdot \frac{s}{a} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s} \quad \ldots\ldots \textbf{(19)}$$

„Die Beschleunigung bei einer schwingenden Bewegung ist der Entfernung des Beweglichen von seiner Mittellage proportional.“

Für $t = 0$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3}{4}T$, $t = T$

wird $b = \frac{2\pi c}{T}$, $b = 0$, $b = -\frac{2\pi c}{T}$, $b = 0$, $b = \frac{2\pi c}{T}$.

Beispiele.

27. Welchen Abstand vom Mittel hat ein in einer Horizontalen schwingender Punkt nach $^1/_8$ der ganzen Schwingungszeit?

Auflösung:

$$s = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot \frac{T}{8}}{T}\right) = a \cos\frac{\pi}{4}$$

$$s = a \cdot \cos 45^0$$

$$\mathbf{s = 0{,}707\, a},$$

d. h. die Entfernung des schwingenden Punktes vom Mittel beträgt 70,7 $^0/_0$ der Schwingungsamplitude.

28. Wie verhält sich die Geschwindigkeit eines schwingenden Punktes nach $^1/_8$ der ganzen Schwingungszeit zu derjenigen im Kreise, aus welchem die schwingende Bewegung abgeleitet ist?

$$v = c \sin\frac{\pi}{4} = 0{,}707\, c$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}707 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{0{,}707} = \frac{1}{1{,}414}$$

$$\mathbf{v : c = 1 : 1{,}414}$$

29. Nach welcher Zeit wird die Geschwindigkeit einer schwingenden Bewegung gleich der Hälfte von derjenigen im Kreise, aus welchem die schwingende Bewegung abgeleitet ist?

Auflösung:

$$v = c \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{c}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi t}{T} = 30^0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2t}{T} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{t = \frac{T}{12}}$$

d. h. nach $^1/_{12}$ der ganzen Schwingungszeit.

30. In welchem Verhältnis stehen mittlere und maximale Geschwindigkeit einer schwingenden Bewegung, wenn das Bewegliche in der Minute n Schwingungen mit der Schwingungsamplitude a macht?

Auflösung: Die mittlere Geschwindigkeit ist $\frac{2 \cdot 2a \cdot n}{60} = \frac{an}{15}$, die maximale Geschwindigkeit ist $c = \frac{2a\pi n}{60} = \frac{a\pi n}{30}$.

Daher

$$\frac{an}{15} : \frac{a\pi n}{30} = 1 : \frac{\pi}{2}$$

Mittl. Geschw. zu max. Geschw. $= 2 : \pi$.

Eine schwingende Bewegung ist z. B. diejenige des Kolbens (oder Kreuzkopfs) einer Dampfmaschine. Wäre die Schubstange unendlich lang, dann ergäbe sich die Kolbenbewegung als Komponente der Bewegung des Kurbelzapfens und es ließe sich sagen:

„Die mittlere Kolbengeschwindigkeit verhält sich zur Geschwindigkeit des Kurbelzapfens wie $2:\pi$."

§ 6. Der Kurbeltrieb.

Zwischen den Kurbeldrehungswinkeln und den Kolben- oder Kreuzkopfwegen von Dampfmaschinen (Gasmotoren u. dgl.) existiert eine einfache Beziehung, welche im folgenden hergeleitet werden soll.

In Fig. 9 bedeutet $\overline{aO} = R$ die Kurbellänge und $\overline{Aa} = L\ (= 4 \div 5\ R)$ die Schubstangenlänge. Dreht sich nun die Kurbel aus ihrer Totlage um den

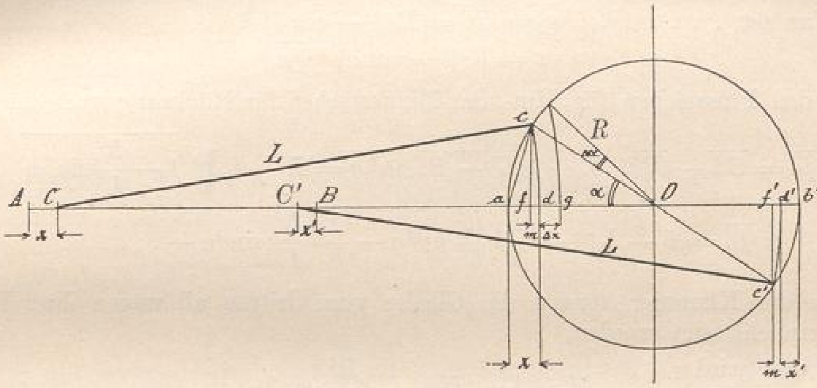

Fig. 9.

Winkel α, dann kommt die Schubstange in die Lage $\overline{Cc}$, so daß der Kreuzkopf und mit ihm der Kolben um $\overline{AC} = x$ aus seiner linken Totlage gezogen worden ist. Schlägt man nun aus C mit dem Halbmesser L den Bogen $\overline{cd}$, so ist $\overline{ad} = x$, d. h. ebenfalls der Kolbenweg.

Beweis:

$$\overline{Ad} = \overline{Aa} + \overline{ad} = L + \overline{ad} \quad \text{oder}$$

$$\overline{Ad} = \overline{dC} + \overline{AC} = L + x, \quad \text{folglich}$$

$$L + x = L + \overline{ad} \quad \text{oder}$$

$$\overline{ad} = x$$

Im Rückgange ist für denselben Kurbeldrehungswinkel der zugehörige Kolbenweg $\overline{b'd'}$.

Wäre die Schubstange unendlich lang, dann wäre der Kolbenweg im Hingange $\overline{af}$ und im Rückgange $\overline{bf'}$. Diese Wege sind einander gleich, denn

$$\triangle\, Oac \simeq \triangle\, Ob'c'$$

so daß auch $\triangle\, afc \simeq \triangle\, bc'f'$ ist, woraus sich

$$af = bf' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

ergibt. Demnach folgt der Satz:

„Die Kolbenwege sind bei unendlich langen Schubstangen für gleiche Kurbeldrehungswinkel im Hin- und Rückgange einander gleich."

