



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Die Mechanik fester Körper**

**Blau, Ernst**

**Hannover, 1905**

Zweiter Abschnitt. Die Statik.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76868](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76868)

## Zweiter Abschnitt.

### Die Statik.

#### § 9. Zusammensetzung zweier Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkt. Das Gesetz vom Kräfteparallelogramm.

##### Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte.

Wirkt eine Kraft auf einen Punkt mit der Masse  $m$ , so gilt laut Einleitung  $P = m \cdot p$ . Da die Beschleunigung durch eine Strecke darstellbar ist, wird auch die ihr proportionale Kraft durch eine Strecke dargestellt werden können, deren Richtung und Länge Richtung und Größe (Intensität) der Kraft angeben.

Ist ein materieller Punkt dem Einflusse der in der Richtung  $\overline{OA}$ , Fig. 21, wirkenden Kraft unterworfen, so erhält er in derselben die Beschleunigung  $p = \frac{P}{m}$ , deren Größe also durch den  $m$ -ten Teil der Zahl von Einheiten von  $P$  dargestellt ist.

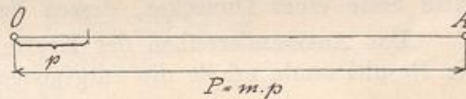


Fig. 21.

Wirken nun zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  gleichzeitig auf einen materiellen Punkt von der Masse  $m$  ein, so erzeugen sie unabhängig voneinander die Beschleunigungen  $p_1$  und  $p_2$ , die in ihren Richtungen auftreten. Die Beschleunigung  $p$ , mit welcher sich der Punkt aber wirklich fortbewegt, ist die Resultierende aus  $p_1$  und  $p_2$ , d. h.  $p$  ist die Diagonale des Parallelogrammes aus demselben, Fig. 22. Diese Beschleunigung ist nun die Wirkung einer **resultierenden Kraft** oder **Mittelkraft**  $P = m \cdot p$ , welche in der Richtung von  $p$  liegt und somit auch die Diagonale eines Parallelogramms wird, das aus den Kräften  $P_1$  und  $P_2$ , den **Seitenkräften** oder **Komponenten** zusammengesetzt ist. Das muß sein, weil die durch  $P_1$  und  $P_2$  erzeugten Bewegungen gleichartige, nämlich gleichförmig beschleunigte, sind, weshalb die resultierende Bewegung eine gradlinige ist.

„Dieses Gesetz wird das **Gesetz vom Kräfteparallelogramm** genannt.“

Fallen die Richtungslinien beider Kräfte zusammen, so ist die Resultierende gleich deren Summe, wenn die ersteren gleich gerichtet und gleich deren Differenz, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind. In letzterem Falle wird die Resultierende Null, wenn die Kräfte gleich groß sind. Man nennt solche Kräfte **entgegengesetzt gleiche Kräfte**.

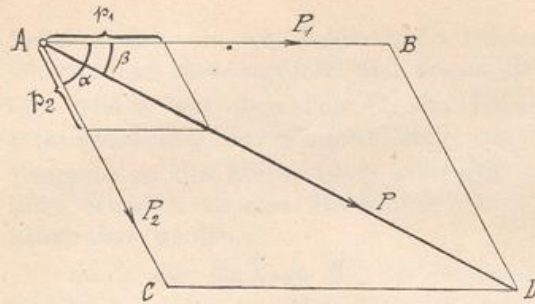


Fig. 22.

Wie nun zwei Kräfte zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden können, so kann auch eine Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, wenn  $\alpha$ ) deren Richtungen bekannt,  $\beta$ ) wenn Richtung und Größe der einen Seitenkraft gegeben sind.

Die Größe der Mittelkraft aus zwei Seitenkräften, die miteinander den Winkel  $\alpha$  bilden, bestimmt sich rechnerisch laut Carnotschem Satz aus dem  $\triangle ABD$ , Fig. 22, mit

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha} \dots \dots \dots (33)$$

Heißt der Winkel der Resultierenden  $P$  mit der einen Seitenkraft  $P_1 \dots \beta$ , so gilt  $\sin \triangle ABD$  laut Sinussatz

$$P_2 : P = \sin \beta : \sin (180 - \alpha),$$

daher

$$\sin \beta = \frac{P_2}{P} \sin \alpha \dots \dots \dots (34)$$

so daß auch die Richtung von  $P$  rechnerisch festgelegt ist.

Statt des Kräfteparallelogrammes braucht man nur behufs Auffindung der Resultierenden das sogenannte **Kräftedreieck**  $ABD$  zu konstruieren, so daß man auch sagen kann:

„Die Resultierende zweier Kräfte mit demselben Angriffspunkt ist die dritte Seite eines Dreieckes, dessen beide anderen die Komponenten sind.“

„Das Aneinanderreihen der Kräfte muß in demselben Pfeilsinn erfolgen. Die Resultierende erhält die entgegengesetzte Pfeilrichtung.“

**Beispiele.**

45. Zwei horizontale, zueinander senkrechte Kräfte  $P_1 = 12 \text{ kg}$  und  $P_2 = 16 \text{ kg}$  wirken auf einen Punkt. Wie groß und wie gerichtet ist ihre Resultierende?

Auflösung:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400}$$

$$R = 20 \text{ kg}$$

Schließt die Resultierende mit  $P_1$  den Winkel  $\beta$  ein, so gilt

$$P_1 = R \cos \beta,$$

woraus

$$\cos \beta = \frac{P_1}{R} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ ist}$$

$$\beta = 53^\circ 10'$$

46. Auf einem Punkt  $A$  wirken zwei Kräfte  $P_1 = 400 \text{ kg}$  und  $P_2 = 600 \text{ kg}$  unter einem Winkel  $\alpha = 40^\circ 35'$ . Wie groß ist die diesen beiden Kräften das Gleichgewicht haltende Kraft und welche Richtung hat sie?

Auflösung:

$$R = \sqrt{400^2 + 600^2 + 2 \cdot 400 \cdot 600 \cdot \cos 40^\circ 35'}$$

$$R = \sqrt{160000 + 360000 + 480000 \cdot 0,759}$$

$$R = \sqrt{160000 + 360000 + 364000} = \sqrt{884000}$$

$$R \sim 940 \text{ kg}$$

$$\sin \beta = \frac{P_2}{R} \sin \alpha$$

$$= \frac{600}{940} \cdot 0,65 \sim 0,415$$

$$\beta = 24^\circ 30'$$

47. Ein  $G$  kg schwerer Körper liegt auf einer schiefen Ebene, welche mit dem Horizonte den Winkel  $\alpha$  bildet. Wie groß ist der Normaldruck auf die schiefe Ebene und wie groß ist die Kraft, welche den Körper von ihr herunterbewegt?

Auflösung: Entwirft man eine Figur, so wird ersichtlich, daß das Gewicht des Körpers und der Normaldruck  $N$  auf die schiefe Ebene den Winkel  $\alpha$  bilden. Daher wird

$$N = G \cos \alpha$$

Ebenso findet man leicht die bewegende Komponente mit

$$P = G \cdot \sin \alpha$$

48. Welchen Normaldruck  $N$  erleidet eine wagerechte Ebene durch einen 500 kg schweren Körper, wenn an letzterem eine Kraft von 320 kg unter einem Winkel von  $\alpha = 60^\circ$  gegen den Horizont aufwärts wirkt?

Auflösung: Die Vertikalkomponente  $V$  von 320 kg ist

$$V = 320 \cdot \sin 60^\circ = 320 \cdot 0,87$$

$$V \sim 278 \text{ kg}$$

Daher ergibt sich der Normaldruck auf die Unterlage

$$N = 500 - 278$$

$$N = 222 \text{ kg}$$

49. Eine Dampfmaschine hat den Zylinderdurchmesser  $D = 350$  mm und arbeitet mit einem größten Dampfüberdrucke von 6 Atm. — Wie groß sind die Drücke in der Schubstange und auf den Kreuzkopf in dem Momente, in welchem erstere senkrecht zur Kurbel steht?

Auflösung: Der Druck auf den Kolben ist  $\frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot 6 = 5750$  kg. Heißt der Winkel, welchen Kolbenstange und Schubstange einschließen,  $\alpha$ , so ist

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{5} \sim 0,2, \text{ somit } \alpha = 11^\circ 18'$$

Der Druck in der Schubstange wird

$$S = \frac{5750}{\cos \alpha} = \frac{5750}{0,98}$$

$$S = 5880 \text{ kg}$$

Der Druck auf den Kreuzkopf ergibt sich mit  $K = 5750 \cdot \text{tg } \alpha$

$$K = 1150 \text{ kg}$$

50. Eine Kugel liegt auf zwei schiefen Ebenen, welche mit dem Horizonte die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  bilden und welche sich in einer Horizontalen schneiden. Welche Drücke empfangen die schiefen Ebenen? Fig. 23.

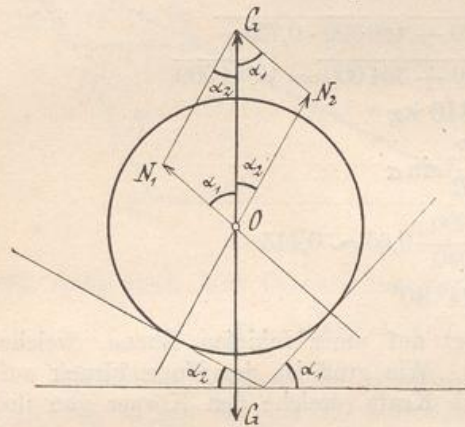


Fig. 23.

Auflösung: Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Resultierende aus den Gegendrücken der schiefen Ebenen entgegengesetzt gleich  $G$  ist. Es wird

$$N_1 : G = \sin \alpha_2 : \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$N_1 = G \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$N_2 : G = \sin \alpha_1 : \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$N_2 = G \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

51. Zwei Kugeln mit den Gewichten  $G$  und  $G'$  stützen sich gegen zwei mit der Horizontalebene die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha'$  bildende Ebenen. Welchen Winkel schließt die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte mit der Horizontalen ein, wenn sie im Gleichgewichte sind? Fig. 24.

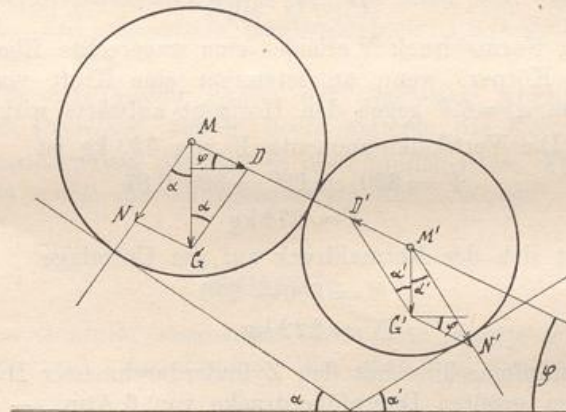


Fig. 24.

Auflösung: Soll Gleichgewicht bestehen, so müssen die Komponenten  $D$  und  $D'$  gleich sein.

$$\text{Aus } \triangle GMD \dots D : G = \sin \alpha : \sin [90 - (\alpha - \varphi)]$$

$$D = G \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha - \varphi)}$$

$$\text{Aus } \triangle G'M'N' \dots D' : G' = \sin \alpha' : \sin [180 - \alpha' - (90 + \varphi)]$$

$$D' = G' \frac{\sin \alpha'}{\cos (\alpha' + \varphi)}$$

$$\text{Daher } G \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha - \varphi)} = G' \frac{\sin \alpha'}{\cos (\alpha' + \varphi)} \text{ oder}$$

$$\begin{aligned}
 G \sin \alpha \cos \alpha' \cos \varphi - G \sin \alpha \sin \alpha' \sin \varphi &= G' \sin \alpha' \cos \alpha \cos \varphi + G' \sin \alpha \sin \alpha' \sin \varphi \\
 G \sin \alpha \cos \alpha' - G \cdot \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha \sin \alpha' &= G' \sin \alpha' \cdot \cos \alpha + G' \cdot \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha \cdot \sin \alpha' \\
 \operatorname{tg} \varphi \cdot [G' \sin \alpha \cdot \sin \alpha' + G \sin \alpha \sin \alpha'] &= G \sin \alpha \cos \alpha' - G' \sin \alpha' \cos \alpha \\
 \operatorname{tg} \varphi &= \frac{G \sin \alpha \cos \alpha' - G' \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin \alpha \sin \alpha' \cdot (G + G')} \\
 \operatorname{tg} \varphi &= \frac{G \cot \alpha' - G' \cot \alpha}{G + G'}
 \end{aligned}$$

52. Auf zwei gleich schwere Scheiben mit dem Gewichte  $G$  kg, welche an gleich langen Fäden hängen und sich gegen eine Vertikalwand stützen, wird eine dritte ebensolche Scheibe gelegt. Wann herrscht Gleichgewicht?  
Fig. 25.

Auflösung. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Komponenten  $N_1$  der ersten beiden Kräfte  $G$  gleich sind mit den Komponenten  $N_2$  des dritten Gewichtes.

Die Gleichgewichtsbedingung wird eine Beziehung der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  enthalten.

Laut Figur ist

$$\gamma = 180 - (180 - \beta) - \alpha = \beta - \alpha.$$

Im schraffierten Dreiecke gilt

$$N_1 : G = \sin \alpha : \sin (\beta - \alpha)$$

$$N_1 = G \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}$$

ferner wird  $N_2 \cos \beta = \frac{G}{2}$ , daher

$$N_2 = \frac{G}{2 \cos \beta}$$

Demnach

$$G \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} = \frac{G}{2 \cos \beta}$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin \beta \cos \alpha = 3 \sin \alpha \cos \beta.$$

Werden beide Seiten der Gleichung durch  $\cos \alpha \cos \beta$  dividiert, dann ergibt sich

$$\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha$$

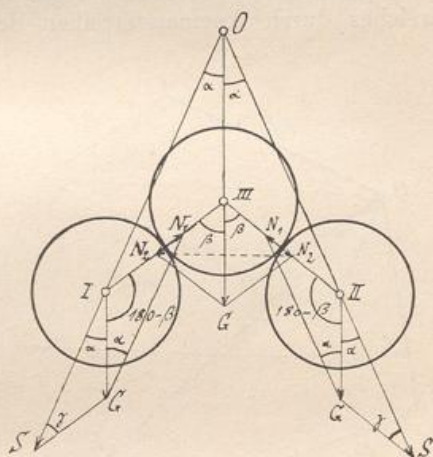


Fig. 25.

### § 10. Zusammensetzung mehrerer Kräfte mit demselben Angriffspunkt. Das Kräftepolygon.

Sollen mehrere Kräfte mit demselben Angriffspunkt zusammengesetzt werden, so bildet man zunächst die Resultierende aus zwei beliebigen dieser Kräfte, setzt letztere mit der dritten Kraft wieder zu einer Resultierenden zusammen usw. Dies ist in Fig. 26 durchgeführt.

Zu demselben Ziele gelangt man auch wieder durch Anwendung der Kräfte dreiecke 0, 1, 2, 0, 2, 3, 0, 3, 4 . . . . Dabei ist es nicht einmal nötig, die einzelnen Teilresultierenden verzeichnen zu müssen.

Die Gesamtresultierende ergibt sich als Schlußlinie eines Polygons 0, 1, 2, 3, 4, 0, welches durch Aneinanderreihen der Seitenkräfte nach Größe und Richtung

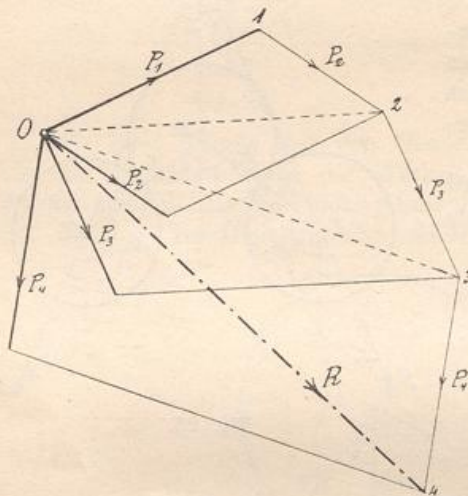


Fig. 26.

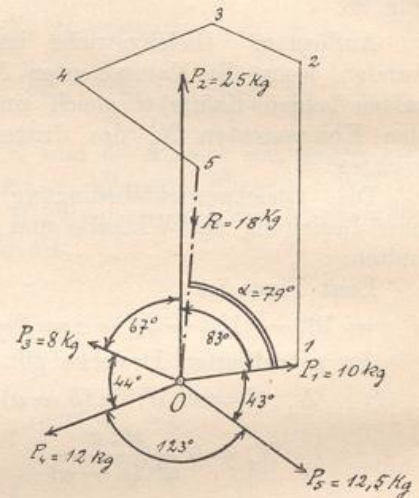


Fig. 27.

gebildet wird. Man nennt dieses Polygon das **Kräftepolygon**. Die Folge, in welcher die Seitenkräfte aneinander gereiht werden, ist gleichgültig. Der Pfeilsinn der Resultierenden ist demjenigen der Komponenten entgegengesetzt.

**Folgerung.** Ist das Kräftepolygon geschlossen, so ist die Resultierende Null. Die vorhandenen Kräfte halten sich das Gleichgewicht.

#### Beispiele.

53. In einem Punkte greifen 5 Kräfte  $P_1 = 10$  kg,  $P_2 = 25$  kg,  $P_3 = 8$  kg,  $P_4 = 12$  kg und  $P_5 = 12,5$  kg an, Fig. 27. — Wie groß ist die Resultierende der Kräfte und welche Richtung hat sie?

**Auflösung.** Die Kräfte werden nach Größe und Richtung aneinander gereiht. Die Resultierende ist **18 kg** und schließt mit  $P_1$  den Winkel  $\alpha = 79^\circ$  ein.

54. Zwei Kräfte  $P_1 = 15$  kg und  $P_2 = 10$  kg schließen einen Winkel  $\alpha = 60^\circ$  ein. — Wie ist in ihrem Angriffspunkte eine dritte Kraft  $P_3$  anzubringen, damit derselbe im Gleichgewichte sei und welche Größe hat  $P_3$ ? Die Aufgabe ist rechnerisch zu lösen.

Auflösung: Die Resultierende von  $P_1$  und  $P_2$  ist

$$R = \sqrt{15^2 + 10^2 + 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 60} + \sqrt{225 + 100 + 300 \cdot 0,5}$$

$$R \sim 21,8 \text{ kg}$$

Die Größe von  $P_3$  ergibt sich mit  $P_3 = R = 21,8 \text{ kg}$ . —  $P_3$  ist  $R$  entgegengerichtet. Heißt der Winkel, den  $R$  mit  $P_1$  einschließt,  $\beta$ , dann wird

$$\sin \beta = \frac{P_2}{R} \sin \alpha = \frac{10 \cdot 0,87}{21,8} = 0,4$$

$$\beta = 23^\circ 30'$$

Da  $P_3$  mit  $R$  einen Winkel von  $180^\circ$  und  $R$  mit  $P_2$  einen Winkel von  $36^\circ 30'$  bildet, ist  $\sphericalangle (P_3, P_2) = 180^\circ - 23^\circ 30'$ , d. h.

$$\sphericalangle (P_3, P_2) = 156^\circ 30'$$

## § II. Zusammensetzung mehrerer Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte nach vorhergegangener Zerlegung derselben in Horizontal- und Vertikalkomponenten.

Die in vorigem Paragraphen gezeigte rechnerische Ermittlung der Größe der Gesamterresultierenden mehrerer in demselben Punkte angreifenden Kräfte würde wegen der oftmals nacheinander notwendigen Anwendung des Carnot-

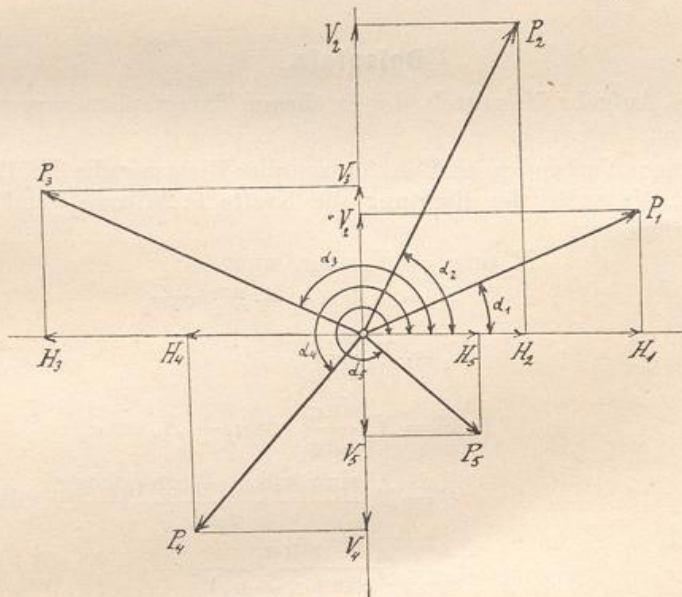


Fig. 28.

schen Satzes umständlich sein. Die graphische Auffindung der Resultierenden andererseits ist ungenau.

Es empfiehlt sich daher zur Auffindung der Resultierenden folgender einfacher Weg (Aufsuchung der Resultierenden nach vorhergegangener Zerlegung der Kräfte in Horizontal- und Vertikalkomponenten).

Man zerlegt alle Kräfte, siehe Fig. 28, in zwei aufeinander senkrecht



stehenden Richtungen in Komponenten  $H_1, H_2, \dots$  und  $V_1, V_2, \dots$ .  
Dadurch ergibt sich in der einen, z. B. horizontalen Richtung die Teilresultierende

$$H_1 + H_2 + \dots = \Sigma(H)$$

und in der anderen, z. B. vertikalen, die Teilresultierende

$$V_1 + V_2 + \dots = \Sigma(V)$$

Hierbei sind  $H_1 = P_1 \cos \alpha_1$ ,  $H_2 = P_2 \cos \alpha_2, \dots$  und  
 $V_1 = P_1 \sin \alpha_1$ ,  $V_2 = P_2 \sin \alpha_2, \dots$

Aus  $\Sigma(H)$  und  $\Sigma(V)$  findet sich einfach die Gesamtresultierende mit

$$R = \sqrt{[\Sigma(H)]^2 + [\Sigma(V)]^2} \dots \dots \dots (35)$$

Werden die Winkel, welche  $R$  mit  $\Sigma(H)$ , bzw. mit  $\Sigma(V)$ , bildet,  $\alpha$  und  $\beta$  genannt, so folgen:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\Sigma(H)}{R} \\ \cos \beta &= \frac{\Sigma(V)}{R} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

Sollen sich aber die Kräfte das Gleichgewicht halten, so müssen die beiden Beziehungen gelten:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(H) &= 0 \\ \Sigma(V) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

### Beispiele.

55. Die Aufgabe 50 mittels der in diesem Paragraphen angegebenen Methode zu lösen.

Auflösung: Vorhanden sind in horizontaler Richtung die Kräfte  $N_1 \sin \alpha_1$  und  $N_2 \sin \alpha_2$ , in vertikaler Richtung die Kräfte  $G, N_1 \cos \alpha_1$  und  $N_2 \cos \alpha_2$ . — Es muß nun sein

$$\begin{aligned} N_1 \sin \alpha_1 &= N_2 \sin \alpha_2 \quad \text{und} \\ G &= N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 \\ N_1 &= N_2 \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \\ G &= N_2 \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 \\ G &= N_2 \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1}, \quad \text{daher} \\ N_2 &= G \frac{\sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \\ N_1 &= G \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \end{aligned}$$

56. Die Aufgabe 53 ist ebenfalls mittels der an diesem Paragraphen angegebenen Methode zu lösen.

Auflösung: Werden durch den Angriffspunkt der Kräfte zwei aufeinander senkrechte Achsen gelegt, von denen die eine mit  $P_1$  zusammenfallen möge, dann sind vorhanden

a) In horizontaler Richtung die Kräftekomponenten

$$P_1, P_2 \cos 83^\circ, P_3 \cos 150^\circ, P_4 \cos 194^\circ, P_5 \cos 317^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Dann wird } \Sigma(H) &= P_1 + P_2 \cos 83^\circ - P_3 \cos 30^\circ - P_4 \cos 14^\circ + P_5 \cos 43^\circ \\ &= 10 + 25 \cdot 0,122 - 8 \cdot 0,866 - 12 \cdot 0,97 + 12,5 \cdot 0,73 \\ &= 10 + 3,05 - 6,928 - 11,64 + 9,125 \end{aligned}$$

$$\Sigma(H) = 3,6 \text{ kg}$$

b) In vertikaler Richtung ist ebenso

$$\begin{aligned} \Sigma(V) &= P_1 \sin 0^\circ + P_2 \sin 83^\circ + P_3 \sin 150^\circ + P_4 \sin 194^\circ + P_5 \sin 317^\circ \\ &= 0 + 25 \cdot \sin 83^\circ + 8 \cdot \sin 30^\circ - 12 \sin 14^\circ - 12,5 \cdot \sin 43^\circ \\ &= 0 + 25 \cdot 0,993 + 8 \cdot 0,5 - 12 \cdot 0,242 - 12,5 \cdot 0,682 \end{aligned}$$

$$\Sigma(V) = 17,35 \text{ kg}$$

$$R = \sqrt{[\Sigma(H)]^2 + [\Sigma(V)]^2} = \sqrt{13 + 302} = \sqrt{315}$$

$$R \sim 18 \text{ kg}$$

Da  $\Sigma(H)$  und  $\Sigma(V)$  positiv sind, liegt der Winkel  $(R, P_1)$  im ersten Quadranten.

$$\cos \alpha = \frac{\Sigma(H)}{R} = \frac{3,6}{18} = \frac{0,6}{3} \sim 0,2$$

$$\alpha \sim 79^\circ$$

57. Auf einen Punkt wirken die fünf Kräfte  $P_1 = 5 \text{ kg}$ ,  $P_2 = 15 \text{ kg}$ ,  $P_3 = 12 \text{ kg}$ ,  $P_4 = 17 \text{ kg}$  und  $P_5 = 10 \text{ kg}$ . — Die Kräfte schließen je miteinander den Winkel  $60^\circ$  ein. Man ermittle nach der in diesem Paragraphen angegebenen Methode Größe und Richtung der Resultierenden.

Auflösung: Es ist

$$\begin{aligned} \Sigma(H) &= 5 + 15 \cdot \cos 60^\circ + 12 \cdot \cos 120^\circ + 17 \cdot \cos 180^\circ + 10 \cdot \cos 240^\circ \\ &= 5 + 15 \cdot 0,5 - 12 \cdot \cos 60^\circ + 17 \cdot (-1) - 10 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 5 + 7,5 - 22 \cdot 0,5 - 17 = 12,5 - 28 \\ \Sigma(H) &= -15,5 \text{ kg} \end{aligned}$$

Ebenso wird

$$\begin{aligned} \Sigma(V) &= 5 \cdot \sin 0^\circ + 15 \cdot \sin 60^\circ + 12 \cdot \sin 120^\circ + 17 \cdot \sin 180^\circ + 10 \cdot \sin 240^\circ \\ &= 0 + 15 \cdot \sin 60^\circ + 12 \sin 60^\circ + 17 \cdot 0 - 10 \cdot \sin 60^\circ \\ &= 17 \cdot \sin 60^\circ = 17 \cdot 0,866 \end{aligned}$$

$$\Sigma(V) = +14,7 \text{ kg}$$

Resultierende und ihr Winkel mit  $P_1$  liegen im zweiten Quadranten.

$$R = \sqrt{(-15,5)^2 + 14,7^2} = \sqrt{240 + 216} = \sqrt{456}$$

$$R \sim 21,6 \text{ kg}$$

$$\cos \alpha = \frac{\Sigma(H)}{R} = \frac{-15,5}{21,6} = -0,717$$

$$\alpha = 180^\circ - 44^\circ 10'$$

$$\alpha \sim 135^\circ 50'$$

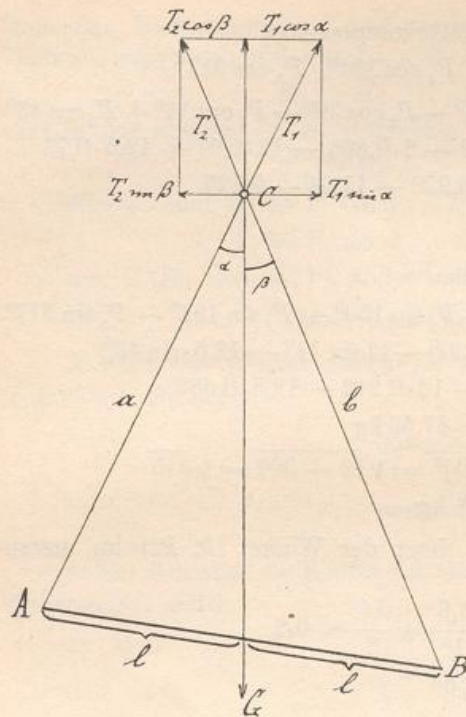


Fig. 29.

58. Ein Stab ist an seinen Enden durch zwei verschieden lange Fäden, die von einem festen Punkte ausgehen und  $a$  und  $b$  lang sind, aufgehängt. Welche Spannungen sind in den Fäden vorhanden, wenn der Stab die Länge  $2l$  und das Gewicht  $G$  hat? Fig. 29.

Auflösung:

$$\Sigma(H) = 0 \dots T_1 \sin \alpha = T_2 \sin \beta$$

$$\Sigma(V) = 0 \dots G = T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta.$$

Da  $G$  durch den Schnitt von  $a$  und  $b$  hindurchgehen muß, damit zwischen  $T_1$ ,  $T_2$  und  $G$  Gleichgewicht bestehe, muß sein

$$a \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \beta, \text{ d. h.}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{b}{a}$$

$$\text{Somit } G = T_1 \cos \alpha + T_1 \cdot \frac{b}{a} \cos \beta$$

$$= T_1 \cdot \frac{a \cos \alpha + b \cos \beta}{a}$$

$$\text{Aus } \triangle ABC \text{ ergibt sich } \dots a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \beta) = 4l^2$$

$$\text{Hierzu } \dots T_1^2 (a \cos \alpha + b \cos \beta)^2 = a^2 G^2$$

Durch Ausführung der letzteren Gleichungen resultieren

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \cos \beta + 2ab \sin \alpha \sin \beta = 4l^2 \dots \dots \dots (\alpha)$$

$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + 2ab \cos \alpha \cos \beta = \frac{a^2 G^2}{T_1^2} \text{ oder}$$

$$a^2 - a^2 \sin^2 \alpha + b^2 - b^2 \sin^2 \beta + 2ab \cos \alpha \cos \beta = \frac{a^2 G^2}{T_1^2} \dots \dots \dots (\beta)$$

Werden Gleichungen  $(\alpha)$  und  $(\beta)$  addiert, so wird

$$\frac{a^2 G^2}{T_1^2} + 4l^2 = 2a^2 + 2b^2 - (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \sin^2 \beta - 2ab \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - \underbrace{(a \sin \alpha - b \sin \beta)^2}_{\text{Null}}$$

$$a^2 G^2 + 4l^2 T_1^2 = T_1^2 \cdot (2a^2 + 2b^2), \text{ demnach}$$

$$T_1 = \frac{G \cdot a}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4l^2}} \text{ und } T_2 = T_1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{G \cdot b}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4l^2}}$$

§ 12. Drehmoment einer Kraft in bezug auf einen Punkt. Zusammensetzung von Drehmomenten.

„Unter Drehmoment einer Kraft in bezug auf einen Punkt, Drehpunkt oder Momentenpunkt, versteht man das Drehungsbestreben dieser Kraft.“

Ist der genannte Punkt der Drehpunkt eines Körpers, so verursacht die Kraft um diesen eine um so intensivere Drehung, je größer sie ist und je größer der Abstand des Drehpunktes von der Richtung der Kraft, der Hebelarm, ist.

Kraft und Hebelarm sind also Faktoren des Drehmomentes.

„Die Größe des Drehmomentes ist das Produkt aus der Kraft und ihres Hebelarmes“ —

$$M = P \cdot p \dots\dots\dots (38)$$

Da die Bezeichnung der Kraft kg und diejenige des Hebelarmes Meter (cm, mm) ist, wird die Bezeichnung des Drehmomentes Kilogramm-meter, abgekürzt kgm (kgcm, kgmm).

Das Vorzeichen des Drehmomentes wird positiv genommen, wenn die Drehrichtung im Uhrzeigersinne vorhanden ist, negativ im Gegenfalle. Entgegengesetzt gleiche Drehmomente heben sich auf.

Das Drehmoment einer Kraft in bezug auf einen in ihr liegenden Punkt ist Null (Hebelarm ist 0, daher auch das Drehmoment).

„Das Drehmoment der Resultierenden zweier Kräfte, welche gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben, ist gleich der algebraischen Summe der Drehmomente dieser beiden Kräfte.“

a) Beweis, wenn der Momentenpunkt außerhalb der Komponenten P und Q liegt; Fig. 30.

Der Momentenpunkt O habe von den Kräften P, Q und R die Abstände p, q, r.

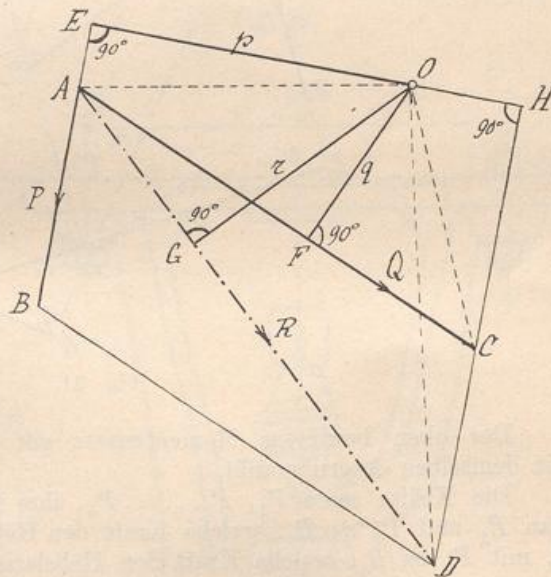


Fig. 30.

Nun

$$\begin{aligned} \triangle OAD &= \triangle AOC + \triangle ACD - \triangle DOC \\ \frac{R \cdot r}{2} &= \frac{Qq}{2} + \frac{CD \cdot HE}{2} - \frac{DC \cdot OH}{2} \\ R \cdot r &= Qq + CD(HE - OH), \text{ d. h.} \\ R \cdot r &= Qq + P \cdot EO \text{ oder} \\ R \cdot r &= P \cdot q + Q \cdot q \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$



## Beispiele.

59. Wie groß muß laut Fig. 32 die Kraft  $S$  sein, damit der Kolben auf seiner rechten Seite Wasser unter einem Drucke von  $p$  kg/qcm fortschaffe?

Auflösung: Der Totaldruck des Kolbens muß

$$\frac{D^2 \pi}{4} \cdot p \text{ kg}$$

sein. Dann gilt in bezug auf den Drehpunkt  $A$

$$\frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot p \cdot a = S \cdot b, \text{ somit}$$

$$S = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} p \cdot \frac{a}{b}$$

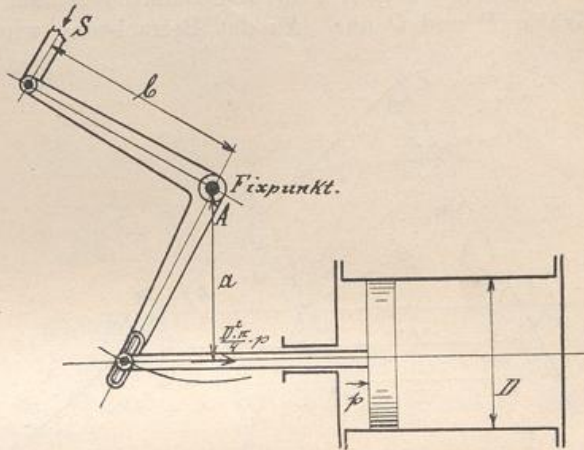


Fig. 32.

60. Den Zug  $Z$  in der Schraube des in Fig. 33 skizzierten Hängelagers zu bestimmen.

Auflösung:

Horizontal- und Vertikal-komponente von  $P$  werden gesucht.

$H$  und  $V$  versuchen das Lager um  $A$  zu drehen. Demnach schreibt sich die Momentgleichung in bezug auf  $A$

$$Z \cdot b = H \cdot a + V \cdot \frac{b}{2}$$

woraus

$$Z = H \cdot \frac{a}{b} + \frac{V}{2}$$

folgt.

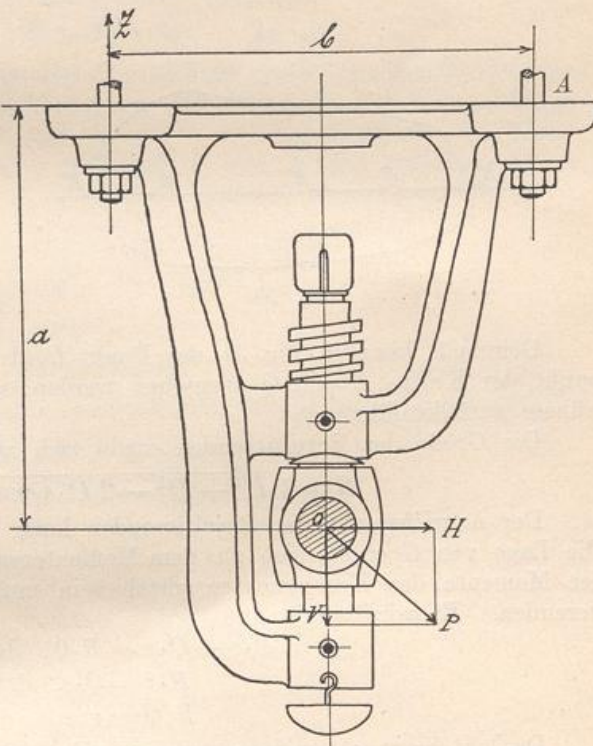


Fig. 33.

§ 13. Zusammensetzung zweier beliebig gerichteter Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

In Fig. 34 greifen in den Punkten *A* und *B* eines starren Körpers die Kräfte *P* und *Q* an. An der Betrachtung wird nichts geändert, wenn man den Angriffspunkt der beiden Kräfte in den Schnittpunkt ihrer Richtungen verlegt.

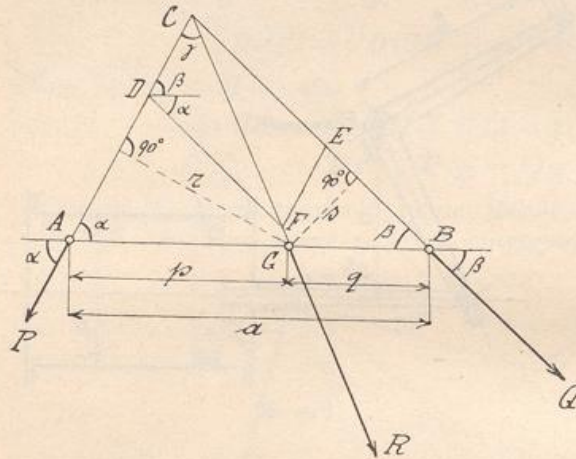


Fig. 34.

Daß sich der Angriffspunkt einer Kraft in irgend einen Punkt ihrer Richtung verlegen läßt, wird einfach und folgendermaßen bewiesen.

Eine Kraft greife im Punkte *A* eines Körpers an; Fig. 35. — Werden nun im Punkte *B*, welcher in der Richtung der Kraft *K* liegt, zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte *K* hinzugefügt, so ist der Gleichgewichtszustand des Körpers nicht geändert worden. Es heben sich die in *A* angreifende und die von *B* aus nach links wirkende Kraft auf, so daß in *B* nur die rechtswirkende übrigbleibt, welche als von *A* nach *B* verlegt seiende aufgefaßt werden kann.