Bei endlich langen Schubstangen ist der Kolbenweg im Hingange indes um $\overline{fd}$ größer, im Rückgange um $\overline{f'd'}$ kleiner als derjenige bei unendlich langen Schubstangen. Wegen $\overline{cf} = \overline{c'f'}$ und $\overline{Cc} = \overline{C'c'}$ ist

$$\triangle Ccf \cong \triangle C'c'f', \text{ daher}$$
$$\overline{Cf} = \overline{C'f'}, \text{ da auch}$$
$$\overline{Cd} = \overline{C'd'} \text{ ist, folgt}$$
$$\overline{Cd} - \overline{Cf} = \overline{C'd'} - \overline{C'f'}, \text{ somit}$$
$$\boldsymbol{fd = f'd'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(21)}$$

D. h.: „Bei endlich langen Schubstangen sind die Kolbenwege für gleiche Kurbeldrehungswinkel im Hingange größer und im Rückgange um dasselbe Stück kleiner als die Kolbenwege bei unendlich langen Schubstangen.“

Nun ist .... $\overline{af} = \overline{bf'} = R\,(1 - \cos\alpha)$

$$x = R\,(1 - \cos\alpha) \pm \overline{fd},$$

wobei das Pluszeichen für Hin-, das Minuszeichen für Rückgang zu nehmen ist.

$$\overline{fd} = \overline{Cd} - \overline{Cf} = L - \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2\alpha} = L - L\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha}$$

$$\overline{fd} = L - L\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha - \frac{1}{8}\cdot\frac{R^4}{L^4}\sin^4\alpha - \ldots\ldots\right).$$

In der Klammer können die Glieder vom dritten ab wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden.

Daher wird
$$fd = L - L + \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{L}\cdot\sin^2\alpha.$$

Die Formel für den Kolbenweg ergibt sich dann mit

$$\boldsymbol{x = R\cdot\left[1 - \cos\alpha \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{L}\cdot\sin^2\alpha\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(22)}$$

Der Hub S des Kolbens wird bei einer Umdrehung der Kurbel 2 mal, bei n Umdrehungen derselben, d. i. in einer Minute, $2n$ mal gemacht. Somit ist der Kolbenweg in der Minute $2S\cdot n$, daher in einer Sekunde

$$\boldsymbol{c_m = \frac{2S\cdot n}{60} = \frac{S\cdot n}{30}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(23)}$$

c_m heißt die **mittlere Kolbengeschwindigkeit.** Die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ist

$$v = \frac{2R\pi n}{60} = \frac{S\pi n}{60}.$$

Es folgt demnach
$$v : c_m = \frac{S\pi n}{60} : \frac{Sn}{30} \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{v : c_m = \pi : 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(24)}$$

Da die Kolbenbewegung aber eine ungleichförmige ist, ist die Kolbengeschwindigkeit jeden Augenblick eine andere, vom jeweiligen Kurbeldrehungswinkel abhängige.

Um sie abzuleiten, denke man sich die Kurbel um den unendlich kleinen Winkel $\triangle\alpha$ weitergedreht. Dann nimmt der Kolbenweg um $\overline{dg} = \triangle x$ zu. Für den Kurbeldrehungswinkel $(\alpha + \triangle\alpha)$ ist der letztere

$$x + \triangle x = R \cdot \left[1 - \cos(\alpha + \triangle\alpha) \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin^2(\alpha + \triangle\alpha)\right].$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung (22) ab, so wird

$$\triangle x = R[\cos\alpha - \cos(\alpha + \triangle\alpha)] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot \sin^2(\alpha + \triangle\alpha) \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \sin^2\alpha \quad \text{oder}$$

$$\triangle x = R[\cos\alpha - \cos(\alpha + \triangle\alpha)] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot [\sin^2(\alpha + \triangle\alpha) - \sin^2\alpha].$$

Das Verhältnis des kleinen Weges $\triangle x$ zur ebenso kleinen Zeit $\triangle t$, in welcher derselbe zurückgelegt worden ist, ist die Kolbengeschwindigkeit c. — Dieselbe wird also

$$c = \frac{R\,[\cos\alpha - \cos\,[\alpha + \triangle\alpha] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot [\sin^2(\alpha + \triangle\alpha) - \sin^2\alpha]}{\triangle t}$$

$$c = \frac{R \cdot \left[-2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\triangle\alpha}{2}\right)\right] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot [\sin(\alpha + \triangle\alpha) + \sin\alpha] \cdot [\sin(\alpha + \triangle\alpha) - \sin\triangle\alpha]}{\triangle t}$$

$$c = \frac{2R\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\sin\frac{\triangle\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot 2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\frac{\triangle\alpha}{2} \cdot 2\sin\frac{\triangle\alpha}{2} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)}{\triangle t}$$

Da der Winkel $\frac{\triangle\alpha}{2}$ sehr klein ist, kann statt dessen Sinus derselbe selbst gesetzt werden, so daß sich ergibt

$$c = \frac{2R\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\triangle\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot 2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) 2 \cdot \frac{\triangle\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\triangle\alpha}{2}}{\triangle t}$$

$$c = 2R\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t} \pm \frac{R^2}{L}\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right] \cdot \cos\frac{\triangle\alpha}{2} \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t}.$$

$\frac{\triangle\alpha}{\triangle t}$ ist das Verhältnis aus der Änderung des Kurbeldrehungswinkels und der Zeit, in welcher diese erfolgt, ist daher die **Winkelgeschwindigkeit der Kurbel** ω, somit bestimmt sich c mit

$$c = R\omega \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \pm \frac{R^2}{L} \cdot \omega \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \cos\frac{\triangle\alpha}{2}.$$

Da ω am Radius 1 gemessen ist, wird $R \cdot \omega$ der Bogen am Radius R, d. h. die Größe der **Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens.** Wegen der Kleinheit kann $\frac{\triangle\alpha}{2}$ gegen α vernachlässigt und $\cos\frac{\triangle\alpha}{2} \sim 1$ gesetzt werden, so daß endlich

$$c = v \cdot \sin\alpha \pm \frac{R^2}{L} \cdot \frac{v}{R} \sin\alpha\cos\alpha$$

wird. (Die Formeln für Winkelgeschwindigkeit ω und Bahngeschwindigkeit $v = R \cdot \omega$ sind in der Dynamik nochmals angeführt; s. § 53). — Die Formel für die Kolbengeschwindigkeit c lautet also

$$\boldsymbol{c = v\left(\sin\alpha \pm \frac{R}{2L}\sin 2\alpha\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Ebenso läßt sich die Kolbenbeschleunigung herleiten. Sie ist zu bilden als Verhältnis aus der Änderung der Kolbengeschwindigkeit und der Zeit, in welcher dieselbe stattfindet.

Die Kolbengeschwindigkeit zur Zeit $(t + \triangle t)$, das ist dann, wenn sich die Kurbel um den Winkel $(\alpha + \triangle\alpha)$ gedreht hat, ist

$$c + \triangle c = v\left[\sin(\alpha + \triangle\alpha) \pm \frac{R}{2L}\cdot\sin 2(\alpha + \triangle\alpha)\right].$$

Wird von dieser Gleichung die Gleichung (25) abgezogen, so ergibt sich

$$\triangle c = v[\sin(\alpha + \triangle\alpha) - \sin\alpha] \pm v\cdot\frac{R}{2L}[\sin 2(\alpha + \triangle\alpha) - \sin 2\alpha].$$

Demnach wird die Kolbenbeschleunigung

$$p = \frac{\triangle c}{\triangle t} = \frac{v\cdot 2\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cdot\sin\frac{\triangle\alpha}{2} \pm v\cdot\frac{R}{2L}\cdot 2\cos(2\alpha + \triangle\alpha)\sin(\triangle\alpha)}{\triangle t}$$

$$p = v\cdot 2\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\triangle\alpha}{\triangle t} \pm v\cdot\frac{R}{L}\cos(2\alpha + \triangle\alpha)\cdot\frac{\triangle\alpha}{\triangle t}$$

$$p = v\cdot\cos\alpha\cdot\omega \pm v\cdot\frac{R}{L}\cdot\omega\cdot\cos 2\alpha.$$

Nun ist $\omega = \frac{v}{R}$, so daß sich endlich schreiben läßt

$$\boldsymbol{p = \frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Beispiele.

31. Wie groß sind bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ die zu den Kurbeldrehungswinkeln $\alpha = 45^0$, 90^0 und 135^0 zugehörigen Kolbenwege?

Auflösung: a) $x = R(1 - \cos 45^0 + 0{,}1\sin^2 45)$

$= R(1 - 0{,}707 + 0{,}1\cdot 0{,}707^2)$

$= R(1 - 0{,}707 + 0{,}05) = R(1{,}05 - 0{,}707)$

$\boldsymbol{x = 0{,}343\,R = 0{,}17\cdot 2\,R}$

b) $x = R(1 - \cos 90^0 + 0{,}1\cdot\sin^2 90^0) = R(1 - 0 + 0{,}1)$

$\boldsymbol{x = 1{,}1\,R = 0{,}55\cdot 2\,R}$

c) $x = R(1 - \cos 135^0 + 0{,}1\cdot\sin^2 135^0)$

$= R(1 + 0{,}707 + 0{,}05) = R(1{,}05 + 0{,}707)$

$\boldsymbol{x = 1{,}757\,R = 0{,}878\cdot 2\,R}$

32. Wie groß sind bei $\frac{R}{L}=\frac{1}{4}$ die zu den Kurbeldrehungswinkeln $\alpha=45^0$, 90^0 und 135^0 zugehörigen Kolbenwege?

Auflösung: a) $x = R(1 - \cos 45 + 0{,}125 \cdot \sin^2 45)$

$$= R(1 - 0{,}707 + 0{,}125 \cdot 0{,}5)$$

$$= R(1{,}063 - 0{,}707)$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}356\,R = 0{,}18 \cdot 2\,R}$$

b) $x = R(1 - \cos 90^0 + \frac{1}{8} \cdot \sin^2 90)$

$$= R(1 + 0{,}125)$$

$$\boldsymbol{x = 1{,}125\,R = 0{,}563 \cdot 2\,R}$$

c) $x = R(1 + \cos 45 + 0{,}125 \cdot \sin^2 45)$

$$= R(1{,}707 + 0{,}125 \cdot 0{,}5)$$

$$\boldsymbol{x = 1{,}77\,R = 0{,}885 \cdot 2\,R}$$

33. Bei welchem Kurbeldrehungswinkel, bzw. nach welchem Kolbenweg, wird die Kolbenbeschleunigung Null, wenn $\frac{R}{L}$ a) gleich $^1/_5$, b) gleich $^1/_4$ ist?

Auflösung: a) $p = \frac{v^2}{r} \cdot \left(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha\right) = 0$

$$5\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$

$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 0$$

$$\cos^2\alpha + \frac{5}{4}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos\alpha = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{1}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{-5 \pm 5{,}7446}{4}$$

$$\cos\alpha = 0{,}186$$

$$\alpha = \mathbf{79^0\,20'}$$

$$x = R(1 - \cos 79^0 20' + 0{,}1 \sin^2 79^0 20') = R(1 - 0{,}186 + 0{,}1 \cdot 0{,}983^2)$$

$$x = R(1 - 0{,}186 + 0{,}097) = R(1{,}097 - 0{,}186)$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}911\,R = 0{,}456 \cdot 2\,R}$$

b) $\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\alpha = 0$

$$4\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$

$$4\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0$$

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos\alpha = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = -1 \pm \sqrt{1{,}5}$$

$$\cos\alpha = -1 \pm 1{,}225 = 0{,}225$$

$$\alpha = \mathbf{77^0}$$

$$x = R\left(1 - \cos 77 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin^2 77\right) = R\left(1 - 0{,}225 + \frac{1}{8}\cdot 0{,}974^2\right)$$
$$x = R\left(1 - 0{,}225 + \frac{1}{8}\cdot 0{,}95\right)$$
$$x = R\,(1 - 0{,}225 + 0{,}12)$$
$$x = R\,(1{,}12 - 0{,}225)$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}895\,R = 0{,}448\cdot 2\,R}$$

34. Nach welchem Kurbeldrehungswinkel, bzw. nach welchem Kolbenweg, ist die Kolbenbeschleunigung 6 mal so klein wie die in der Kolbentotlage? $\frac{r}{L} = \frac{1}{5}$

Auflösung: Bei $\alpha = 0$ ist $p = \frac{v^2}{R}\left(\cos 0 + \frac{1}{5}\cdot\cos 2\alpha\right)$

$$= \frac{v^2}{R}\cdot\left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}\cdot\frac{v^2}{R}$$

$$\frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha\right) = \frac{v^2}{5\,R} \quad \text{oder}$$
$$\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$$
$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 1$$
$$\cos^2\alpha + \frac{5}{2}\cos\alpha - 1 = 0$$
$$\cos\alpha = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + 1} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{41}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{6{,}4031}{4}$$
$$\cos\alpha = \frac{1{,}4031}{4} = 0{,}3508$$
$$\boldsymbol{\alpha = 69^0\,30'}$$
$$x = R\,(1 - 0{,}3508 + 0{,}1\cdot 0{,}937^2) = R\,(1 - 0{,}3508 + 0{,}088)$$
$$= R\,(1{,}088 - 0{,}351)$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}737\,R \sim 0{,}368\cdot 2\,R}$$

35. Wann wird der numerische Wert der Kolbenverzögerung bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ sechsmal so klein wie derjenige der Kolbenbeschleunigung in der Kolbentotlage?