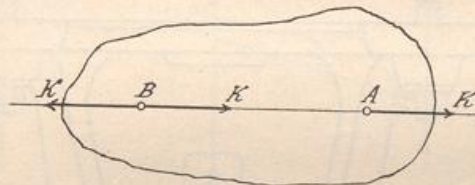


Fig. 35.

Demnach kann in Fig. 34 der Punkt *C* als gemeinschaftlicher Angriffspunkt der Kräfte *P* und *Q* angesehen werden, so daß die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt ist.

Die Größe der Resultierenden ergibt sich aus

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2P \cdot Q \cos(\alpha + \beta)} \dots \dots \dots (41)$$

Der Angriffspunkt der Resultierenden kann nun nach *G* verlegt werden. Die Lage von *G* ergibt sich aus dem Momentensatz, nach welchem die Summe der Momente der Komponenten gleich sein muß dem Momente der Resultierenden. Es wird somit

$$P \cdot r - Q \cdot s = R \cdot 0, \text{ daraus} \\ P \cdot r = Q \cdot s, \text{ d. h.} \\ P : Q = s : r.$$

Da laut Figur  $r = p \sin \alpha$  und  $s = q \sin \beta$  sind, läßt sich auch schreiben

$$P : Q = q \sin \beta : p \sin \alpha \text{ oder} \\ \frac{P}{\sin \beta} : \frac{Q}{\sin \alpha} = q : p, \text{ so daß} \\ P \sin \alpha : Q \sin \beta = q : p \text{ wird.}$$

Um  $p$  und  $q$  rechnen zu können, ist nur zu bedenken, daß  $p + q = a$  ist. Daher bestimmt sich nach einer kleinen Umformung aus

$$(p + q) : p = (P \sin \alpha + Q \sin \beta) : Q \sin \beta$$

der Arm  $p$

$$p = \frac{a \cdot Q \sin \beta}{P \sin \alpha + Q \sin \beta} \dots \dots \dots (42a)$$

Ebenso ergibt sich aus

$$(p + q) : q = (P \sin \alpha + Q \sin \beta) : P \sin \alpha$$

der Arm  $q$

$$q = \frac{a \cdot P \sin \alpha}{P \sin \alpha + Q \sin \beta} \dots \dots \dots (42b)$$

### Beispiele.

61. Zwei Kräfte  $P = 15$  kg und  $Q = 27$  kg schließen mit den Verlängerungen der Geraden  $\overline{AB}$  die Winkel  $\alpha = 42^\circ$  und  $\beta = 48^\circ$  ein. Man bestimme die Größe der Resultierenden.

$$\begin{aligned} \text{Auflösung: } R &= \sqrt{15^2 + 27^2 - 2 \cdot 15 \cdot 27 \cdot \cos 90^\circ} \\ R &= \sqrt{225 + 729} = \sqrt{954} \\ R &\sim 30,8 \text{ kg} \end{aligned}$$

62. Zwei Kräfte  $P = 8$  kg und  $Q = 12,5$  kg greifen an den Endpunkten einer festen, einen Meter langen Stange an und bilden mit den Verlängerungen derselben die Winkel  $\alpha = 72^\circ$  und  $\beta = 40^\circ$ . — Man bestimme die Resultierende  $R$ , ferner den Winkel  $\gamma$  zwischen  $P$  und  $R$  und endlich den Abstand der Angriffspunkte von  $P$  und  $R$ . — (Bezeichnungen nach Fig. 34.)

$$\begin{aligned} \text{Auflösung: } R &= \sqrt{8^2 + 12,5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12,5 \cdot \cos 120^\circ} \\ R &= \sqrt{64 + 156 + 200 \cdot \cos 60^\circ} \\ R &= \sqrt{220 + 100} = \sqrt{320} \\ R &\sim 17,9 \text{ kg} \end{aligned}$$

Um den Winkel  $\gamma$  zu finden, wird bestens der Sinussatz angewendet.

$$\begin{aligned} R : Q &= \sin(\alpha + \beta) : \sin \gamma \\ \sin \gamma &= \frac{12,5 \cdot \sin 120^\circ}{17,9} = \frac{12,5 \cdot 0,87}{17,9} = 0,605 \\ \gamma &= 37^\circ \\ p &= \frac{a Q \sin \beta}{P \sin \alpha + Q \sin \beta} \\ p &= \frac{1 \cdot 12,5 \cdot \sin 48^\circ}{8 \cdot \sin 72^\circ + 12,5 \cdot \sin 48^\circ} = \frac{12,5 \cdot 0,745}{8 \cdot 0,95 + 12,5 \cdot 0,745} \\ p &= \frac{12,5 \cdot 0,745}{7,6 + 12,5 \cdot 0,745} = \frac{9,3}{16,9} \\ p &\sim 0,55 \text{ m} \end{aligned}$$





„Die Kräfte verhalten sich verkehrt wie die Entfernungen ihrer Angriffspunkte von dem Angriffspunkte der Resultierenden.“

„Der Angriffspunkt der Resultierenden liegt der größeren Kraft näher.“

Beweis: Aus . . . .  $P:Q = \overline{BO}:\overline{AO}$  ist

$$P:(P+Q) = BO:(BO+AO), \text{ d. h.}$$

$$\overline{BO} = \frac{P}{R} \cdot \overline{AB} \dots \dots \dots (44b)$$

Ebenso ergibt sich durch ähnliche Folgerung

$$\overline{AO} = \frac{Q}{R} \cdot \overline{AB} \dots \dots \dots (44c)$$

Wenn nun  $Q > P$  ist, so ist auch  $\overline{AO} > \overline{BO}$  oder  $\overline{BO} < \overline{AO}$ , d. h.  $O$  liegt  $Q$  näher als  $P$ .

Sind drei parallele, gleichgerichtete Kräfte vorhanden, so setze man erst zwei zusammen, dann diese Resultierende mit der dritten Kraft. Es wird die Größe der Totalresultierenden gleich der Summe der Größen der gegebenen Kräfte.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes der Resultierenden mehrerer parallelen und gleichgerichteten Kräfte wird der Momentensatz angewendet.

**Beispiele.**

63) Zwei parallele Kräfte greifen in den Endpunkten einer 1,2 m langen Stange an. Ihre Größen sind 12 kg und 18 kg. Wie groß ist die Resultierende und welchen Abstand hat ihr Angriffspunkt von den Endpunkten der Stange?

Auflösung:  $R = 12 \text{ kg} + 18 \text{ kg}$   
 $R = 30 \text{ kg}$

Der Abstand des Angriffspunktes der Resultierenden von dem der Kraft 12 kg beträgt

$$\overline{AO} = \frac{18}{30} \cdot 1,2 = \frac{3 \cdot 1,2}{5} = \frac{3,6}{5}$$

$$\overline{AO} = 0,72 \text{ m}$$

Ebenso  $\overline{BO} = \frac{12}{30} \cdot 1,2 = \frac{6 \cdot 1,2}{15} = \frac{7,2}{15} = \frac{2,4}{5}$

$$\overline{BO} = 0,48 \text{ m}$$

$$\overline{AO} + \overline{BO} = 1,2 \text{ m (stimmt)}$$

64. Es soll eine möglichst einfache Konstruktion für den Mittelpunkt zweier paralleler Kräfte  $P$  und  $Q$  gefunden werden.

Auflösung: Man mache in Fig. 37  $\overline{AE} = Q$  und  $\overline{BF} = P$ . Sodann verbinde man  $E$  mit  $F$ . Die Gerade  $\overline{EF}$  schneidet  $\overline{AB}$  im gesuchten Mittelpunkt  $O$  der Kräfte. Der Beweis ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $AEO$  und  $BFO$ .

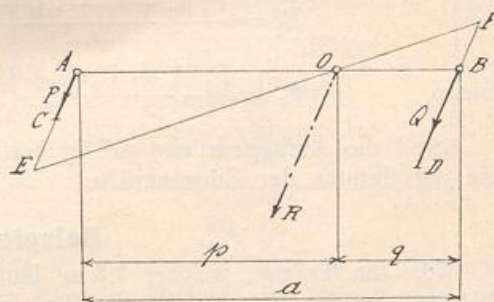


Fig. 37.

4\*

65. Für die in Fig. 38 gegebenen Kräfte den Mittelpunkt  $O$  zu finden.

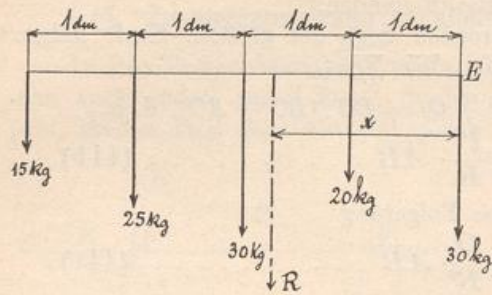


Fig. 38.

Auflösung: Laut Momentensatz gilt in bezug auf den Drehpunkt  $E$

$$15 \cdot 4 + 25 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 1 = R \cdot x$$

$$R = 120 \text{ kg}$$

$$x = \frac{60 + 75 + 60 + 20}{120}$$

$$x = \frac{215}{120} = \frac{43}{24}$$

$$x = 1,79 \text{ dm}$$

### § 15. Ermittlung von Auflagerdrücken.

Befindet sich ein belasteter Träger auf zwei Stützen, so werden dieselben gewisse Drücke, welche **Stützdrücke** heißen, aufzunehmen haben. Statt der Stützen kann man sich nun in  $A$  und  $B$ , Fig. 39, zwei Kräfte  $R_1$  und  $R_2$

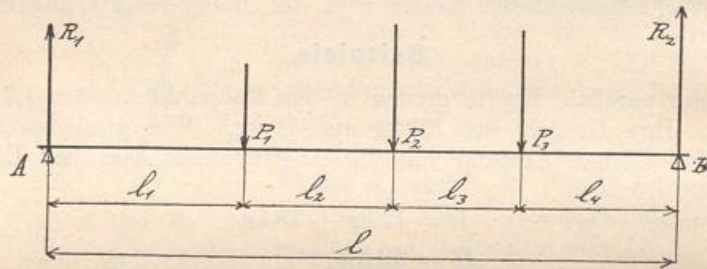


Fig. 39.

nach aufwärts angebracht denken, so daß der Träger in seiner Lage verbleibt. Diese letzteren Drücke heißen **Auflagerdrücke**. Sie können aufgefaßt werden als Resultierende aller vorhandenen Einzelkräfte, so daß sie mit Hilfe des Momentensatzes leicht zu ermitteln sind. Um den Auflagerdruck  $R_1$  zu finden, nimmt man den Punkt  $B$  als Drehpunkt an, um  $R_2$  zu bestimmen, stellt man die Momentengleichung in bezug auf den Punkt  $A$  auf, weil sich dann Beziehungen ergeben, die nur je eine Unbekannte enthalten.

$$R_1 \cdot l = P_1(l_2 + l_3 + l_4) + P_2(l_3 + l_4) + P_3 \cdot l_4$$

$$R_1 = \frac{P_1(l_2 + l_3 + l_4) + P_2(l_3 + l_4) + P_3 \cdot l_4}{l}$$

ebenso

$$R_2 = \frac{P_1 \cdot l_1 + P_2(l_1 + l_2) + P_3(l_1 + l_2 + l_3)}{l}$$

Sind die Auflagerdrücke richtig bestimmt, dann muß ihre Summe gleich sein der Summe der Einzelkräfte.

### Beispiele.

66. Ein Träger, welcher 1,5 m lang ist, liegt mit beiden Enden auf Stützen. In der Mitte greift eine Last von 25 kg, 0,3 m vom rechten Ende eine Last von 45 kg an. Wie groß sind die Auflagerdrücke?

Auflösung: Der rechte Auflagerdruck ist

$$R_1 = \frac{25 \cdot 0,75 + 45 \cdot 1,2}{1,5} = \frac{5 \cdot 0,75 + 9 \cdot 1,2}{0,3}$$

$$R_1 = 12,5 + 36$$

$$R_1 = 48,5 \text{ kg.}$$

Der linke wird  $R_2 = \frac{25 \cdot 0,75 + 45 \cdot 0,3}{1,5} = 25 \cdot 0,5 + 9$

$$R_2 = 21,5 \text{ kg}$$

$$R_1 + R_2 = 48,5 + 21,5 = 70 \text{ kg (stimmt).}$$

67. Die Auflagerdrücke des nach Fig. 40 belasteten Trägers zu bestimmen.

Auflösung: In bezug auf B gilt

$$R_1 \cdot 1300 - 5000 \cdot 1600 = 0$$

$$R_1 = \frac{5000 \cdot 16}{13} = \frac{80000}{13}$$

$$R_1 = 6150 \text{ kg.}$$

Der Auflagerdruck  $R_2$  wurde nach aufwärts wirkend angenommen; er ergibt sich negativ, d. h. er wirkt nach abwärts. Aus der Anschauung folgt dies sofort

$$5000 \cdot 300 + R_2 \cdot 1300 = 0$$

$$R_2 = -\frac{5000 \cdot 3}{13}$$

$$R_2 = -1150 \text{ kg.}$$

68. Die Auflagerdrücke des nach Fig. 41 belasteten Trägers zu ermitteln.

Auflösung:

$$-1500 \cdot 2,75 + R_1 \cdot 2 - 4000 \cdot 1 + 1500 \cdot 1 = 0$$

$$R_1 = 750 \cdot 2,75 + 2000 - 750$$

$$R_1 = 750 \cdot 1,75 + 2000$$

$$R_1 = 3312,5 \text{ kg}$$

$$-1500 \cdot 0,75 + 4000 \cdot 1 - R_2 \cdot 2 + 1500 \cdot 3 = 0$$

$$R_2 = 2000 + \frac{1500 \cdot 2,25}{2}$$

$$R_2 = 3687,5 \text{ kg}$$

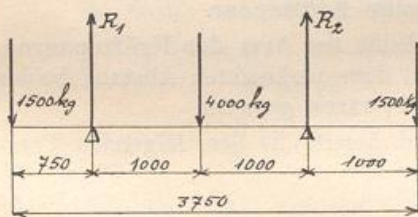


Fig. 41.

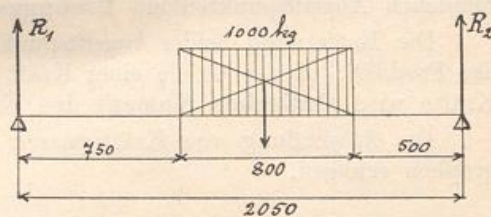


Fig. 42.

69. Die Auflagerdrücke des in Fig. 42 belasteten Trägers zu bestimmen.

Auflösung: Die Last von 1000 kg kann im Mittelpunkt ihres Aufliegens angreifend angesehen werden.

$$R_1 \cdot 1,8 = 1000 \cdot 0,65$$

$$R_1 = \frac{650}{1,8} = 360 \text{ kg}$$

Ebenso

$$R_2 = \frac{1150}{1,8} = 640 \text{ kg}$$

70. Eine 4 m lange Achse, welche beiderseits mittels Zapfen gelagert ist, ist 1,2 m vom linken Ende mit 12000 kg und 1 m vom rechten Ende 8000 kg belastet. Man suche die Auflagerdrücke.

Auflösung: Der linke Auflagerdruck wird

$$R_1 = \frac{12000 \cdot 2,8 + 8000 \cdot 1}{4} = 3000 \cdot 2,8 + 2000$$

$$R_1 = 10400 \text{ kg}$$

Der rechte Auflagerdruck ergibt sich mit

$$R_2 = \frac{8000 \cdot 3 + 12000 \cdot 1,2}{4} = 2000 \cdot 3 + 3000 \cdot 1,2$$

$$R_2 = 9600 \text{ kg}$$

### § 16. Vom Kräftepaar.

Werden zwei parallele Kräfte, welche einen festen Körper in 2 Punkten *A* und *B* angreifen, einander gleich, aber sind sie entgegengesetzt gerichtet, so ist laut Gleichung (43)

$$R = 0,$$

d. h. für diese beiden Kräfte gibt es keine Resultierende. Der Körper kann also vor allem keine fortschreitende Bewegung annehmen. Aufheben aber können sich die Kräfte nicht. Da das Drehungsbestreben der Kräfte nun in demselben Sinne vorhanden ist, wird der Körper eine drehende Bewegung ausführen.

Deshalb nennt man zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte mit fest verbundenen Angriffspunkten ein **Drehungs- oder Kräftepaar**.

Die Entfernung beider Angriffspunkte heißt der **Arm des Kräftepaares**, das Produkt aus der Größe einer Kraft und dem senkrechten Abstand beider Kräfte wird **statisches Moment des Kräftepaares** genannt.

Die Anwendung von Kräftepaaren wird bereits in den folgenden Paragraphen erfolgen.

**§ 17. Rechnerische Ermittlung der Resultierenden mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Bedingungen des Gleichgewichtes mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.**

Diese Aufgabe läßt sich zum Teil auf die in § 11 gelöste zurückführen. In Fig. 43 seien die Kräfte  $P_1, P_2, P_3, \dots$  gegeben. In der Ebene der Kräfte werden zunächst zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen  $OX$  und  $OY$  verzeichnet. Dann werden in  $O$  die zu den gegebenen Kräften parallelen und entgegengesetzt gleichen Kräfte  $P_1, P_2, \dots$  angebracht.

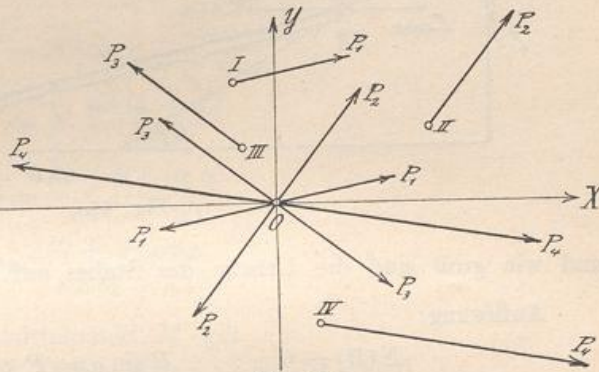


Fig. 43.

Auf diese Art sind in  $O$  vorhanden:

- a)  $n$  Einzelkräfte,
- b)  $n$  Kräftepaare.

Dieselbe Wirkung wie die gegebenen Kräfte bringen nun die Resultierende der  $n$  in  $O$  angreifenden Kräfte und das resultierende Kräftepaar hervor. —

Gleichgewicht ist vorhanden, wenn daher die Gleichungen existieren:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(H) &= 0 \\ \Sigma(V) &= 0 \\ \Sigma(M) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

**Beispiele.**

71. In einer vertikalen Ebene ist ein Balken an eine vertikale zu ersterer senkrechte Ebene gelehnt und in der Horizontalen am Ausweichen gehindert. Wie groß sind die vorkommenden Drücke?