Auflösung: $\frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha\right) = -\frac{1}{5}\cdot\frac{v^2}{R}$

$$\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$$
$$5\cos\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$$
$$5\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha + 1 = 0$$
$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$$
$$\cos\alpha = 0$$
$$\boldsymbol{\alpha = 90^0}$$
$$5 + 2\cos\alpha = 0$$

Der andere Wert $\cos\alpha = -\frac{5}{2}$ ist unbrauchbar.

§ 7. Der schiefe Wurf.

Ein unter einem bestimmten Winkel mit einer gewissen Geschwindigkeit geworfener Körper beschreibt unter Nichtberücksichtigung des Luftwiderstandes eine Kurve, deren konvexe Seite der Wurfrichtung und deren hohle Seite der Horizontalen zugewendet ist. Im folgenden sollen die Gesetze dieser Bewegung untersucht werden. Fig. 10.

Würde der Körper anfangs von keiner Kraft beeinflußt sein, so wäre seine Bewegung eine geradlinige, gleichförmige. Nun ist dies eben nicht der

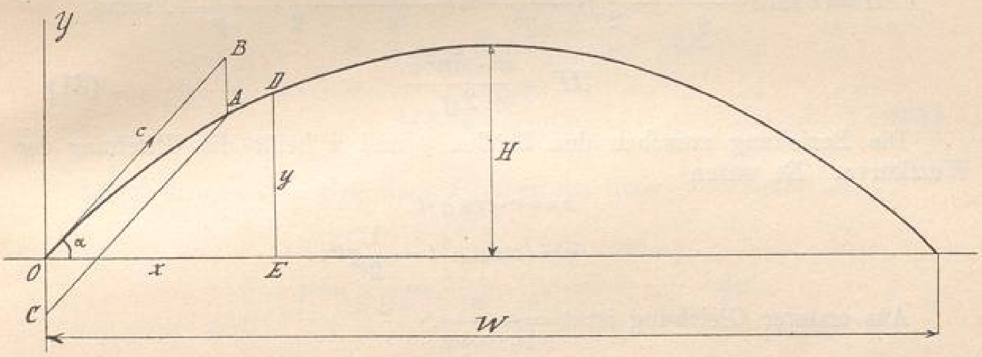

Fig. 10.

Fall. Nach der ersten Sekunde ist der Körper bereits durch die Schwerkraft von seiner Richtung um das Stück $\overline{BA}$ nach abwärts gezogen worden; er beschreibt den Weg $\overline{OA}$.

Behufs Vereinfachung der Betrachtung werde nun die Wurfbahn nicht mehr als Resultierende aus der gleichförmigen Bewegung in der Richtung $\overline{OB}$ und der freien Fallbewegung in der Richtung $\overline{OC}$ (gleich $\overline{BA}$), sondern als Resultierende aus der gleichförmigen Bewegung $\overline{OE}$ und der gleichförmig verzögerten $\overline{ED}$ angesehen.

Die Geschwindigkeit der Bewegung $\overline{OE}$ ist $c \cdot \cos \alpha$, die Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung $\overline{ED}$ ist $c \cdot \sin \alpha$.

Kommt nun der Körper in t Sekunden nach D, so sind seine Wege in horizontaler und vertikaler Richtung

$$x = c \cdot \cos \alpha \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

$$\text{und } y = c \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Die **Wurfzeit** ergibt sich aus der Erwägung, daß für sie $y = 0$ sein muß. Es muß also sein

$$c \sin \alpha \cdot t = \frac{1}{2} g t^2, \text{ woraus}$$

$$t = \frac{2 c \sin \alpha}{g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

wird. Wird dieser Wert in x eingesetzt, so ergibt sich die **Wurfweite**

$$W = c \cdot \cos\alpha \frac{2c \sin\alpha}{g} = \frac{c^2}{g} \cdot 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{W = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(30)}$$

Da $\sin 2\alpha = \sin[180 - 2\alpha]$ ist, folgt, daß die Wurfweiten bei den Wurfwinkeln α und $(90 - \alpha)$ gleich groß werden.

Die **Wurfhöhe** H folgt aus y, wenn man in dessen Gleichung für t den halben Wert aus (29) einsetzt.

$$H = c \sin\alpha \cdot \frac{c \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{c^2 \sin^2\alpha}{g^2} = \frac{c^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 \sin^2\alpha}{g}, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{H = \frac{c^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(31)}$$

Die Beziehung zwischen den Größen y und x heißt die Gleichung der Wurfkurve. Es waren

$$x = c \cdot \cos\alpha \cdot t$$
$$y = c \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Aus ersterer Gleichung ist $t = \dfrac{x}{c \cdot \cos\alpha}$.

Nach Substitution dieses Wertes in die Gleichung für y folgt dann

$$y = c \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{c \cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{c^2 \cos^2\alpha} = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 c^2 \cos^2\alpha} = x \operatorname{tg}\alpha \left[1 - \frac{x}{2 \frac{c^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha}\right]$$

$$y = x \operatorname{tg}\alpha \left(1 - \frac{x}{W}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Nun } W &= \frac{c^2}{g} \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha \\ H &= \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2\alpha \end{aligned}\right\} \frac{W}{H} = \frac{\frac{c^2}{2g} \sin^2\alpha}{\frac{c^2}{g} \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}\alpha$$

$$\text{Demnach } \operatorname{tg}\alpha = 4 \frac{H}{W}$$

Es wird also $y = x \operatorname{tg}\alpha \left(1 - \dfrac{x}{W}\right) = 4 \dfrac{H}{W} x \left(1 - \dfrac{x}{W}\right)$

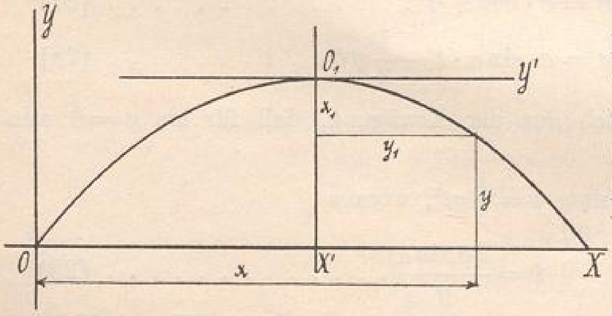

Fig. 11.