Fig. 44. — Gegeben das Gewicht des Stabes und der Winkel  $\alpha$ . —

Auflösung:

$$\begin{aligned} N &= N' \\ N'' &= G. \end{aligned}$$

In bezug auf den Drehpunkt  $A$  ist

$$\begin{aligned} N \cdot 2l \sin \alpha - G \cdot l \cdot \cos \alpha &= 0 \\ N'' &= G \\ N &= \frac{1}{2} G \cot \alpha = N' \end{aligned}$$

72. Ein Stab mit dem Gewichte  $G$  kg liegt mit dem einen Ende auf einer horizontalen und mit dem andern Ende auf einer schiefen Ebene, welche mit dem Horizonte den Winkel  $\alpha$  bildet. Von letzterem Ende geht

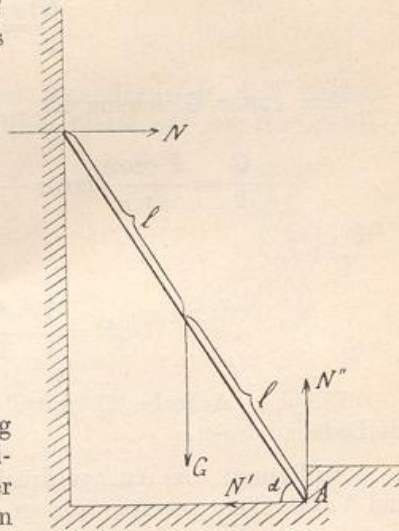


Fig. 44.

ein Faden aus, der am oberen Ende der schiefen Ebene über eine Rolle geht  
Welches Gewicht ist an dessen Ende zu hängen, damit Gleichgewicht besteht

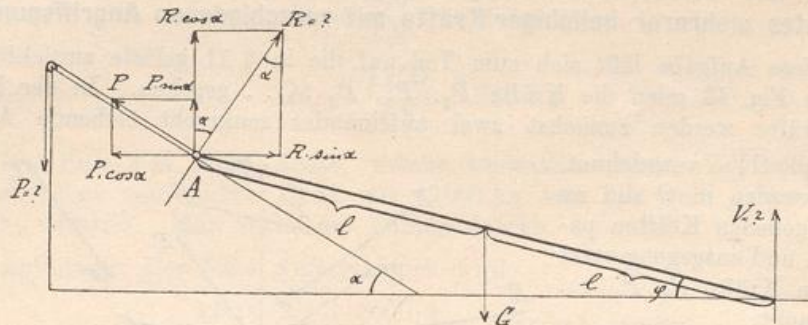


Fig. 45.

und wie groß sind die Drücke des Stabes auf die schiefe Ebene? Fig. 45.

Auflösung:

$$\Sigma(H) = 0 \dots R \sin \alpha = P \cdot \cos \alpha$$

$$\Sigma(V) = 0 \dots G - V - R \cos \alpha - P \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma(M)_A = 0 \dots G \cdot l \cos \varphi = V \cdot 2l \cos \varphi.$$

Aus letzterer Gleichung wird  $G = 2V$

$$V = \frac{G}{2}$$

In die zweite Gleichung wird der Wert für  $V$  eingesetzt, so daß folgt

$$G - \frac{G}{2} - R \cos \alpha - P \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\frac{G}{2} = R \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha.$$

Aus erster Gleichung ist  $\dots R = \frac{P \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}$ , somit

$$\frac{G}{2} = \frac{P \cos \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha + P \sin \alpha = P \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \text{ oder}$$

$$G = \frac{2P}{\sin \alpha}$$

$$P = \frac{G \cdot \sin \alpha}{2}, \quad R = \frac{G \cdot \cos \alpha}{2}$$

73. Die Aufgabe 51 mittels der in diesem Paragraphen angegebenen Methode zu lösen.

Auflösung: Die Auflagerdrücke  $N$  und  $N'$  werden zunächst in Horizontal- und Vertikalkomponenten zerlegt. Erstere sind  $N \sin \alpha$  und  $N' \sin \alpha'$ , letztere  $N \cos \alpha$  und  $N' \cos \alpha'$ . — Demnach werden

$$\begin{aligned}
 N \sin \alpha &= N' \sin \alpha' \\
 G + G' &= N \cos \alpha + N' \cos \alpha' \\
 N' &= N \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \\
 G + G' &= N \cos \alpha + N \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cos \alpha' \\
 G + G' &= N \left( \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha'}{\sin \alpha'} \right) \\
 G + G' &= N \cdot \frac{\sin (\alpha + \alpha')}{\sin \alpha'} \\
 N &= \frac{(G + G') \cdot \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} \\
 N' &= \frac{(G + G') \sin \alpha}{\sin (\alpha + \alpha')}
 \end{aligned}$$

In bezug auf den Kugelmittelpunkt  $M'$  gilt

$$N \cos \alpha \cdot a \cos \varphi + N \sin \alpha \cdot a \sin \varphi - G a \cos \varphi = 0$$

$$N \cos \alpha + N \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi = G$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G - N \cdot \cos \alpha}{N \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G - \frac{(G + G') \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} \cdot \cos \alpha}{\frac{(G + G') \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} \cdot \sin \alpha} = \frac{G \cdot \sin (\alpha + \alpha') - (G + G') \sin \alpha' \cos \alpha}{(G + G') \cdot \sin \alpha' \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G \sin \alpha \cos \alpha' + G \cos \alpha \sin \alpha' - G \sin \alpha' \cos \alpha - G' \sin \alpha' \cos \alpha}{(G + G') \sin \alpha' \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G \cot \alpha' - G' \cot \alpha}{G + G'}$$

74. Ein Stab liegt über einer horizontalen Mauerkante  $B$ , mit welcher er einen rechten Winkel bildet. Sein unteres Ende findet auf der Horizontalebene in  $A$  ein Hindernis gegen Ausgleiten. Das Gewicht des Stabes ist  $G$  kg, die Auflagerlänge  $l$ , die Höhe der Mauerkante  $B$  über der Horizontalen  $h$ , die Entfernung der Mauer vom Hindernis  $A \dots b$  und die Entfernung der Richtung des Eigengewichtes des Stabes vom Hindernis  $a$ . — Man bestimme die vorkommenden Drücke?  
Fig. 46.

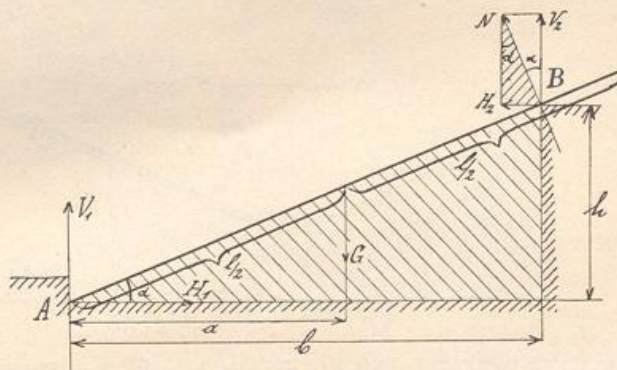


Fig. 46.



Auflösung: Bekannt sind die Größen  $G, a, b, h, l$

$$H_1 = H_2$$

$$G = V_1 + V_2$$

In bezug auf  $A$  wird

$$G \cdot a - H_2 \cdot h - V_2 \cdot b = 0.$$

Diese drei Gleichungen enthalten vier Unbekannte. Es ist daher noch eine Gleichung zur Lösung der Aufgabe nötig. Diese Gleichung ergibt sich wegen Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke mit

$$\frac{H_2}{V_2} = \frac{h}{b}.$$

Daraus ist

$$H_2 = \frac{h}{b} \cdot V_2.$$

Demnach wird

$$G \cdot a - \frac{h}{b} \cdot V_2 \cdot h - V_2 \cdot b = 0$$

$$G \cdot a = V_2 \left( \frac{h^2}{b^2} + b \right) = V_2 \frac{h^2 + b^2}{b} = V_2 \cdot \frac{l^2}{b}$$

$$V_2 = G \frac{a \cdot b}{l^2}$$

$$H_1 = H_2 = G \cdot \frac{a h}{l^2}$$

$$V_1 = G - V_2 = G - G \frac{a b}{l^2}$$

$$V_1 = G \frac{l^2 - a b}{l^2}$$

$$N = \sqrt{H_2^2 + V_2^2} = \sqrt{G^2 \cdot \frac{a^2 h^2}{l^4} + G^2 \cdot \frac{a^2 b^2}{l^4}} = \frac{G \cdot a}{l^2} \cdot \sqrt{h^2 + b^2}$$

$$N = G \cdot \frac{a}{l}$$

75. Ein Stab lehnt sich gegen zwei in einer Horizontalen sich schneidenden, schiefen Ebenen, welche mit dem Horizonte die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha'$  bilden. —

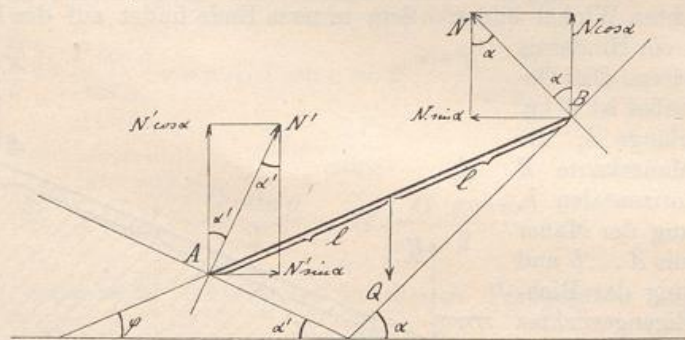


Fig. 47.

Welchen Winkel schließt der Stab mit der Horizontalen ein, wenn er im Gleichgewicht ist? Fig. 47.

Auflösung:

$$Q = N \cdot \cos \alpha + N' \cos \alpha'$$

$$N \sin \alpha = N' \sin \alpha'$$

$$N' = N \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

$$Q = N \cdot \cos \alpha + N \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cdot \cos \alpha'$$

$$N = \frac{Q}{\cos \alpha + \sin \alpha \cot \alpha'} \text{ und}$$

$$N' = \frac{Q}{\cos \alpha + \sin \alpha \cot \alpha'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

In bezug auf den Drehpunkt  $A$  gilt

$$Q \cdot l \cdot \cos \varphi = N \cdot \cos \alpha \cdot 2l \cos \varphi + N \cdot \sin \alpha \cdot 2l \sin \varphi$$

$$Q \cdot \cos \varphi = \frac{Q}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cot \alpha'} \cdot \frac{(2 \cos \varphi \cos \alpha + 2 \sin \alpha \sin \varphi)}{2 \cos (\alpha - \varphi)}$$

$$\cos \varphi \left( \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha'}{\sin \alpha'} \right) = 2 \cos (\alpha - \varphi)$$

$$\cos \varphi \cdot \sin (\alpha + \alpha') = 2 \sin \alpha' \cdot \cos (\alpha - \varphi)$$

$$\cos \varphi \cdot \sin (\alpha + \alpha') = 2 \sin \alpha' \cdot (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi)$$

$$\sin (\alpha + \alpha') = 2 \sin \alpha' (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi)$$

$$2 \sin \alpha \sin \alpha' \operatorname{tg} \varphi = \sin \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha' - 2 \sin \alpha' \cos \alpha$$

$$2 \sin \alpha \sin \alpha' \operatorname{tg} \varphi = \sin \alpha \cos \alpha' - \cos \alpha \sin \alpha'$$

Beide Seiten der Gleichung durch  $2 \sin \alpha \sin \alpha'$  dividiert, ergibt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} (\cot \alpha' - \cot \alpha).$$

76. Ein Stab lehnt sich gegen eine horizontale und gegen eine vertikale Ebene. In einem Punkte ist er mit einem Faden verbunden, dessen anderes Ende im Schnittpunkte erstgenannter Ebenen fest ist. Welche Spannung entsteht im Faden, wenn er mit der Horizontalen nach Annahme der Gleichgewichtslage des Stabes den Winkel  $\beta$  und der Stab mit ihr den Winkel  $\alpha$  bildet? Fig. 48.

Auflösung:

- a)  $\Sigma(H) = 0 \dots N_1 = S \cdot \cos \beta$   
 b)  $\Sigma(V) = 0 \dots G + S \cdot \sin \beta - N_2 = 0$   
 $N_2 = G + S \sin \beta$   
 c)  $\Sigma(M) = 0$ , z. B. in bezug auf Drehpunkt  $A$ .

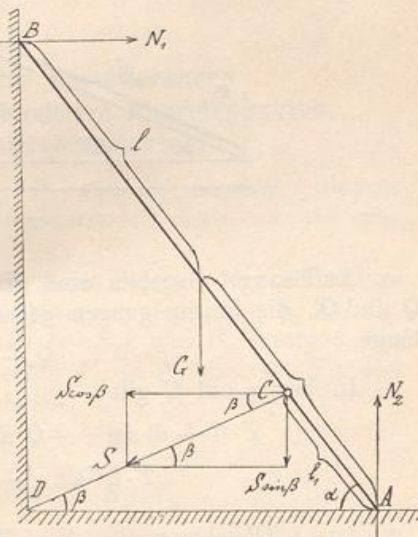


Fig. 48.

$$\begin{aligned}
 N_1 \cdot 2l \sin \alpha - G \cdot l \cdot \cos \alpha - S \cdot \cos \beta \cdot l_1 \sin \alpha - S \cdot \sin \beta \cdot l_1 \cos \alpha &= 0. \\
 S \cdot \cos \beta \cdot 2l \sin \alpha - S \cos \beta \cdot l_1 \sin \alpha - S \sin \beta l_1 \cos \alpha &= G l \cos \alpha \\
 S \cdot [2l \sin \alpha \cos \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta - l_1 \sin \beta \cos \alpha] &= G \cdot l \cdot \cos \alpha \\
 S \cdot \left[ 2 \cdot \sin \alpha \cos \beta - \frac{l_1}{l} \sin \alpha \cos \beta - \frac{l_1}{l} \sin \beta \cos \alpha \right] &= G \cos \alpha \\
 S \cdot \left[ 2 \sin \alpha \cos \beta - \frac{l_1}{l} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \right] &= G \cdot \cos \alpha \\
 S \cdot \left[ 2 \sin \alpha \cos \beta - \frac{l_1}{l} \cdot \sin (\alpha + \beta) \right] &= G \cdot \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

Aus  $\triangle ACD$  folgt . . . .  $l_1 : 2l \cos \alpha = \sin \beta : \sin (\alpha + \beta)$ , also

$$\frac{l_1}{l} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Dann wird . . . .  $S \cdot \left[ 2 \sin \alpha \cos \beta - \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \cdot \sin (\alpha + \beta) \right] = G \cdot \cos \alpha$

$$2S \cdot (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = G \cdot \cos \alpha$$

$$2S \cdot \sin (\alpha - \beta) = G \cdot \cos \alpha$$

$$S = \frac{G}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$$

77. Zwei Stäbe in einer Vertikalebene stehen auf einer horizontalen Ebene. Ihre unteren Enden sind durch einen Faden verbunden. Das obere Ende des einen Stabes ist mit irgend einem Punkte des zweiten durch ein Gelenk verbunden. Wie groß ist die Spannung des Fadens? Fig. 49.

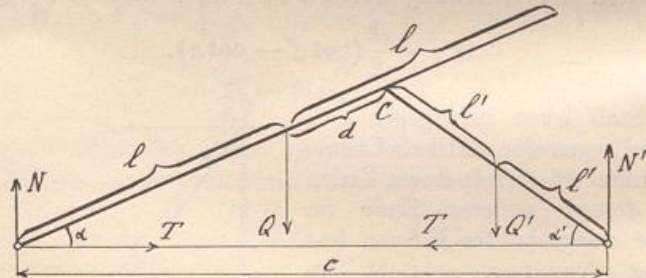


Fig. 49.

Auflösung: Gegeben sind die Stablängen  $2l$  und  $2l'$ , die Stabgewichte  $Q$  und  $Q'$ , die Stabneigungen gegen die Horizontale  $\alpha$  und  $\alpha'$  und die Fadenlänge  $c$

$$Q + Q' = N + N'.$$

In bezug auf  $C$  gilt

$$T \cdot (l + d) \sin \alpha + Q \cdot d \cos \alpha - N \cdot (l + d) \cdot \cos \alpha = 0$$

$$T \cdot 2l' \sin \alpha' + Q' l' \cos \alpha' - N' \cdot 2l' \cos \alpha' = 0.$$

Aus 1. Gleichung . . . .  $N = T \cdot \operatorname{tg} \alpha + Q \frac{d}{l + d}$

Aus 2. Gleichung . . . .  $N' = T \cdot \operatorname{tg} \alpha' + \frac{1}{2} Q'$

$$Q + Q' = T \cdot \operatorname{tg} \alpha + Q \frac{d}{l+d} + T \cdot \operatorname{tg} \alpha' + \frac{1}{2} Q'$$

$$T \cdot \operatorname{tg} \alpha + T \cdot \operatorname{tg} \alpha' = Q + Q' - Q \frac{d}{l+d} - \frac{1}{2} Q'$$

$$T \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') = \frac{Ql + Qd - Qd}{l+d} + \frac{1}{2} Q' = \frac{Q \cdot l}{l+d} + \frac{1}{2} Q'$$

$$\frac{2l'}{l+d} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}, \text{ folgt } \frac{l'}{l+d} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha'} = \frac{l}{1+d} \cdot \frac{l'}{l}$$

$$\text{d. h. } 2l' \sin \alpha' = (l+d) \sin \alpha$$

$$T \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') = \frac{1}{2} Q' + Q \frac{l \cdot \sin \alpha}{2l' \sin \alpha'} = \frac{Q'l \sin \alpha' + Ql \sin \alpha}{2l' \sin \alpha'}$$

$$T = \frac{Q \cdot l \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{2l' \sin \alpha' (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha')}$$

Da  $\frac{c}{2l'} = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin \alpha}$ , folgt  $c \cdot \sin \alpha = 2l' \sin(\alpha + \alpha')$ ; ferner ist

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha'}$$

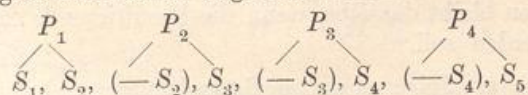
$$T = \frac{Q \cdot l \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{2l' \sin \alpha' \cdot \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha'}}$$

$$T = \frac{Ql \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{2l' \sin \alpha' \frac{c \cdot \sin \alpha}{2l' \cos \alpha \cos \alpha'}}, \text{ somit } \dots T = \frac{Ql \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{c \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha'}$$

### § 18. Graphische Ermittlung der Resultierenden mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Graphische Darstellung des Drehmomentes.

Es seien, Fig. 50a, die Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  gegeben. Behufs Auffindens des Weges zur Ermittlung der Resultierenden derselben auf graphischem Wege dienen folgende Erwägungen.

Man nehme in der Richtung der Kraft  $P_1$  einen Punkt  $I$  an und zerlege dort  $P_1$  in die Komponenten  $S_1$  und  $S_2$ . Im Schnittpunkte von  $S_2$  mit  $P_2$ , d. i. in  $II$ , werde  $P_2$  durch die Komponenten  $(-S_2)$  und  $S_3$  ersetzt. Im Schnittpunkte von  $S_3$  mit  $P_3$ , d. i. in  $III$ , werde  $P_3$  in  $S_4$  und  $(-S_3)$  zerlegt usw. Es ergibt sich somit folgendes Schema:



Da sich  $S_2$  und  $(-S_2)$ ,  $S_3$  und  $(-S_3)$  . . . . aufheben, bleiben nur die Kräfte  $S_1$  und  $S_5$  übrig. Sie bringen dieselbe Wirkung hervor wie die ge-

gegebenen Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$ . Ihre Resultierende ist daher auch die Resultierende der gegebenen Kräfte, greift also im Mittelpunkte V an.

Reiht man, Fig. 50b, die Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  nach Größe und Richtung aneinander und verbindet man je ihre Endpunkte mit einem beliebigen Punkte O, dem sogenannten **Pole**, so ist es zweckmäßig, letztere Strahlen, die sogenannten **Polstrahlen**, als obgenannte Komponenten  $S$  zu

nehmen. Wie die Figur zeigt, ist dann tatsächlich  $P_1$  zerlegt in  $S_1$  und  $S_2$ ,  $P_2$  zerlegt in  $(-S_2)$  und  $S_3$  usw. Die Totalresultierende  $R$  ist als Resultierende von  $S_1$  und  $S_5$  zu erkennen.

Auf Grund dieser Betrachtungen schlage man daher folgenden Weg zur Aufsuchung der Resultierenden mehrerer Einzelkräfte mit verschiedenen Angriffspunkten ein.