Diese Gleichung der Wurfkurve läßt deren Art nicht erkennen. Die Kurve werde deshalb auf die Achsen $\overline{O_1 X'}$ (Symetrieachse) und $\overline{O_1 Y'}$ (Scheiteltangente) bezogen, Dann ist zu setzen für

$$x = y_1 + \frac{W}{2}$$
$$y = H - x_1, \text{ Fig. 11.}$$

Es wird dann

$$y=(H-x_1)=4\,\frac{H}{W}\left(\frac{W}{2}+y_1\right)\cdot\left[1-\frac{\frac{W}{2}+y_1}{W}\right]$$

$$H-x_1=\frac{4\,H}{W^2}\cdot\left(\frac{W}{2}+y_1\right)\cdot\left(\frac{W}{2}-y_1\right)$$

$$H-x_1=\frac{4\,H}{W^2}\cdot\left(\frac{W^2}{4}-y_1^{\,2}\right)$$

$$H-x_1=H-\frac{4\,H}{W^2}\cdot y_1^{\,2}\quad\text{oder}$$

$$\boldsymbol{y_1^{\,2}=\frac{W^2}{4\,H}\cdot x_1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad\mathbf{(32)}$$

Diese Gleichung gehört einer Parabel an; deren Parameter ist

$$p=\frac{W^2}{8\,H}=\frac{\left(\frac{c^2}{g}\right)^2\cdot\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2}{8\,\frac{c^2}{2\,g}\sin^2\alpha}\quad\text{oder}$$

$$p=\frac{c^2}{g}\cdot\cos^2\alpha.$$

Beispiele.

36. Mit welcher Geschwindigkeit und mit welcher Elevation muß ein Projektil gegen die Spitze eines Turms, welcher 600 m entfernt und 246,84 m hoch ist, abgeschlossen werden, damit es dieselbe in 8,5 Sekunden erreiche? Fig. 12.

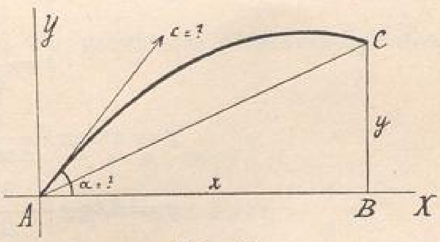

Fig. 12.

Auflösung:

$$x=c\cdot\cos\alpha\cdot t$$

$$y=c\cdot\sin\alpha\cdot t-{}^1/_2\,gt^2$$

$$600=8{,}5\cdot c\cos\alpha$$

$$246{,}84+0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 8{,}5^2=8{,}5\cdot c\cdot\sin\alpha$$

Durch Division beider Gleichungen wird

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{246{,}84+05\cdot 9{,}81\cdot 8{,}5^2}{600}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{246{,}84+353{,}16}{600}=1$$

$$\alpha=\mathbf{45^0}$$

Aus $x=8{,}5\cdot c\cdot\cos 45$ wird $c=\frac{600}{8{,}5\cdot 0{,}707}$, also

$$\boldsymbol{c\sim 100\ \mathrm{m}}$$

37. Unter welcher Elevation muß ein Körper geworfen werden, damit
a) die Wurfweite und Steighöhe gleich werden,
b) die Wurfweite viermal so groß werde wie die Steighöhe?

Auflösung:
$$W = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$
$$H = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha$$

a) $W = H \ldots \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha$
$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$
$$\operatorname{tg} \alpha = 4$$
$$\alpha = \mathbf{76^0}$$

b) $W = 4H \ldots \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha = 4 \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}$
$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$
$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$
$$\alpha = \mathbf{45^0}$$

38. Unter welchem Winkel gegen den Horizont muß ein Geschoß, welches eine Anfangsgeschwindigkeit c hat, abgeschossen werden, damit es die Spitze eines Turmes, welcher d Meter entfernt und h Meter hoch ist, treffe?

Auflösung:
$$x = c \cdot \cos \alpha \cdot t$$
$$y = c \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$t = \frac{x}{c \cos \alpha}$$
$$y = c \sin \alpha \cdot \frac{x}{c \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{c^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$
$$y = d \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{d^2}{c^2 \cdot \cos^2 \alpha} = h$$
$$h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g d^2}{2 c^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$
$$\frac{2 h c^2}{g d^2} = \frac{2 d c^2}{g d^2} \operatorname{tg} \alpha - 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$$
$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2 c^2}{g d} \operatorname{tg} \alpha + 1 + \frac{2 h c^2}{g d^2} = 0$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2}{g d} \pm \sqrt{\frac{c^4}{g^2 d^2} - 1 - \frac{2 h c^2}{g d^2}}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathbf{c^2 \pm \sqrt{c^2 (c^2 - 2 g h) - g^2 d^2}}}{\mathbf{g d}}$$

39. Zwei Körper werden mit gleicher Geschwindigkeit schief geworfen. Wie groß sind ihre Wurfwinkel, wenn die Steighöhe des ersten Körpers 4 mal so groß ist als die des zweiten?

Auflösung: Die Wurfwinkel betragen zusammen 90^0, also

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$$

$$\text{hierzu } \frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha_1 = 4\frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha_2$$

$$\sin^2\alpha_1 = 4\sin^2(90 - \alpha_1)$$

$$\sin\alpha_1 = 2\cos\alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 2$$

$$\alpha_1 = \mathbf{63^0\,30'}$$

$$\alpha_2 = \mathbf{26^0\,30'}$$

40. Eine Kanone wird auf die Spitze eines Turmes gerichtet. Der Schuß trifft in t Sekunden den Turm in der Horizontalebene durch die Kanone. Ein zweiter Schuß mit andrer Ladung und doppelter Elevation trifft die Spitze des Turms in t_1 Sekunden. Wie weit ist der Turm entfernt? Fig. 13.

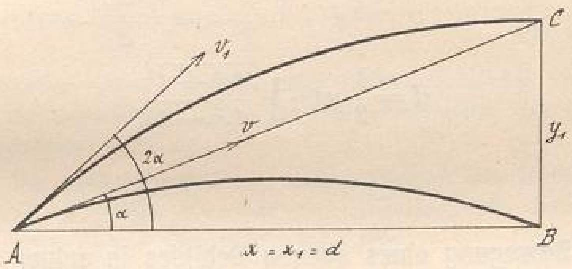

Fig. 13.

Auflösung: Es seien die unter α und 2α gerichteten Geschwindigkeiten v und v_1.

Dann gelten die Gleichungen:

$$x = v\cos\alpha\cdot t \qquad x_1 = v_1\cdot\cos 2\alpha\cdot t_1$$

$$y = v\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad y_1 = v_1\sin 2\alpha\cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} d &= v\cos\alpha\cdot t \\ \frac{1}{2}gt^2 &= v\cdot\sin\alpha\cdot t \end{aligned}\right\}\operatorname{tg}\alpha = \frac{gt^2}{2d}$$

Aus den beiden andern ebenso:

$$\left.\begin{aligned} d &= v_1\cos 2\alpha\cdot t_1 \\ y_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 &= v_1\sin 2\alpha\cdot t_1 \end{aligned}\right\}\operatorname{tg}2\alpha = \frac{y_1 + \frac{1}{2}gt_1^2}{d}$$

Da $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha}$ ist und ferner $y_1 = d\cdot\operatorname{tg}\alpha$ wird, folgt

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\dfrac{d \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} g t_1^2}{d}}{} = \frac{2\dfrac{gt^2}{2d}}{1 - \dfrac{g^2 t^4}{4d^2}}$$

$$\frac{d \cdot \dfrac{gt^2}{2d} + \dfrac{1}{2} g t_1^2}{d} = \frac{\dfrac{gt^2}{d}}{1 - \dfrac{g^2 t^4}{4d^2}}$$

$$\frac{\dfrac{1}{2}(t^2 + t_1^2)}{d} = \frac{\dfrac{t^2}{d}}{\dfrac{4d^2 - g^2 t^4}{4d^2}}$$

$$\frac{1}{2}(t^2 + t_1^2) \cdot (4d^2 - g^2 t^4) = 4 d^2 t^2 \quad \text{oder umgeformt}$$

$$4d^2 \left[\frac{t^2 + t_1^2}{2} - t^2\right] = \frac{t^2 + t_1^2}{2} g^2 t^4$$

$$4d^2 \cdot \frac{t_1^2 - t^2}{2} = \frac{t_1^2 + t^2}{2} g^2 t^4$$

$$\boldsymbol{d = \frac{1}{2} g t^2 \cdot \sqrt{\frac{t_1^2 + t^2}{t_1^2 - t^2}}}$$

§ 8. Bewegung eines ebenen Gebildes in seiner Ebene.

Gelangt eine Gerade $\overline{BC}$ in die Lage $\overline{B'C'}$, so kann man sie in dieselbe durch eine Drehung um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ gebracht denken. Fig. 14. Sind außer der beweglichen Geraden noch bestimmte Bahnlinien der Punkte B und C gegeben, z. B. irgend welche Kurven $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ und wählt man auf der Bahnlinie des Punktes B einen sehr nahe bei B gelegenen Punkt B', so findet man den Punkt C' leicht durch Abtragen der Länge $\overline{BC}$, so daß $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ ist. Konstruiert man nun in B eine Normale zur Kurve BB', in C eine solche zur Kurve CC', so schneiden sich beide in O. — Bei einer Drehung um O werden nun die von B und C beschriebenen Kreise um so mehr mit den wahren Bahnlinien BB' und CC' zusammenfallen, je kleiner BB' gewählt ist. Denkt man sich BB' unendlich klein und $\overline{BC}$ und $\overline{B'C'}$ als zwei unendlich nahbenachbarte Lagen der beweglichen Geraden, so kann man die unendlich kleine Bewegung der Geraden $\overline{BC}$ als mit einer Drehung um O übereinstimmend ansehen. Dieser Punkt O heißt deshalb **der augenblickliche Drehpunkt** oder **Momentanzentrum**, auch

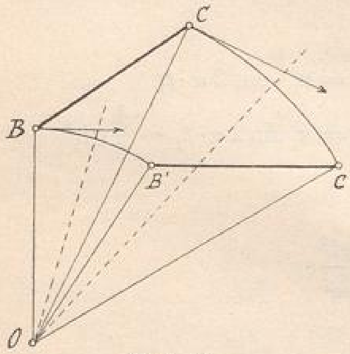

Fig. 14.

Pol für die bewegliche Gerade in der Lage BC. Derselbe ist also bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Geraden.

Die Aufsuchung des Poles für die Bewegung einer ebenen Figur gestattet, daß aus den Bewegungsrichtungen zweier Punkte und der Geschwindigkeit von einem derselben auch Bewegungsrichtungen und Geschwindigkeitsgrößen aller andern gefunden werden können. Sind z. B. die Bewegungsrichtungen von B und D, Fig. 15, bekannt, so liegt der Pol in O. — Zunächst findet man die Geschwindigkeitsrichtung von C normal zu $\overline{OC}$. — Die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte verhalten sich als momentane Umfangsgeschwindigkeiten in Kreisen wie ihre Achsabstände vom Pole. —

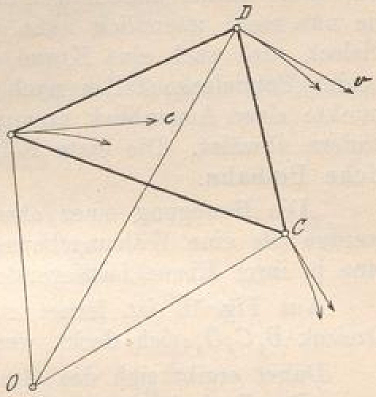

Fig. 15.

Es ist z. B.

$$v : c = \overline{OD} : \overline{OB}.$$

Sind die Richtungen von v und c und die Größe von c gegeben, dann folgt

$$v = c \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}.$$

Sind die Bahnen zweier Punkte des ebenen Gebildes einander parallel, so liegt der Pol in unendlicher Ferne und die Bewegung des ebenen Gebildes ist eine fortschreitende. —

Sucht man für einen 2., 3. . . . ., Lagenwechsel der Geraden $\overline{BC}$ die zugehörigen Pole auf, so erhält man als geometrischen Ort derselben ein Polygon, welches in eine Kurve übergeht, falls die benachbarten Lagen der Geraden $\overline{BC}$ unendlich nahe sind. Dieses Polygon heißt **Polvieleck** bzw. **Polbahn,** wenn es eine Kurve ist, Fig. 16.