„Man reihe die Kräfte nach Größe und Richtung aneinander, nehme einen beliebigen Pol an und ziehe die Polstrahlen. Hierauf zeichne man durch einen Punkt I der ersten Kraft je eine Parallele zum ersten und zum zweiten Polstrahl und zwar letztere Parallele bis zur zweiten Kraft, d. h. bis II. Dann ziehe man durch II eine Parallele zum dritten Polstrahl bis zur dritten Kraft, d. h. bis III,

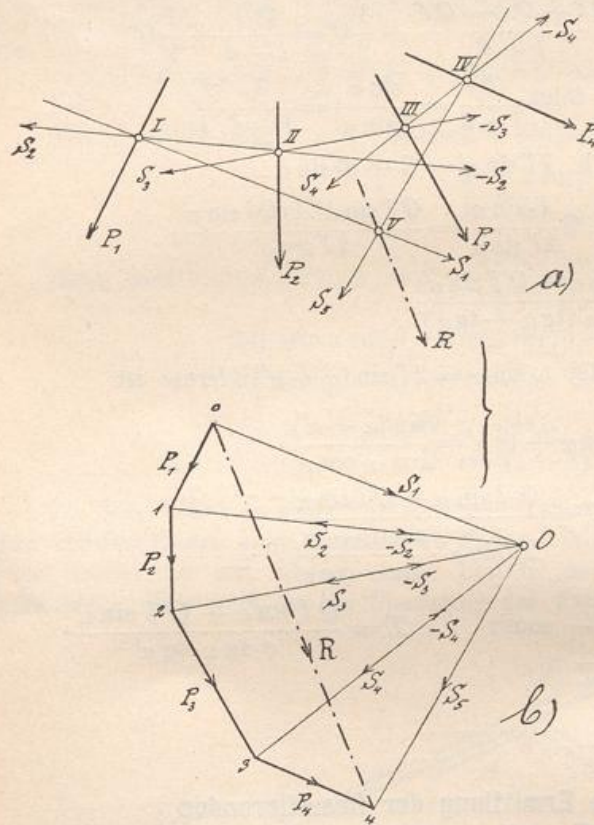


Fig. 50.

durch letzteren Punkt eine Parallele zum vierten Polstrahl bis zur nächsten Kraft, usw. Der Schnittpunkt der äußersten Polstrahlen ergibt den Angriffspunkt der Resultierenden.“

„Kräftezug und Polstrahlen zusammen heißen **Kräftepolygon**, der Linienzug I, II, III, IV, V wird **Seilpolygon** genannt.“

„Die Größe und Richtung der Resultierenden ergibt sich aus dem Kräftepolygon.“

„Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn die Resultierende mehrerer parallelen Kräfte gesucht werden soll.“

Im Anschluss an obige einfache Betrachtungen soll nun gleich gezeigt werden, wie das Drehmoment mehrerer Kräfte in bezug auf einen bestimmten Drehpunkt graphisch gefunden wird.

In Fig. 51 ist mittels des soeben beschriebenen Verfahrens Größe, Angriffspunkt und Richtung der Resultierenden der Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$

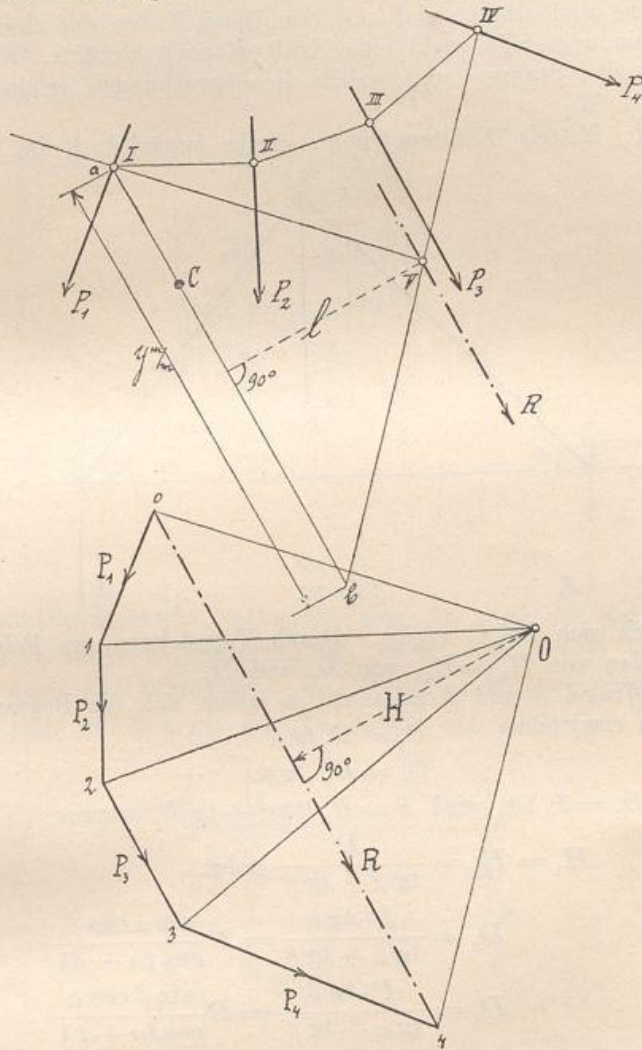


Fig. 51.

gesucht worden. In bezug auf den Drehpunkt  $C$  ist das Drehmoment

$$M = R \cdot l.$$

Durch  $C$  werde eine Parallele zu  $R$  zwischen den äußersten Seilpolygonseiten  $y = \overline{ab}$  verzeichnet. Nun ist laut Figur

$$\triangle abV \sim \triangle oO4, \text{ daher}$$

$$y : l = R : H \text{ oder}$$

$$M = R \cdot l = H \cdot y \dots \dots \dots (46)$$

„ $H$  heißt Poldistanz.“

„Man findet somit das Drehmoment mehrerer Kräfte, indem man die Poldistanz  $H$  mit der zwischen den äußersten Seilpolygonseiten liegenden und durch den Drehpunkt parallel zur Resultierenden gezogenen Strecke  $y$  multipliziert.“

## Beispiele.

78. Zwei durch ein Gelenk verbundene Stäbe  $\overline{ab}$  und  $\overline{bc}$  liegen in einer vertikalen Ebene und stützen sich mit den freien Enden auf eine horizontale. An ihrer Verbindungsstelle wirkt eine Kraft  $P$  nach abwärts. Wie groß sind die Drücke in den Stangen und welche Beanspruchungen erfahren die Aufgestellen? Fig. 52.

Auflösung: Mittels Kräftepolygons werde zunächst  $P$  in  $K_1$  und  $K_2$

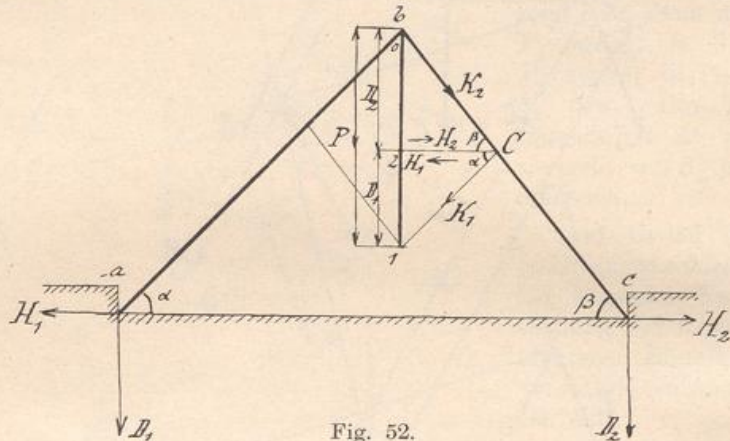


Fig. 52.

zerlegt, wodurch sich Pol  $C$  ergibt. Durch Verzeichnen des Polstrahles  $\overline{C2}$  folgen die Größen von  $H_1 = H_2$ , von  $D_1$  und  $D_2$ .

Sind die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  bekannt, so lassen sich die Beanspruchungen auch analytisch ermitteln.

$$D_1 = H_1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$D_2 = H_2 \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Da  $D_1 + D_2 = P$  ist, wird  $P = H_1 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$ , woraus

$$H_1 = H_2 = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \text{ folgt.}$$

$$\text{Dann wird} \quad D_1 = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = P \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos (\alpha + \beta)}$$

$$D_2 = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = P \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$$

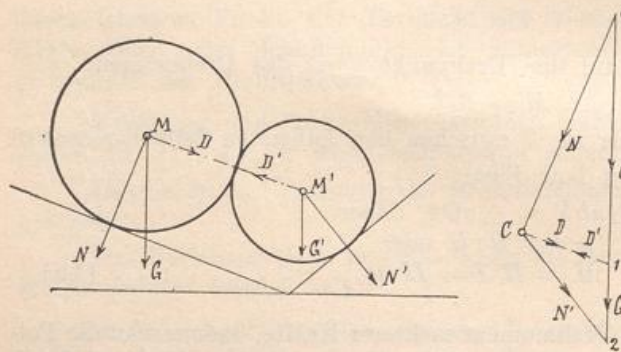


Fig. 53.

79. Die Aufgabe 51 graphisch zu lösen. Fig. 53.

Auflösung:

Die Kräfte  $G$  und  $G'$  werden verzeichnet. Hierauf werden die Polstrahlen  $\overline{C0}$  und  $\overline{C2}$  parallel zu  $N$  und  $N'$  gezogen. Die Verbindungslinie  $\overline{C1}$  ergibt dann die Lage der Zentrale der Kugeln, wenn diese sich im Gleichgewichte befinden.

80. Wie groß muß die in  $D$ , Fig. 54, angreifende Kraft  $K$  sein, damit der Hebel im Gleichgewicht bleibe?

Auflösung: Man trage  $P_1 = 0,1$  und  $P_2 = 1,2$  an und wähle einen beliebigen Pol  $C_1$ . Nach Verzeichnung der Polstrahlen ziehe man  $I IV \parallel OC_1$ ,  $I II \parallel 1, C_1$  und  $II III \parallel 2, C_1$ .

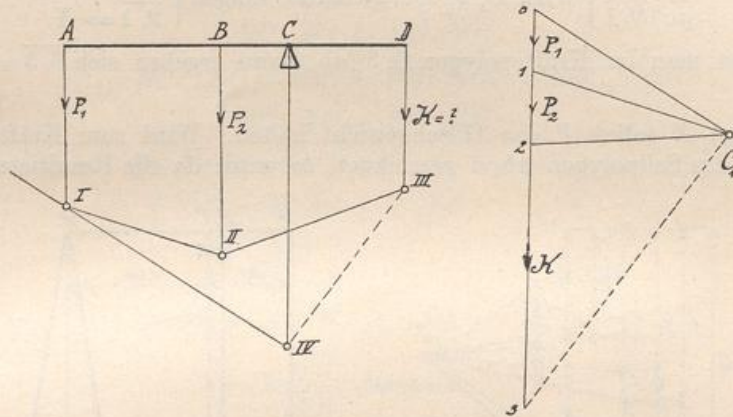


Fig. 54.

Soll nun Gleichgewicht vorhanden sein, so muß die Resultierende von  $P_1$ ,  $P_2$  und  $K$  durch  $C$  hindurchgehen, d. h. auch durch den Punkt  $IV$ .  $III IV$  ist somit der letzte Polstrahl. Wird im Kräftepolygon  $C_1 3 \parallel III IV$  gezogen, so folgt mit  $2, 3$  die gesuchte Größe der Kraft  $K$ .

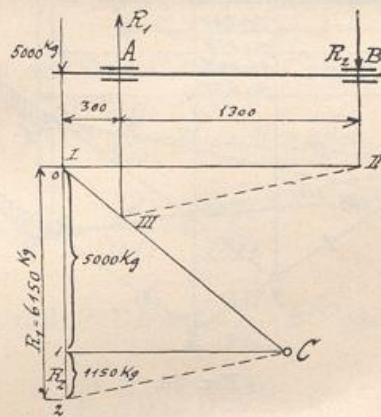


Fig. 55.

81. Die Auflagerdrücke  $R_1$  und  $R_2$  in Beispiel 67 sind graphisch zu ermitteln. Fig. 55.

Auflösung: Man nehme in der Richtung von  $5000 \text{ kg}$  einen Punkt  $I$  an und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Polstrahlen  $0, C$  und  $1, C$ .  $II III$  ergibt sich dann als Schlußlinie des Seilpolygones. Wird im Kräftepolygon  $C, 2 \parallel II III$  gezogen, so ergibt sich  $R_1 = 0,2$  und  $R_2 = 1,2$  und zwar ist  $R_1$  hinaufgerichtet, während  $R_2$  nach abwärts wirkt.



82. Die Theorie der Dezimalwaage soll graphisch gegeben werden. Fig. 56.

Auflösung: Die Last  $Q$  ruhe irgendwo auf der Brücke. Dieselbe werde durch das Kräftepolygon zunächst in die Komponenten  $I$  und  $II$  zerlegt. Zu diesem Ende ziehe man

$$\left. \begin{array}{l} \overline{ga_1} \parallel \overline{O,0} \\ \overline{gc} \parallel \overline{O,1} \end{array} \right\} \text{Wird } \overline{O,2} \parallel \overline{a_1c} \text{ gemacht, folgen } \begin{cases} \overline{O,2} = Z \\ \overline{2,1} = X \end{cases}$$

Verzeichnet man im Kräftepolygon  $\overline{O,3} \parallel \overline{ab}$ , dann ergeben sich  $\overline{O,3} = Y_1$  und  $\overline{3,2} = Y$ .

$Y$  und  $X$  sollen  $P$  das Gleichgewicht halten. Wird zum Kräftepolygon  $O, 3, 2, 1$  das Seilpolygon  $abcd$  gezeichnet, so wird, da die Resultierende aller

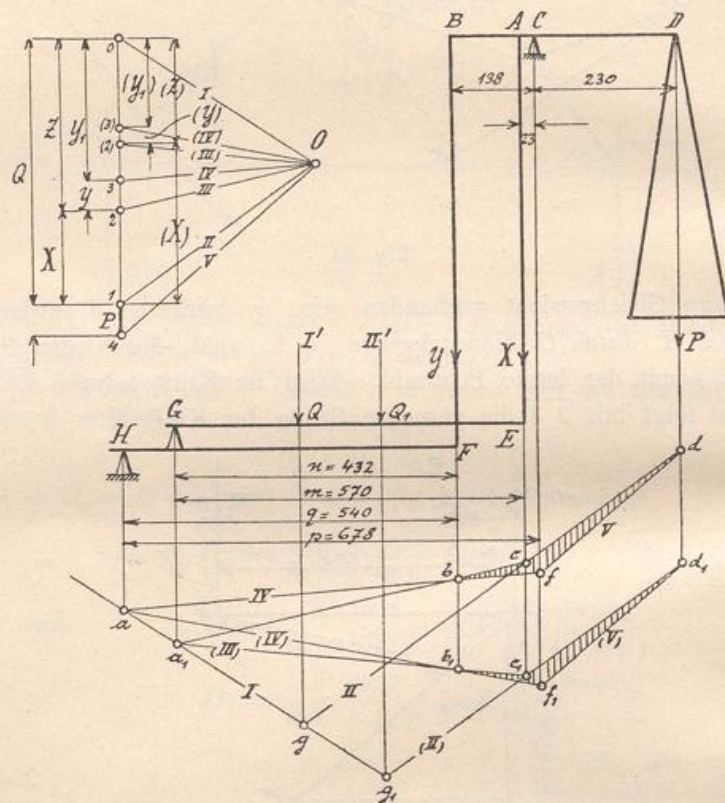


Fig. 56.

Kräfte ihren Angriffspunkt in  $C$  haben muß,  $\overline{fd}$  die Schlußseite des letzteren. Wird im Kräftepolygon  $\overline{O,4} \parallel \overline{fd}$  gezogen, so folgt die Größe von  $P$  mit  $\overline{1,4}$ .

Steht die Last auf der Brücke in  $II'$ , so wird die Untersuchung wie früher gemacht.

Da nun  $P$  sich so groß wie früher ergeben muß, folgt, daß  $\overline{c_1d_1} \parallel \overline{cd}$  und  $\overline{f_1d_1} \parallel \overline{fd} \parallel \overline{O,4}$  sein muß.

$$\begin{array}{l} \text{Nun} \\ \triangle aff_1 \sim \triangle abb_1 \\ \triangle a_1c_1c \sim \triangle a_1b_1b \end{array}$$

$$\text{Hieraus } \left. \begin{array}{l} p:q = \overline{ff_1} : \overline{bb_1} \\ m:n = \overline{cc_1} : \overline{bb_1} \end{array} \right\} \text{da } \overline{ff_1} : \overline{bb_1} = \overline{cc_1} : \overline{bb_1},$$

$$\text{ist auch } p:q = m:n.$$

Daher ist  $(p - q) : q = (m - n) : n$ , d. h.

$$\overline{BC} : \overline{FH} = \overline{AB} : \overline{FG} \text{ oder}$$

$$\overline{BC} : \overline{BA} = \overline{FH} : \overline{FG}$$

$$\overline{BC} : (\overline{BC} - \overline{BA}) = \overline{FH} : (\overline{FH} - \overline{FG}), \text{ somit}$$

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{FH} : \overline{GH}.$$

In bezug auf den Drehpunkt  $C$  gilt nun

$$P \cdot \overline{CD} = X \cdot \overline{AC} + Y \cdot \overline{BC}$$

$$Q = X + Z$$

$$Z = Q - X$$

Da  $Y \cdot \overline{FH} = Z \cdot \overline{GH}$  ist, folgt

$$Y = Z \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}}, \text{ demnach}$$

$$P \cdot \overline{CD} = X \cdot \overline{AC} + Z \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}$$

$$\text{Daher } P \cdot \overline{CD} = X \cdot \overline{AC} + (Q - X) \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}$$

$$P \cdot \overline{CD} = X \left[ \overline{AC} - \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC} \right] + Q \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}.$$

Soll der Zug  $X$  in der Stange  $\overline{AE}$  ohne Einfluß auf die Wägung sein, so muß

$$\overline{AC} - \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC} = 0 \text{ werden.}$$

$$\text{D. h. es muß gelten } \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}}$$

$$\text{Dann wird } P \cdot \overline{CD} = Q \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC} \text{ oder}$$

$$P \cdot \overline{CD} = Q \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \overline{BC}, \text{ d. h.}$$

$$P \cdot \overline{CD} = Q \cdot \overline{AC}.$$

$$\text{Wenn } \overline{CD} = 10 \cdot \overline{AC} \text{ ist, wird } P = \frac{1}{10} Q.$$

### § 19. Die Ritter'sche Methode zur Bestimmung der Spannungen in Fachwerkträgern.

Ein **Fachwerkträger** ist eine Verbindung von Gelenkstangen-Dreiecken, von denen je zwei benachbarte eine Seite gemein haben und deren Eckpunkte sämtlich in der äußeren Begrenzungslinie liegen, Fig. 57 u. 58.

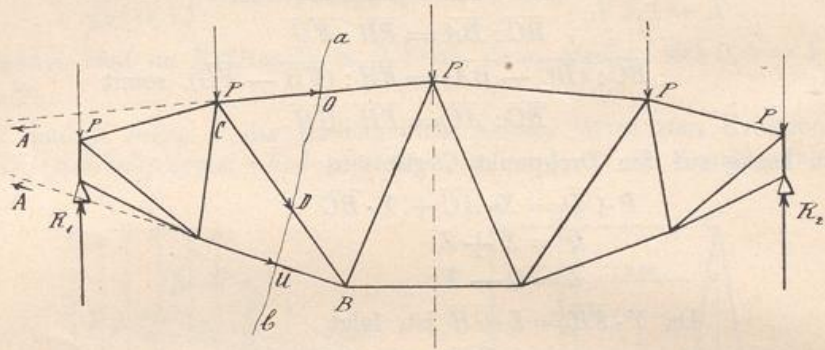


Fig. 57.

Greifen nun äußere Kräfte in den Gelenkpunkten an, so können in den Stäben nur Zug- und Druckspannungen auftreten.

Besteht die Belastung nicht ohne weiteres aus Kräften, die durch die Gelenkpunkte des Fachwerkträgers gehen, so ordnet man über (zwischen) diesen besondere Zwischenbalken an, welche die unmittelbare Belastung aufnehmen und dann auf die Gelenkpunkte übertragen, Fig. 58.

Die Gelenkpunkte heißen auch **Knotenpunkte des Fachwerkes**, die Stäbe, welche das Fachwerk oben und unten begrenzen, **Obergurten** und

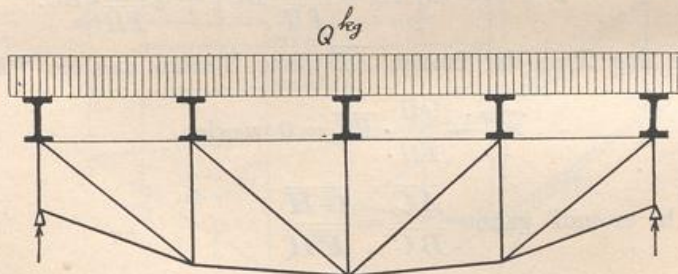


Fig. 58.

**Untergurten** mit den Spannungen  $O$  und  $U$ , die zwischen ihnen schief angebrachten Stäbe **Streben oder Diagonalen** mit den Spannungen  $D$ .

Behufs Auffindung der einzelnen Stabspannungen zerlegt man das Fachwerk durch einen Schnitt in zwei Teile und bringt an den Schnittstellen der Stäbe die Spannkkräfte derselben an. Diese Kräfte werden zur Schnittstelle hin angenommen.

Gleichgewicht ist im linken Trägerteil nun vorhanden, wenn die Summe der Drehmomente aller links vom Schnitte vorhandenen äußeren und der in den Stäben angebrachten Kräfte gleich Null ist. Dabei kann der Drehpunkt irgendwo in der Ebene des Fachwerkes angenommen werden.

Bei Kräften in der Ebene kann man, wie bereits in § 17 gezeigt wurde, drei voneinander unabhängige Gleichungen anschreiben, kann also für einen







Auflösung: Man beginne im ersten Fache am Auflager. Die in  $A$  wirkenden Kräfte  $P_1$ ,  $R$ ,  $O_1$  und  $U_1$  müssen im Gleichgewichte sein, also einen geschlossenen Kräftezug  $0, 1, I, \alpha, 0$  bilden. Derselbe wird konstruiert, indem man  $P_1 = 0,1$  und  $R_1 = 0,\alpha$  anträgt, dann durch 1 eine Parallele zu  $O_1$  und durch  $\alpha$  eine Parallele zu  $U_1$  zieht. Letztere Parallelen schneiden sich in  $I$ .

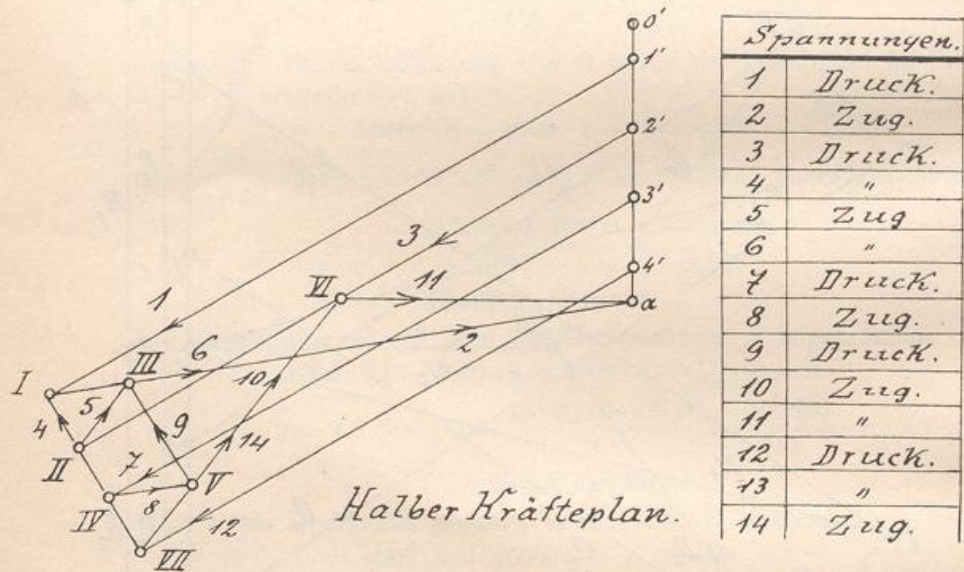
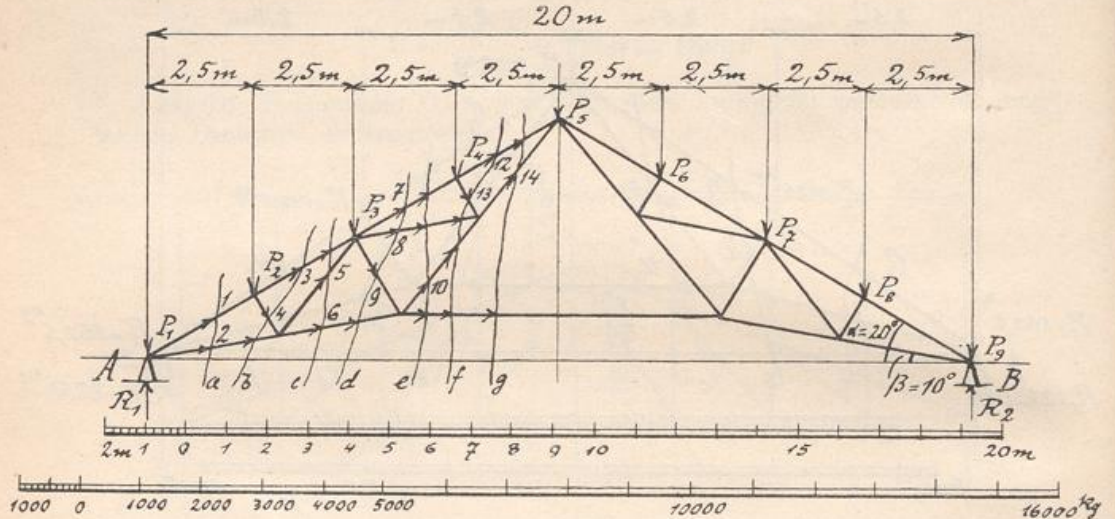


Fig. 62.

Hierdurch sind die Kräfte  $O_1$  und  $U_1$  bestimmt. Wirken nun die Spannungen von  $A$  weg, so sind sie Zugspannungen, im Gegenfalle Druckspannungen.  $O_1$  ergibt sich also als Druck,  $U_1$  als Zug.

Sind derart die Spannungen im ersten Fache gefunden, so nehme man jenes Fach als nächstes, von dessen Knotenpunkte aus höchstens zwei unbekannte Spannungen wirken. In vorliegendem Beispiele ist das Gleichgewicht

für den Punkt  $C$  zu bestimmen. Es wird jetzt ein Schnitt  $b$  durch das Fachwerk geführt und alles rechts vom Schnitte Befindliche weggedacht. Die neuen, unbekanntenen Kräfte  $O_2$  und  $D_1$  müssen nun, wenn man sie als hinzugefügte, äußere Kräfte ansieht, mit den links vom Schnitte vorhandenen und mit  $U_1$  im Gleichgewichte sein. Zu diesem Ende wird der Kräftezug  $0, 1, 2, II, I, a, 0$  verzeichnet, wodurch  $O_2$  und  $D_1$  sich ergeben.

Es ist leicht zu erkennen, daß eine Stabspannung nur einmal im Kräfteplan auftritt.

Wie schon angeführt, ist das Cremona'sche Verfahren als zeichnerisches ungenauer als das Ritter'sche. Es hat außerdem noch den Nachteil, daß man behufs Ermittlung der Spannungen an einer bestimmten Stelle des Fachwerkes alle anderen Spannungen, von einem Ende desselben aus genommen, aufsuchen muß.

86. Es sind die Spannungen in den Stäben des in Fig. 62 gezeichneten Doppel-Polonceauträgers graphisch zu ermitteln. Derselbe ist ein Binder eines Daches, das mit  $150 \text{ kg pro } 1 \text{ qm}$  Horizontalprojektion belastet ist. Die Entfernung der Binder beträgt  $3 \text{ m}$ .

Auflösung: Ein Feld des Daches hat eine Horizontalprojektion im Ausmaße von

$$2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ qm,}$$

empfangt daher eine Belastung von

$$7,5 \cdot 150 = 1125 \text{ kg.}$$

Jeder Knotenpunkt hat

somit  $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1125 \text{ kg}$  Last aufzunehmen; nur die Auflagerstellen sind mit

$\frac{1}{2} \cdot 1125 = 562,5 \text{ kg}$  beansprucht.  $R_1$  und  $R_2$  ergeben sich mit  $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1125 = 4500 \text{ kg}$ .

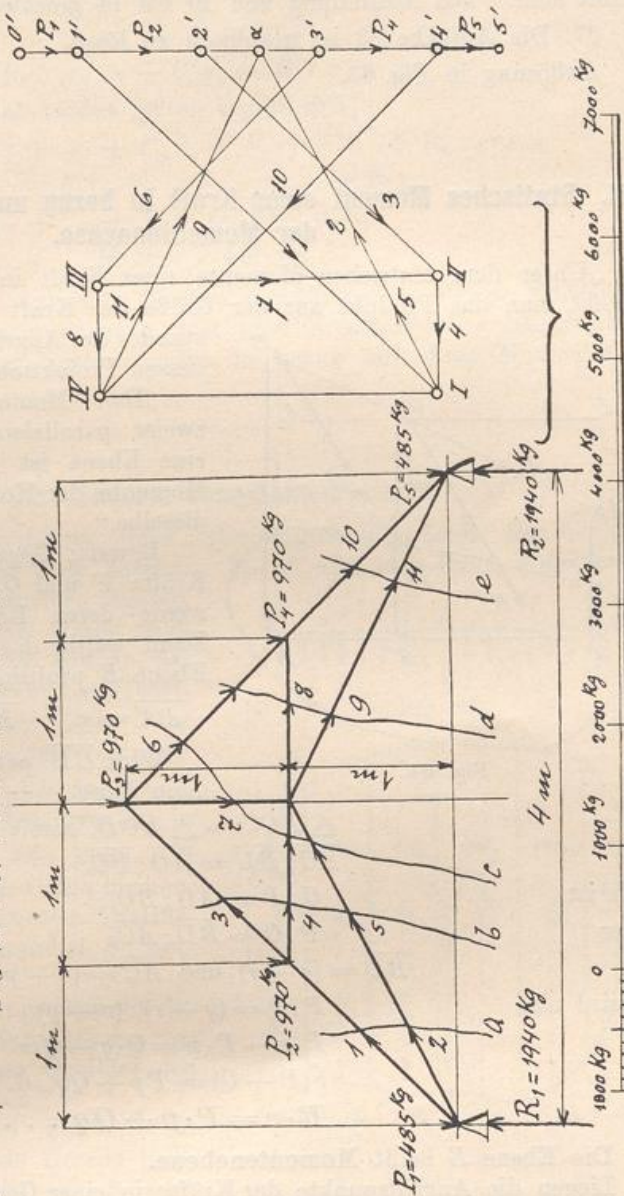


Fig. 63.



Die Spannungen 1 bis 6 werden wie im vorigen Beispiele bestimmt. Behufs Ermittlung der Beanspruchungen 7, 8 und 9 ist ein kleiner Kunstgriff nötig. Derselbe besteht nämlich darin, daß man 7 zwischen  $\overline{O', 3'}$  und  $\overline{I, IV}$  verzeichnet. Die Spannungen 8 und 9 werden hierauf von  $IV$  und  $III$  aus auftragen, so daß Punkt  $V$  sich ergibt, wodurch die Größen von 8 und 9 bestimmt sind. Die Auffindung von 10 bis 14 geschieht wie früher. —

87. Die Aufgabe 83 ist graphisch zu lösen.  
Auflösung in Fig. 63.

**§ 21. Statisches Moment einer Kraft in bezug auf eine Ebene. Begriff der Momentenachse.**

„Unter dem statischen Momente einer Kraft in bezug auf eine Ebene versteht man das Produkt aus der Größe der Kraft und der Größe des Abstandes des Angriffspunktes derselben von dessen Projektion auf die Ebene.“

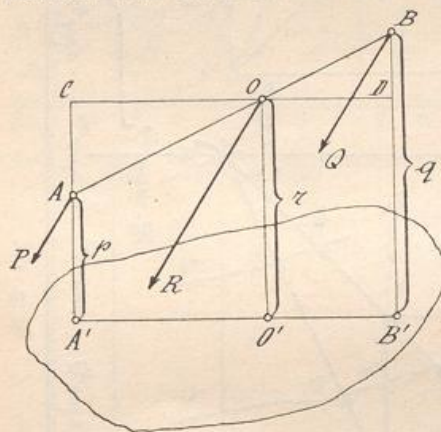


Fig. 64.

„Das Moment der Resultierenden zweier parallelen Kräfte in bezug auf eine Ebene ist gleich der Summe der Momente der Komponenten in bezug auf dieselbe.“

Beweis: Gegeben seien die parallelen Kräfte  $P$  und  $Q$ , Fig. 64. — Zunächst werde deren Resultierende  $R$  gesucht. Dann werde das ganze System auf die Ebene  $E$  projiziert und seien

$$\overline{AA'} = p, \quad \overline{BB'} = q, \quad \overline{OO'} = r,$$

Wird  $\overline{CD}$  parallel zu  $\overline{A'B'}$  gezogen, dann folgt

$$\triangle AOC \sim \triangle BOD, \text{ somit}$$

$$\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{AO} : \overline{BO}.$$

Auch ist

$$Q : P = \overline{AO} : \overline{BO}.$$

Daher

$$P : Q = \overline{BD} : \overline{AC}.$$

Nun

$$\overline{BD} = (q - r) \text{ und } \overline{AC} = (r - p).$$

Es wird also

$$P : Q = (q - r) : (r - p)$$

$$P \cdot r - P \cdot p = Q \cdot q - Q \cdot r$$

$$r(P + Q) = Pp + Qq, \text{ d. h.}$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} \dots \dots \dots (47)$$

Die Ebene  $E$  heißt **Momentenebene**.

Liegen die Angriffspunkte der Kräfte in einer Geraden oder in einer zur Momentenebene senkrechten Ebene, so kann man die statischen Momente der Kräfte auch in bezug auf jene Gerade, welche sich als Projektion der Angriffspunkte auf die Ebene ergibt, nehmen. Diese Gerade heißt **Momentenachse**.

Sind mehrere parallele Kräfte vorhanden, so setze man zunächst zwei zu einer Resultierenden zusammen, die Resultierende mit der dritten Kraft,

usw. Heißen die einzelnen parallelen Kräfte  $P_1, P_2 \dots P_n$  und sind die Abstände ihrer Angriffspunkte von der Momentenachse  $p_1, p_2 \dots p_n$ , so gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} P_1 p_1 + P_2 p_2 &= R_1 r_1 \\ R_1 r_1 + P_3 p_3 &= R_2 r_2 \\ &\vdots \\ R_{n-1} r_{n-1} + P_n p_n &= R \cdot r \end{aligned}$$

Durch Addition auf beiden Seiten ergibt sich

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n + R_1 r_1 + \dots + R_{n-1} r_{n-1} = R_1 r_1 + \dots + R_{n-1} r_{n-1} + R \cdot r,$$

oder  $P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n = R \cdot r$ , d. h.

$$R \cdot r = \Sigma (P \cdot p) \dots \dots \dots (48)$$

„Die Summe der statischen Momente mehrerer parallelen Einzelkräfte in bezug auf eine Momentenebene oder eine Momentenachse ist gleich dem statischen Momente der Resultierenden in bezug auf diese Momentenebene oder Momentenachse.“ —

§ 22. Theorie vom Schwerpunkte.

In den einzelnen Punkten einer materiell gedachten Linie, Fig. 65, wirken deren Gewichte vertikal nach abwärts. Es ist also eine Reihe von parallelen Kräften vorhanden. Dieselben ergeben eine Resultierende, deren Größe nach früherem gleich ist der Summe der Einzelkräfte, also gleich dem Totalgewichte der materiellen Linie. Ihr Angriffspunkt liegt in einem bestimmten Punkte der Linie  $AB$  und zwar, wenn dieselbe überall homogen ist, in deren Mittelpunkt. Die Linie  $AB$  würde also im Gleichgewichte bleiben, wenn man sie in genanntem Angriffspunkte der Resultierenden  $S$  festmachen würde.

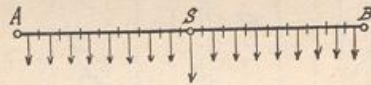


Fig. 65.

„Man nennt den Angriffspunkt der Resultierenden aller Gewichte der materiellen Teilchen eines Gebildes den **Schwerpunkt** desselben.“

„Jede durch den Schwerpunkt eines Gebildes gehende Gerade heißt **Schwerlinie**. Dieselbe ist oft auch eine Symmetrielinie.“

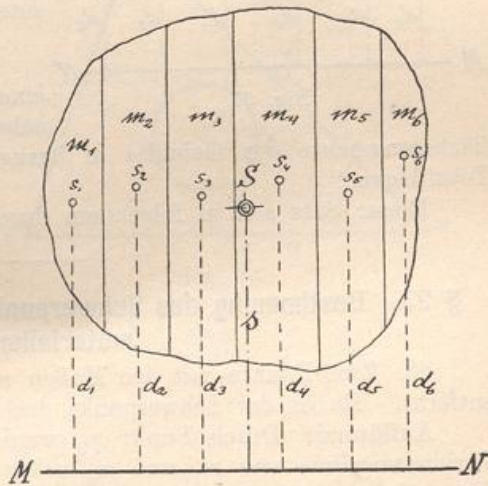


Fig. 66.

Eine ebene Fläche kann man in unendlich viele schmale Streifchen zerlegen, deren jedes als eine materielle Linie aufzufassen ist, Fig. 66. Jedes derselben besitzt nun einen Mittelpunkt, in welchem deren Gewicht vertikal nach abwärts wirkt. Nun gibt es eine

Totalresultierende aller Teilresultierenden mit einem bestimmten Angriffspunkt. Würde das ebene Gebilde in letzteren unterstützt werden, so wäre es im Gleichgewicht.

Um die Lage des Schwerpunktes einer Fläche zu berechnen, teile man sie also in eine unendlich große Zahl von Streifen ein und beziehe die Momente ihrer Gewichte auf eine Momentenachse, welche irgend eine Gerade sein kann, die mit der Fläche in einer Ebene liegt. Die Summe der statischen Momente aller Teilmassen in bezug auf diese Momentenachse muß dann dem statischen Momente der ganzen Masse in bezug auf sie sein. — Sind die Massenteilchen der Reihe nach  $m_1, m_2 \dots$  und deren Abstände von der Achse  $d_1, d_2 \dots$ , so wird

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_n d_n = M \cdot s$$

und hieraus

$$s = \frac{\Sigma(m \cdot d)}{M} \dots \dots \dots (49)$$

„Die Entfernung des Schwerpunktes von der Momentenachse einer Fläche ist gleich der Summe der statischen Momente aller einzelnen Teilmassen der Fläche in bezug auf diese Achse dividiert durch die Totalmasse der Fläche.“

Ist die Masse der Flächeneinheit nun  $\delta$  und die Fläche gleichmäßig mit Masse belegt gedacht, so hat die beliebige Fläche  $f$  die Masse  $f \cdot \delta$ .