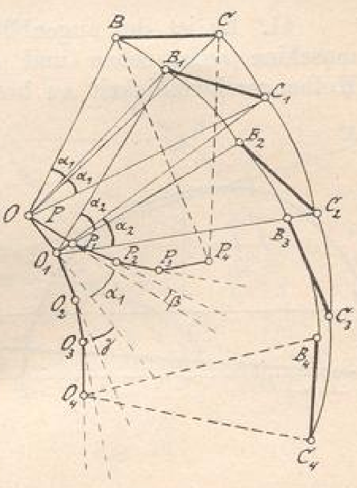
Fig. 16.

Die Drehung um den Pol O erfolgt um den Winkel α_1. — Um sie bequemer übersehen zu können, denke man sich eine Gerade $\overline{PP_1} = \overline{OO_1}$ fest mit der Geraden $\overline{BC}$ so verbunden, daß sie mit der letzteren den Winkel α_1 bildet. Dann wird bei der Drehung der Geraden $\overline{BC}$ in die Lage $\overline{B_1C_1}$ die Gerade $\overline{PP_1}$ nach $\overline{OO_1}$ kommen und somit die Bewegung von $\overline{BC}$ gerade ersetzen können.

Damit nun nach der Zurücklegung eines weiteren Drehungswinkels α_2 der Punkt P_2 auf O_2 falle, muß

$$\beta + \gamma = \alpha_2, \text{ also}$$
$$\beta = \alpha_2 - \gamma$$

gemacht werden. Hiernach steht der Punkt P_2 fest.

Wenn nun die Punkte P der Reihe nach mit den Punkten O in der beschriebenen Weise zusammenfallen, so führt das Vieleck $PP_1P_2 \ldots .$ offenbar eine Rollbewegung auf dem Vieleck $OO_1O_2 \ldots$ aus. — Die Folge dieser Rollbewegung ist dann, daß die bewegliche Figur $\overline{BC}$ der Reihe nach die vorgeschriebenen Lagen $\overline{B_1C_1}$, $\overline{B_2C_2} \ldots$ einnimmt.

Rücken die einzelnen Lagen der Geraden $\overline{BC}$ unendlich nahe, so ergibt, wie schon angeführt wurde, der geometrische Ort aller Pole die sogenannte Polbahn. Dabei nähern sich in den beiden Polvielecken die Eckpunkte, bis sie nur mehr unendlich nahe von einander entfernt sind. Das zweite Polvieleck wird auch eine Kurve. — Die gleich langen, unendlich kleinen Seiten beider Polvielecke fallen nach unendlich kleinen Drehungen um ihre Eckpunkte einen Augenblick zusammen, so daß das eine Polvieleck sich auf dem andern abwälzt. Die erste Polbahn heißt **feste Polbahn**, die zweite **bewegliche Polbahn**.

„Die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene kann also aufgefaßt werden als eine Wälzungsbewegung einer mit ihr verbundenen Polbahn um eine in ihrer Ebene festliegende Polbahn.“

Aus Fig. 16 ist ferner zu ersehen, daß das Dreieck BCP_4 mit dem Dreieck $B_4C_4O_4$ sich deckt, wenn der Pol P_4 mit dem Pol O_4 zusammenfällt.

Daher ergibt sich das Gesetz:

„Das Dreieck, dessen Grundlinie die Endlage der bewegten Geraden und dessen Spitze der Endpunkt der festen Polbahn ist, ist kongruent jenem Dreiecke, welches als Grundlinie die Anfangslage der bewegten Geraden und als Spitze den Endpunkt der beweglichen Polbahn hat.“

Mit Hilfe dieses Gesetzes können aus den Lagen einer bewegten Geraden die Polbahnen konstruiert werden.

Beispiele.

41. Es ist der augenblickliche Drehpunkt der Schubstange einer Dampfmaschine aufzusuchen und hierauf mit Hilfe derselben die augenblickliche Kolbengeschwindigkeit zu bestimmen. Fig. 17.

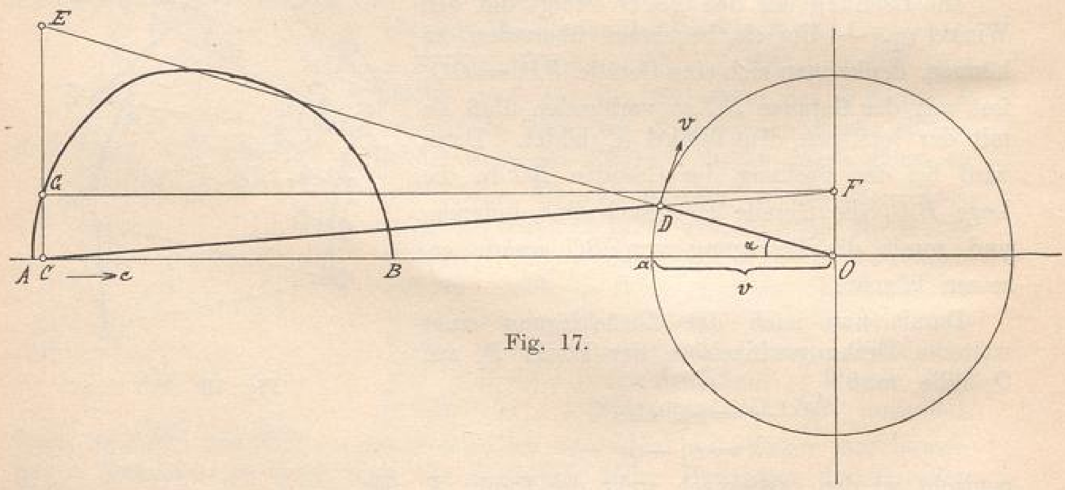

Fig. 17.

Auflösung: Beim Kurbeldrehungswinkel α ist die Lage der Schubstange $\overline{CD}$. — Der Schnittpunkt der Normalen auf die Geschwindigkeitsrichtungen in C und D ergibt den momentanen Drehpunkt der Schubstange E. — Daher verhält sich

$$c : v = \overline{CE} : \overline{ED}$$

oder wegen

$$\triangle CED \sim \triangle ODF$$

$$c : v = \overline{OF} : \overline{OD}$$

Wird der Kurbelkreishalbmesser $\overline{aO} = v$ gemacht, dann wird

$$c : v = \overline{OF} : v$$

d. h. $\overline{OF}$ ist sofort die Größe der Kolbengeschwindigkeit. Werden alle Kolbengeschwindigkeiten als Ordinaten in den Endpunkten der zugehörigen Kolbenwage aufgetragen, dann erhält man die **Kolbengeschwindigkeitskurve** AGB.