Bedeutet nun  $f_1, f_2 \dots$  die Flächenteilchen eines Gebildes (Fig. 67), so sind die Massen derselben  $m_1 = f_1 \delta, m_2 = f_2 \delta \dots$

Die Größen der Massen  $m_1, m_2 \dots$  in die Gleichung der statischen Momente substituiert, folgt

$$f_1 \delta \cdot d_1 + f_2 \delta \cdot d_2 + \dots = F \cdot \delta \cdot s$$

somit 
$$s = \frac{\Sigma(f d)}{F} \dots \dots (50)$$

„Die Entfernung des Schwerpunktes eines ebenen Gebildes von einer Momentenachse ist gleich der Summe der Teilflächenmomente des Gebildes in bezug auf dieselbe dividiert durch dessen Totalfläche.“

Dieser Satz soll in folgendem durch einige Beispiele eingeübt werden.

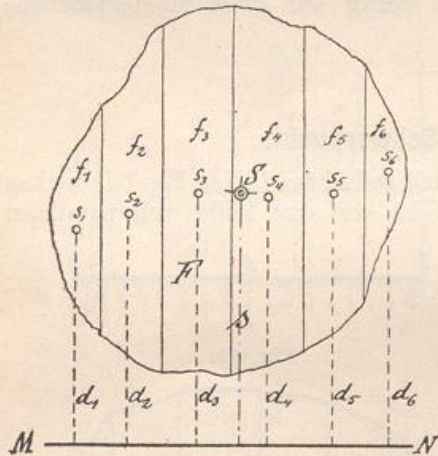


Fig. 67.

**§ 23. Bestimmung des Schwerpunktes von Punktsystemen und von materiellen Linien.**

88. Zwei Punkte mit den Maßen  $m_1$  und  $m_2$  liegen  $l$  Meter voneinander entfernt. Es ist der Schwerpunkt des Punktsystems zu suchen.

Auflösung: Durch Punkt  $m_1$  werde eine Momentenachse senkrecht zur Verbindungslinie von  $m_1$  und  $m_2$  gelegt. Hat nun der Schwerpunkt  $S$  von dieser Achse den Abstand  $x$ , dann gilt

$$(m_1 + m_2) \cdot x = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l$$

$$x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$

89. Wo liegt der Schwerpunkt von Erde und Mond, wenn die Masse der ersteren 80mal so groß ist wie die des letzteren und beide Himmelskörper den Abstand von 60 Erdradien haben?

Auflösung: 
$$x = \frac{m_2 \cdot l}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot l}{81 m_2} = \frac{81}{l}$$

$$x = \frac{l}{81}$$

Der Schwerpunkt liegt in  $\frac{1}{81}$  der Entfernung beider Himmelskörper von der Erde aus gerechnet.

90. Der Schwerpunkt eines Systems von drei materiellen Punkten ist aufzusuchen. Fig. 68.

Auflösung: Ist die Momentenachse  $m_1 m_2$ , dann gilt

$$(m_1 + m_2 + m_3) x_3 = m_3 h_3$$

$$x_3 = \frac{m_3}{\Sigma(m)} \cdot h_3$$

$$x_2 = \frac{m_2}{\Sigma(m)} \cdot h_2$$

$$x_1 = \frac{m_1}{\Sigma(m)} \cdot h_1$$

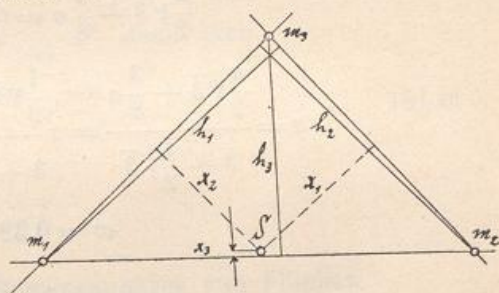


Fig. 68.

91. In dem in Fig. 69 gezeichneten Liniengebilde den Schwerpunktsabstand  $x$  zu finden.

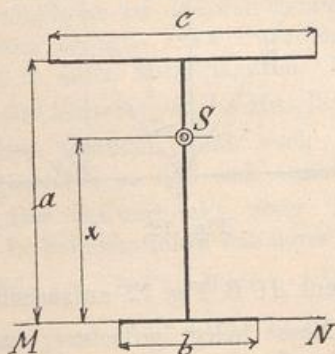


Fig. 69.

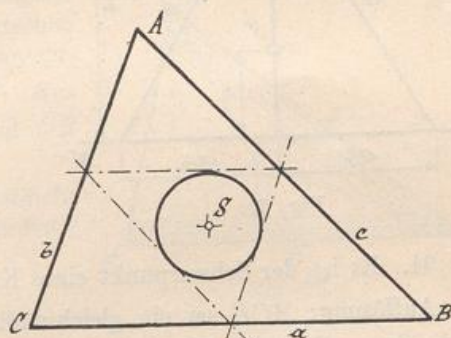


Fig. 70.

Auflösung: 
$$a \cdot c + \frac{a \cdot a}{2} + b \cdot 0 = (a + b + c) \cdot x$$

$$\frac{a}{2} \cdot (a + 2c) = (a + b + c) \cdot x$$

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{a + 2c}{a + b + c}$$

92. Der Schwerpunkt eines Dreiecksumfanges ist zu suchen. Fig. 70.

Auflösung: Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten sind die Schwerpunkte derselben. Daher sind deren Verbindungslinien Schwerlinien. Der Schwer-

punkt des Dreieckumfangs ist demnach der Mittelpunkt des Kreises, welcher dem aus letzteren Schwerlinien gebildeten Dreiecke eingeschrieben ist.

93. Der Schwerpunkt eines Linienzuges, welcher aus den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks und aus dessen Höhe gebildet ist, soll gesucht werden. Gegeben die Dreiecksseite  $a$ . Fig. 71.

Auflösung: Die Schwerpunkte der Schenkel sind um  $\frac{h}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$  von der Achse  $\overline{MN}$  entfernt.

$$a \cdot 0 + 2a \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} + \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} = (3a + \frac{a}{2}\sqrt{3}) \cdot x$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{8}a = (3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \cdot x$$

$$x = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{8}a}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = a \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{8}}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{4} \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6 + \sqrt{3}}$$

$$x = 0,321 a.$$

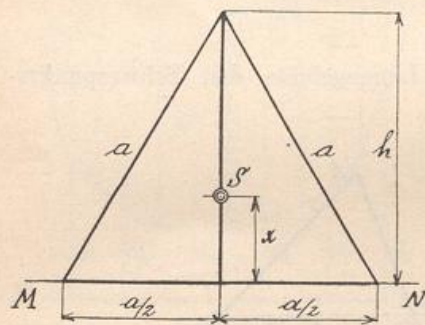


Fig. 71.

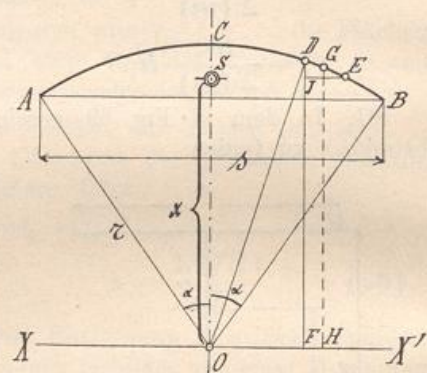


Fig. 72.

94. Es ist der Schwerpunkt eines Kreisbogens  $ACB$ , Fig. 72, aufzusuchen.

Auflösung:  $ACB$  sei ein gleichmäßig mit Masse belegt gedachter, aus  $O$  beschriebener Bogen. Derselbe kann aus lauter unendlich kleinen Elementen  $DE$  zusammengesetzt gedacht werden. In bezug auf die Momentenachse  $XX'$  ist dann das statische Moment von  $DE$  gleich  $\overline{DE} \cdot \overline{DF}$  (eigentlich  $\overline{DE} \cdot \overline{GH}$ , aber wegen der Kleinheit von  $DE$  kann statt  $\overline{GH} \dots \overline{DF}$  gesetzt werden).

Da  $\triangle DEJ \sim \triangle DOF$  ist, wird  $\overline{DE} : \overline{EJ} = \overline{OD} : \overline{DF}$ , d. h.

$$\overline{DE} \cdot \overline{DF} = \overline{OD} \cdot \overline{EJ}$$

Die Summe der statischen Momente aller Kreisteilchen in bezug auf  $\overline{XX'}$  ist

$$\Sigma (\overline{DE} \cdot \overline{DF}) = \Sigma (\overline{OD} \cdot \overline{EJ}) = \overline{OD} \cdot \Sigma (\overline{EJ}) = r \cdot \Sigma (\overline{EJ})$$

$$\Sigma (\overline{EJ}) = \overline{AB} = s$$

Ist der Abstand des Schwerpunktes  $S$  von  $XX' \dots x$ , dann folgt, wenn der Bogen  $ACB$  kurz mit  $b$  bezeichnet wird,

$$b \cdot x = r \cdot s \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{r \cdot s}{b} \dots \dots \dots (51a)$$

Ist bloß  $r$  und ferner der Winkel  $\alpha$  gegeben, dann wird wegen  $b = 2 \cdot r \cdot \hat{\alpha}$  und  $s = 2r \sin \alpha$

$$x = \frac{r \cdot 2r \sin \alpha}{2r \cdot \hat{\alpha}}$$

$$x = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\hat{\alpha}} \dots \dots \dots (51b)$$

Nun  $\hat{\alpha} : \alpha^0 = \pi : 180^0$ , daher  $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0$ , somit auch

$$x = \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} \dots \dots \dots (51c)$$

**§ 24. Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen.**

95. Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ist zu finden.

Auflösung: In Fig. 73 ist die Höhe  $h$  in unendlich viele Teile geteilt und durch die Teilpunkte sind Parallele zur Grundlinie  $AC$  gezogen. Die Dreiecksfläche ist dadurch in lauter homogene Strecken zerlegt. Die Schwerpunkte derselben liegen in deren Mittelpunkten. Der geometrische Ort letzterer ist die Mittellinie  $BF$ . Aus gleichen Gründen sind auch  $AD$  und  $CE$  Schwerlinien, so daß sich ergibt:

„Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche liegt im Schnittpunkte von deren Mittellinien.“

Da  $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$  ist, folgt  
 $\overline{DF} : \overline{AB} = 1 : 2$

Das Verhältnis  $\overline{SF} : \overline{SB}$  ist gleich dem Verhältnis  $\overline{DF} : \overline{AB}$ , somit wird  
 $\overline{SF} : \overline{SB} = 1 : 2$

$$(\overline{SF} + \overline{SB}) : \overline{SF} = (1 + 2) : 1 \quad \text{oder}$$

$$\overline{SF} : \overline{BF} = 1 : 3.$$

Ebenso ergeben sich  $\overline{SD} : \overline{AD} = 1 : 3$  und

$$\overline{SE} : \overline{CE} = 1 : 3, \quad \text{d. h. :}$$

Der Schwerpunkt hat von der Grundlinie den Abstand

$$x = \frac{h}{3} \dots \dots \dots (52)$$

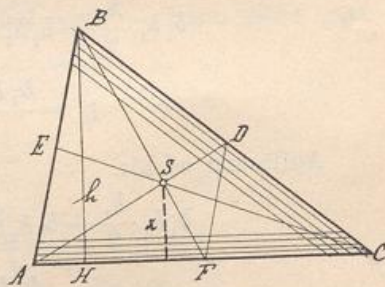


Fig. 73.

96. Die Schwerpunkte der in den Fig. 74a bis 74d gezeichneten Flächen zu bestimmen.

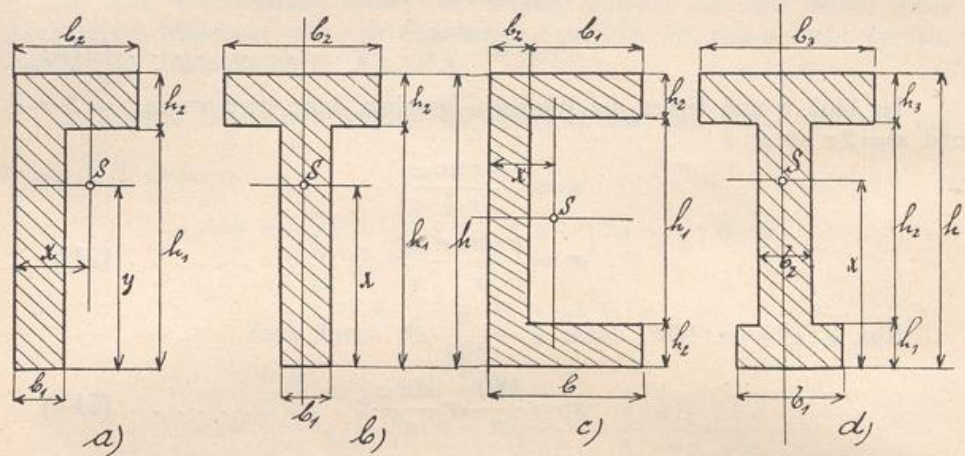


Fig. 74.

Auflösung ad a):

$$h_1 b_1 \cdot \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \cdot \frac{b_2}{2} = (b_1 h_1 + b_2 h_2) \cdot x$$

$$x = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

$$b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \left( h_1 + \frac{h_2}{2} \right) = (b_1 h_1 + b_2 h_2) \cdot y$$

$$y = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

Auflösung ad b):

$$b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \left( \frac{h_2}{2} + h_1 \right) = (b_1 h_1 + b_2 h_2) \cdot x$$

$$x = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

Auflösung ad c):

$$2h_2 b \cdot \frac{b}{2} + h_1 b_2 \cdot \frac{b_2}{2} = (h_1 b_2 + 2h_2 b) \cdot x$$

$$x = \frac{2b^2 h_2 + b_2^2 h_1}{2(2b h_2 + h_1 b_2)}$$

Auflösung ad d):

$$b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \left( \frac{h_2}{2} + h_1 \right) + b_3 h_3 \left( h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} \right) = (b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3) x$$

$$x = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2) + b_3 h_3 (2h_1 + 2h_2 + h_3)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)}$$

97. Schwerpunkt eines Trapezes.

a) Auflösung auf dem Wege der Rechnung. Fig. 75.

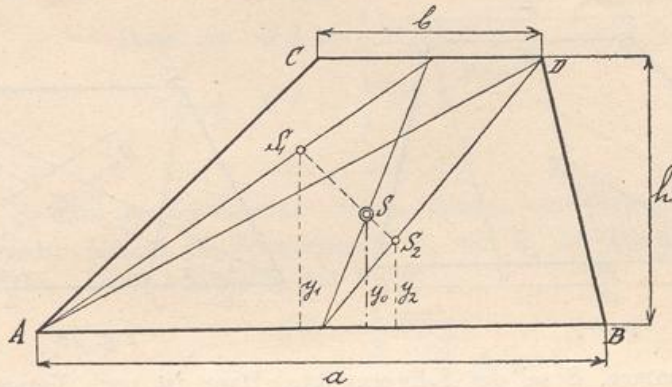


Fig. 75.

$$\begin{aligned}
 F \cdot y_0 &= F_1 y_1 + F_2 y_2 \\
 h \cdot \frac{a+b}{2} \cdot y_0 &= \frac{bh}{2} \cdot \frac{2}{3}h + \frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{3} \\
 (a+b) \cdot y_0 &= \frac{h}{3} (a+2b) \\
 y_0 &= \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} \dots \dots \dots (53)
 \end{aligned}$$

b) Auflösung auf konstruktivem Wege. Fig. 76.

Man mache  $BH = AJ = b$  und  $CK = DG = a$ . — Dann ziehe man

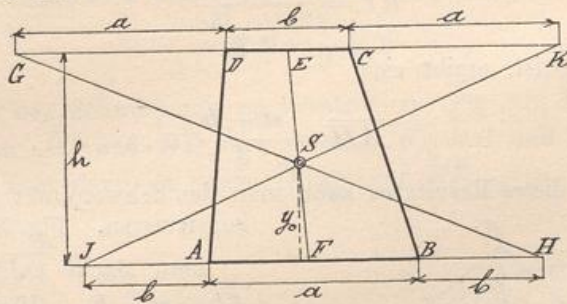


Fig. 76.

$\overline{HG}$  und  $\overline{JK}$ , so ist der Schnittpunkt letzterer Linien der gesuchte Schwerpunkt.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \triangle SEG &\sim \triangle SFH \\
 \overline{SF} : \overline{SE} &= \overline{FH} : \overline{EG} \\
 \overline{SF} : \overline{SE} &= \left(\frac{a}{2} + b\right) : \left(\frac{b}{2} + a\right) \\
 \overline{SF} : \overline{SE} &= (a + 2b) : (b + 2a) \\
 \overline{SF} : (\overline{SE} + \overline{SF}) &= (a + 2b) : (3a + 3b) \\
 y_0 : h &= (a + 2b) : 3(a + b) \\
 y_0 &= \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}, \text{ was zu beweisen war.}
 \end{aligned}$$



e) Verfahren von G. Lang und R. Land. (S. Riga'sche Industriezeitung, Jahrgang 1883, Seite 26.) — Fig. 77.

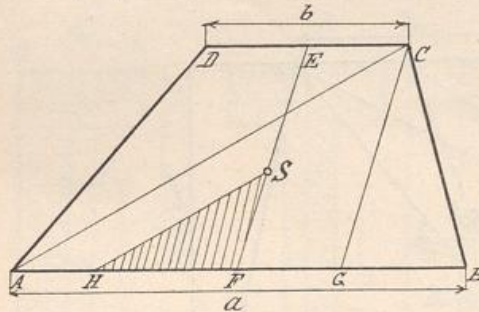


Fig. 77.

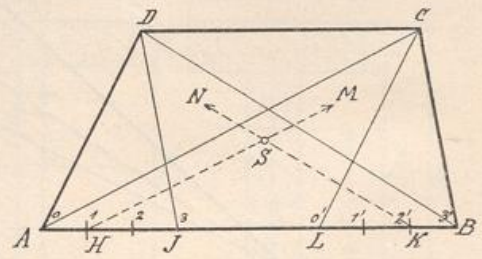


Fig. 78.

Angenommen,  $S$  sei der Schwerpunkt. Dann ist nach Vorigem

$$\overline{SF} : \overline{FE} = (2b + a) : (3a + 3b)$$

Wenn nun  $\overline{HS} \parallel \overline{AC}$  und  $\overline{CG} \parallel \overline{EF}$  sind, wird

$$\begin{aligned} \triangle HSF &\sim \triangle ACG, \text{ daher} \\ \overline{HF} : \overline{AG} &= \overline{SF} : \overline{CG} = \overline{SF} : \overline{EF} \\ \overline{HF} : \overline{AG} &= (2b + a) : (3a + 3b) \end{aligned}$$

Nun ist aber  $\overline{AG} = \frac{a+b}{2}$ , folglich

$$\begin{aligned} \overline{HF} &= \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2b+a}{3(a+b)} = \frac{2b+a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{2} - \frac{a}{3} \\ \overline{HF} &= \frac{a}{2} - \frac{a-b}{3} \end{aligned}$$

Da  $\overline{AF} = \frac{a}{2}$  ist, ergibt sich

$$\overline{AH} = \frac{a-b}{3} \dots \dots \dots (54)$$

Auf Grund dieses Resultates kann man den Schwerpunkt folgendermaßen konstruieren. Fig. 78.

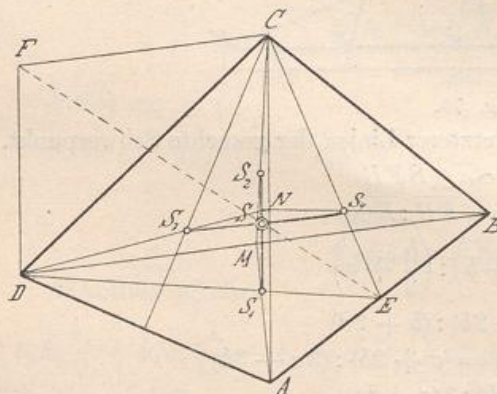


Fig. 79.

Man mache  $\overline{DJ} \parallel \overline{CB}$ , dann ist  $\overline{AJ} = (a-b)$ . Hierauf wird  $\overline{AH} = \frac{1}{3} \overline{AJ}$  gesucht und  $\overline{HM}$  parallel zu  $\overline{AC}$  gezogen.