42. Es ist jener Punkt der Stange $\overline{BC}$ anzugeben, welcher bei einer unendlich kleinen Verrückung derselben sich horizontal bewegt. Fig. 18.

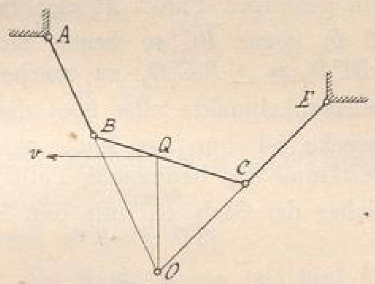

Fig. 18.

Auflösung. Der Pol für die skizzierten Lagen der Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{EC}$ ist O. Es wird sich nun jener Punkt Q von $\overline{BC}$ bei einer unendlich kleinen Verrückung dieser Stange horizontal bewegen, dessen Polstrahl vertikal ist. Punkt Q ist demnach bestimmt.

43. Eine Gerade $\overline{BC}$ bewegt sich mit ihren Endpunkten in den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, Fig. 19. Welche Kurve beschreibt irgend ein Punkt D der Geraden und was für Kurven sind die feste und die bewegliche Polbahn?

Auflösung. ad a) Der Punkt D der Geraden habe von C den Abstand a und von B den Abstand b — seine Koordinaten seien x und y. Ist in der gezeichneten Lage der Geraden deren Winkel mit der X-Achse α, dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cos \alpha \\ y = b \sin \alpha \end{array}\right\} \text{oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = \cos \alpha \\ \dfrac{y}{b} = \sin \alpha \end{array}\right\} \text{somit}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

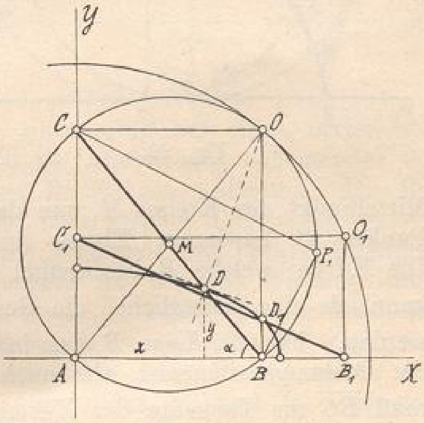

Fig. 19.

d. h. der Punkt beschreibt eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der X- und Y-Achse ist. Die Halbachsen der Ellipse sind a und b.

ad b) Für die Lage $\overline{BC}$ der Geraden liegt der Pol in O. Da er der 4. Eckpunkt eines Parallelogramms wird, ist sein Abstand vom Achsenschnittpunkt (vom Ursprung des Koordinatensystems) gleich $(a + b)$ — für jede andere Lage der Geraden ist letzterer ebenfalls $(a + b)$, so daß die feste

Polbahn sich als ein Kreis ergibt, dessen Mittelpunkt mit dem Achsenschnittpunkt zusammenfällt und dessen Radius $(a + b)$ ist. Die Verbindungslinie von D mit dem Pole O, der Polstrahl $\overline{DO}$, muß nun senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung von D stehen, woraus folgt, daß die Tangente an die Ellipse in D senkrecht zum Polstrahl $\overline{OD}$ ist. Die Ellipse kann demnach als eine die Senkrechte zu den Polstrahlen tangierende Kurve konstruiert werden.

ad c) Für die Lage $\overline{BC}$ der bewegten Geraden liegt der feste Pol in O, für die Lage $\overline{B_1C_1}$ in O_1. Um nun den zu dem Punkte O_1 der festen Polbahn gehörigen Punkt P_1 der beweglichen zu finden, ist nur zu bedenken, daß P_1 gegen $\overline{BC}$ so liegen muß wie O_1 gegen $\overline{B_1C_1}$. Man hat also nur $\triangle BCP_1 \cong \triangle B_1C_1O_1$ zu machen, so daß P_1 bestimmt ist. Der Ort der Rechtwinkelpunkte aller über der Hypotenuse $\overline{BC}$ gezeichneten rechtwinkligen Dreiecke ist nun ein Kreis mit dem Durchmesser $\overline{BC} = (a + b)$. Dieser Kreis muß die bewegliche Polbahn sein. Die gegebene Bewegung also, bei welcher der Stab $\overline{BC}$ mit den Punkten B und C den Achsen $\overline{AX}$ und $\overline{AY}$ folgt, kann auch bewirkt werden durch eine Kolbenbewegung des kleineren Kreises mit dem Durchmesser $\overline{BC}$ auf dem inneren Umfange des größeren Kreises mit dem Halbmesser $\overline{BC}$.

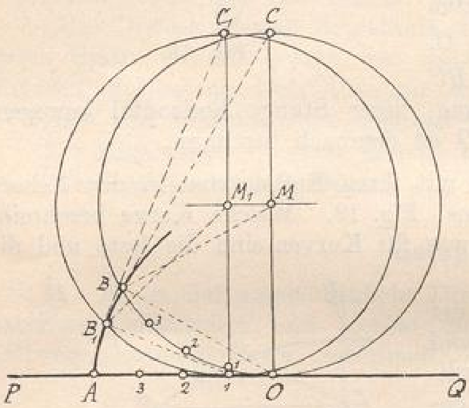

Fig. 20.

44. Welche Bewegung macht der Punkt B des Kreises OBC, Fig. 20, wenn letzterer sich auf der Geraden $\overline{PQ}$, die er in O berührt, abwälzt?

Auflösung. Der Bogen OB werde in eine bestimmte Zahl gleicher Teile, z. B. in 4 gleiche Teile geteilt. Kommt 1 des Kreises mit der Geraden in Berührung, dann ist der sich bewegende Punkt von 1 um $\overline{1B}$ und vom Mittelpunkt des Kreises M_1 um dessen Radius entfernt. So ist die Lage des Punktes B_1 bestimmt. Ebenso findet man leicht alle anderen Lagen von B. Die Kurve, welche B beschreibt, heißt gemeine Zykloide. Der Kreis OBC kann als eine bewegliche, die Gerade $\overline{PQ}$ als eine feste Polbahn aufgefaßt werden. Für die Lage B des bewegten Punktes ist O der Pol, daher $\overline{OB}$ der Drehungshalbmesser, also auch die Normale der Zykloide in B. Folglich muß $\overline{BC}$ die Tangente der Zykloide in B sein. Die analytische Geometrie beweist mit Hilfe der Rechnung, was hier durch die einfache Betrachtung sich so leicht ergeben hat.