Ebenso mache man  $\overline{CL} \parallel \overline{AD}$ ,  $\overline{BK} = \frac{1}{3} \overline{BL}$

und ziehe man  $\overline{KN} \parallel \overline{BD}$ .

Der gesuchte Schwerpunkt liegt dann im Schnittpunkte von  $\overline{HM}$  u.  $\overline{KN}$

98. Schwerpunkt eines Trapezoides (nach R. Land). Fig. 79.

Auflösung: Man ziehe die Diagonale  $\overline{BD}$  und halbiere sie, d. h. man mache

$$\overline{MD} = \overline{MB}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dann ist } \overline{MS}_1 = \frac{1}{3} \overline{MA} \\ \text{und } \overline{MS}_2 = \frac{1}{3} \overline{MC} \end{array} \right\} \text{somit}$$

$$\overline{S_1S_2} \parallel \overline{AC}.$$

In  $\overline{S_1S_2}$  muß der Schwerpunkt liegen. Ebenso wird auch die  $\overline{AC}$  halbiert.

Es werden hierauf die Schwerpunkte  $S_3$  und  $S_4$  der Dreiecke  $ACD$  und  $ABC$  gesucht. Dann ist analog wie früher

$$\left. \begin{array}{l} \overline{NS}_3 = \frac{1}{3} \overline{ND} \\ \text{und } \overline{NS}_4 = \frac{1}{3} \overline{NB} \end{array} \right\} \text{folglich}$$

$$\overline{S_3S_4} \parallel \overline{DB}.$$

Im Schnitte von  $\overline{S_1S_2}$  und  $\overline{S_3S_4}$  liegt der gesuchte Schwerpunkt  $S$ . — Werden  $\overline{DE}$  und  $\overline{CE}$  eingezeichnet und  $\overline{CF} \parallel \overline{DB}$  und  $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$  gezogen, so ergibt sich

$$\begin{array}{l} \overline{S_1S_2} \parallel \overline{DF} \\ \text{und } \overline{S_3S_4} \parallel \overline{CF} \end{array}$$

Nun gilt die Beziehung  $\overline{ES}_4 : \overline{EC} = \overline{ES}_1 : \overline{ED}$ , daher ist

$$\text{Fläche } \overline{ES_1SS_4} \sim \text{Fläche } \overline{EDFC},$$

somit ist die Linie  $\overline{ESF}$  eine Gerade und wird

$$\overline{ES} = \frac{1}{3} \overline{EF} \dots \dots \dots (55)$$

Um nun den Schwerpunkt zu konstruieren (Fig 80), ziehe man zunächst die Diagonalen  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  und mache  $\overline{CF} \parallel \overline{DB}$  und  $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ . — Der Schwerpunkt liegt dann im ersten Drittel von  $\overline{EF}$ .

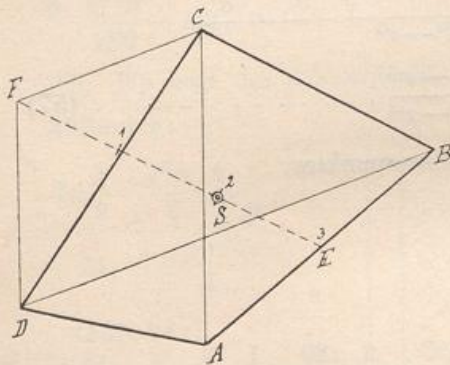


Fig. 80.

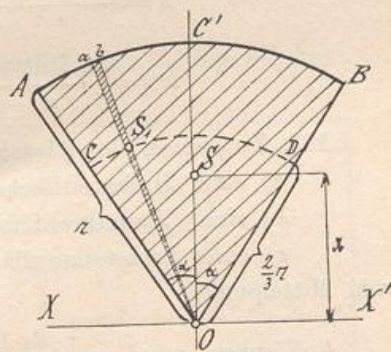


Fig. 81.

99. Man suche den Schwerpunkt eines Kreissektors (Kreisausschnittes), Fig. 81.

Auflösung: Wird aus dem Ausschnitte das unendlich kleine Dreieck  $Oab$  herausgegriffen, so liegt dessen Schwerpunkt  $S_1$  in der Entfernung  $\frac{2}{3} r$  von  $O$ . — Der Kreis  $CD$  mit dem Radius  $\frac{2}{3} r$  ist also eine Schwerlinie des Ausschnittes. Sein Schwerpunkt ist demnach derjenige desselben.

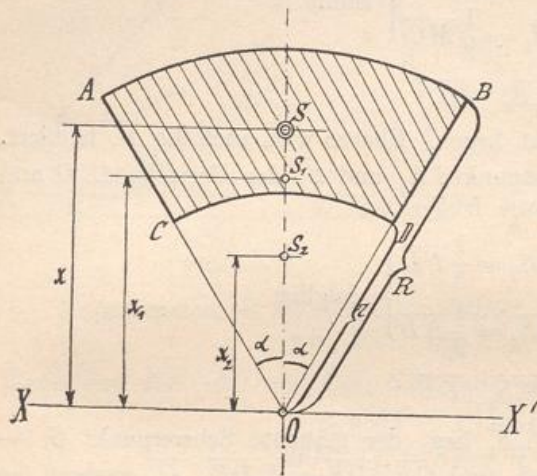


Fig. 82.

Sein Schwerpunkt ist demnach derjenige desselben.

Somit gilt unter Verwendung der Gleichung (51c)

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} \quad (56)$$

100. Der Schwerpunkt eines Kreisringstückes, Fig. 82, ist zu suchen.

Auflösung: Das statische Moment des Kreisringstückes ist gleich demjenigen des Sektors  $OAB$  minus dem des Sektors  $OCD$ .

Demnach gilt

$$\begin{aligned} ABCD \cdot x &= OAB \cdot x_1 - OCD \cdot x_2 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 R \cdot \hat{\alpha} \cdot R \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot 2 r \alpha \cdot r \cdot x_2 \\ x &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 R \cdot \hat{\alpha} \cdot R^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 r \cdot \hat{\alpha} \cdot r^2}{R^2 - r^2} \\ x &= \frac{R^2 \cdot x_1 - r^2 \cdot x_2}{R^2 - r^2} \\ x &= \frac{R^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} - r^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0}}{R^2 - r^2} \\ x &= \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \dots \dots \dots (57) \end{aligned}$$

101. Zu suchen der Abstand des Schwerpunktes

- a) einer Halbkreisfläche,
- b) einer Viertelkreisfläche,
- c) einer Sechstelkreisfläche

vom Mittelpunkt.

Auflösung: ad a)  $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin 90}{90} = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{1}{90}$

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \dots \dots \dots (58)$$

$$\text{ad b) } x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin 45}{45} = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 45}$$

$$x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \dots \dots \dots (59)$$

$$\text{ad c) } x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin 30}{30} = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{1}{2 \cdot 30}$$

$$x = 2 \cdot \frac{r}{\pi} \dots \dots \dots (60)$$

102. Der Abstand des Schwerpunktes eines Kreissegmentes (Kreisabschnittes) von seinem Mittelpunkt ist zu suchen. Fig. 83.

$$x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} - \frac{1}{2} \cdot 2r \sin \alpha \cdot r \cos \alpha \cdot \frac{2r \cos \alpha}{3}}{\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r - \frac{1}{2} \cdot 2r \sin \alpha \cdot r \cdot \cos \alpha}$$

$$x = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} \cdot r^3 \cdot \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{2}{3} r^3 \cdot \sin \alpha \cos^2 \alpha}{r^2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha} - r^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$x = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} \cdot r^3 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0 - \frac{2}{3} \cdot \sin \alpha \cos^2 \alpha}{r^2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0 - r^2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin \alpha - r \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\frac{\pi}{180} \alpha^0 - \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha - \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\frac{\pi}{180} \alpha^0 - \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$x = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{\frac{\pi}{180} \alpha^0 - \sin \alpha \cos \alpha} \dots \dots \dots (61)$$

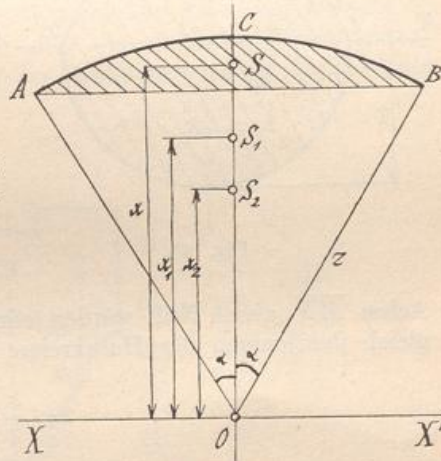


Fig. 83.

103. Wo liegt der Schwerpunkt der in Fig. 84 gezeichneten Fläche?

Auflösung:

$$x = \frac{bh \frac{h}{2} - \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}}{bh - \frac{\pi r^2}{2}}$$

$$x = \frac{3bh^2 - 4r^3}{6bh - 3\pi r^2}$$

$$x = \frac{3bh^2 - 4r^3}{3(2bh - \pi r^2)}$$

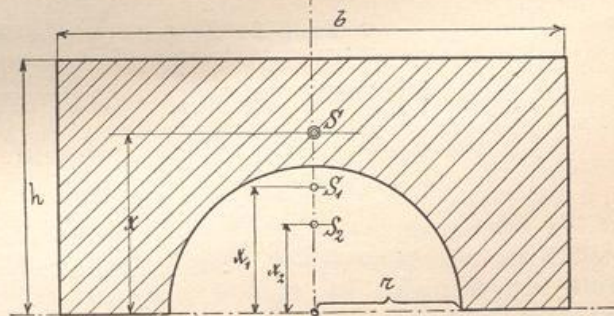


Fig. 84.

104. Eine Fläche besteht aus einem gleichschenkligen Dreiecke und einem Halbkreis, dessen Durchmesser gleich ist der Basis des Dreieckes. — Wo muß der Schwerpunkt des letzteren liegen, damit derjenige der ganzen Fläche in den Mittelpunkt des Halbkreises falle? Fig. 85.

Auflösung: Soll  $O$  der Schwerpunkt der Fläche sein, dann muß die Summe der statischen Momente von Dreieck und Halbkreis in bezug auf die

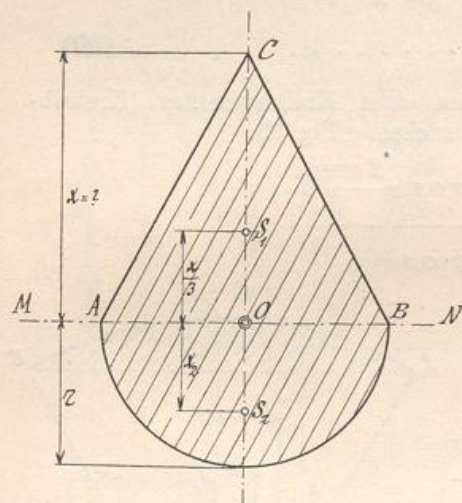


Fig. 85.

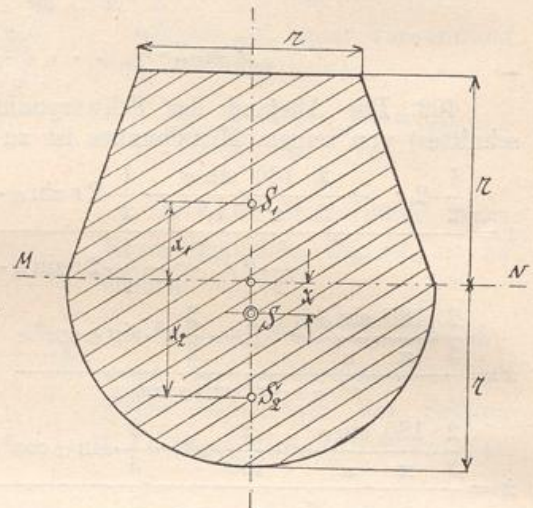


Fig. 86.

Achse  $\overline{MN}$  gleich Null werden oder das statische Moment des Dreieckes muß gleich demjenigen des Halbkreises sein, also

$$2r \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

$$rx^2 = 2r^3$$

$$x = r\sqrt{2}.$$

105. Wo liegt der Schwerpunkt einer Fläche, welche aus einem Halbkreis und einem gleichschenkligen Trapeze mit den Paralleseiten  $2r$  und  $r$  und der Höhe  $r$  zusammengesetzt ist? Fig. 86.

$$x = \frac{\frac{r}{3} \cdot \frac{2r+2r}{2r+r} \cdot \frac{2r+r}{2} \cdot r - \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}}{\frac{2r+r}{2} \cdot r + \frac{r^2 \pi}{2}} = \frac{\frac{2r^3}{3} - \frac{2r^3}{3}}{\frac{3r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2}}$$

$$x = 0.$$

## § 25. Graphische Ermittlung des Schwerpunktes ebener Flächen.

Dem exakten Zeichner wird es durch folgende Methode ermöglicht, den Schwerpunkt beliebiger Figuren graphisch zu ermitteln.

Man zerlege die gegebene Fläche in Teile, deren Schwerpunkte bekannt sind, Fig. 87. In letzterer denke man sich die Gewichte der Teilflächen vertikal nach abwärts wirken. Die Resultierende dieser Gewichte greift nun im Schwerpunkte der gegebenen Fläche an.

Hat die Fläche eine Symmetrieachse, so ergibt sich ihr Schwerpunkt als Schnitt der nach obigem Verfahren gesuchten Resultierenden mit dieser Symmetrieachse. Wenn dies nicht der Fall ist, muß eine zweite Schwerpunktsachse gefunden werden.

An nachstehenden Beispielen soll die soeben beschriebene graphische Methode näher erläutert werden.

### Beispiele.

106. Es ist der Schwerpunkt der in Fig. 87 gegebenen Fläche zu suchen. —

Auflösung: Unter der Voraussetzung, daß die gegebene Fläche gleichmäßig mit Masse belegt ist, kann man statt der Resultierenden der Teilgewichte

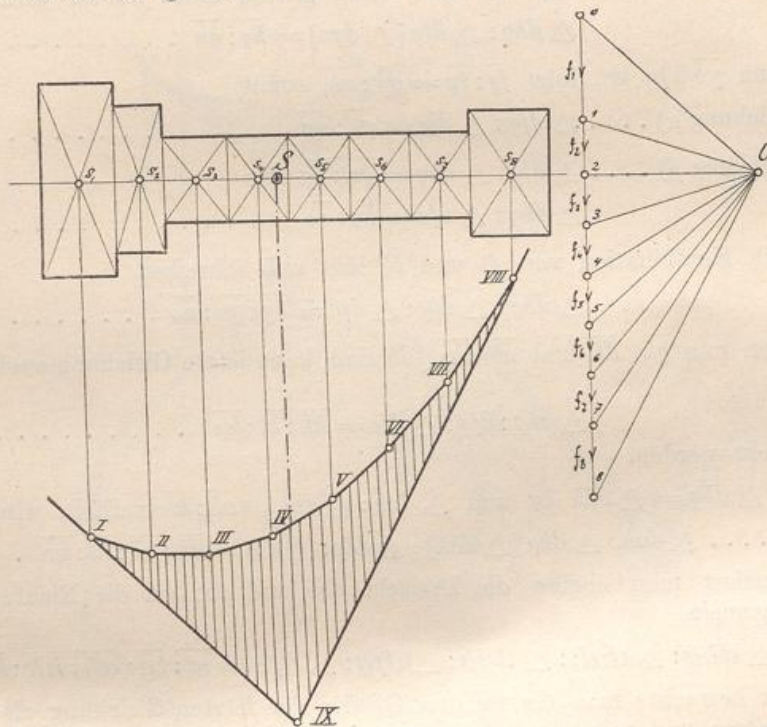


Fig. 87.

auch die der Teilflächen suchen. Man trage  $f_1$  bis  $f_8$  an, nehme den Pol  $O$  beliebig und verzeichne Kräfte- und Seilpolygon. Der Schnittpunkt der äußersten Seiten des letzteren ergibt den Angriffspunkt der Resultierenden aller Teilgewichte. Die Resultierende selbst schneidet die Symmetrieachse dann im gesuchten Schwerpunkte  $S$ .

107. Der Schwerpunkt des in Fig. 88 gezeichneten, unregelmäßigen Polygons ist graphisch zu finden.

Auflösung: Das Polygon werde in Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze  $d$  zerlegt. Ist die Masse über das Polygon gleichmäßig verteilt, so sind die Dreiecksflächen den Dreiecksmassen proportional, und man kann daher im Schwerpunkte der ersteren die letzteren vertikal nach abwärts wirkend denken. Die Resultierende der Massenkräfte enthält den gesuchten Schwerpunkt  $S$ .

Folgendes Verfahren erlaubt nun, die Flächen der einzelnen Dreiecke als Linien in der Richtung  $\overline{ah}$  untereinander aufzutragen.

Man verlängere  $gf$  und ziehe  $ep \parallel df$ . Dann folgt

$$\triangle dfe = \triangle dfp$$

Da die Dreiecke  $dfg$  und  $dfp$  gleiche Höhen haben, verhält sich

$$\triangle dfg : \triangle dfe [\triangle dfp] = \overline{fg} : \overline{fp} \dots \dots \dots (\alpha)$$

Verlängert man ferner  $\overline{gh}$  und zeichnet  $\overline{nf} \parallel \overline{dg}$ , dann ergibt sich

$$\triangle dfg = \triangle dgn,$$

und weil die Dreiecke  $dhg$  und  $dgn$  wieder gleiche Höhe haben, wird

$$\triangle dhg : \triangle dfg [\triangle dgn] = \overline{hg} : \overline{gn} \dots \dots \dots (\beta)$$

Wenn  $\overline{po} \parallel \overline{fn}$  ist, folgt  $\overline{fg} : \overline{fp} = \overline{gn} : \overline{no}$ , somit

$$\text{laut Gleichung } \alpha) \dots \triangle dfg : \triangle dfe = \overline{gn} : \overline{no} \dots \dots \dots (\gamma)$$

laut Gleichung  $\beta) \dots \triangle dfg : \triangle dhg = \overline{gn} : \overline{hg}$ , also

$$\triangle dhg : \triangle dfe = \overline{hg} : \overline{no} \dots \dots \dots (\delta)$$

Nach Kombination von  $\beta)$  und  $\delta)$  läßt sich schreiben

$$\triangle dhg : \triangle dfg : \triangle dfe = \overline{hg} : \overline{gn} : \overline{no} \dots \dots \dots (\epsilon)$$

Wenn nun  $\overline{gk} \parallel \overline{dh}$  und  $\overline{nl} \parallel \overline{om} \parallel \overline{dh}$  sind, kann letzte Gleichung auch in der Form

$$\triangle dhg : dfg : \triangle dfe = \overline{hk} : \overline{kl} : \overline{lm} \dots \dots \dots (\eta)$$

ausgedrückt werden.

Da  $\triangle dhg = \triangle dhk$  ist und  $\triangle dah : \triangle dhk = \overline{ah} : \overline{hk}$  verhält, wird

$$\dots \triangle dah : \triangle dhg [\triangle dhk] : \triangle dfg : \triangle dfe = \overline{ah} : \overline{hk} : \overline{kl} : \overline{lm} \dots \dots (\iota)$$

Reduziert man ebenso die Dreiecke  $dab$  und  $dbc$  auf die Richtung  $\overline{ah}$ , so ist allgemein

$$\triangle dbc : \triangle dba : \triangle dah : \triangle dgh : \triangle dfg : \triangle dfe = \overline{st} : \overline{ta} : \overline{ah} : \overline{hk} : \overline{kl} : \overline{lm}$$

Jetzt betrachte man die rechten Glieder der letzten Gleichung als Maße der Teilmassen und nehme man die Schwerpunktsbestimmung laut Fig. 88 vor.

### § 26. Experimentelle Bestimmung des Schwerpunkts.

Für viele Fälle der Praxis genügt es, den Schwerpunkt annähernd auszumitteln. —

Ist z. B. derselbe in einer ebenen Figur zu bestimmen, so hänge man

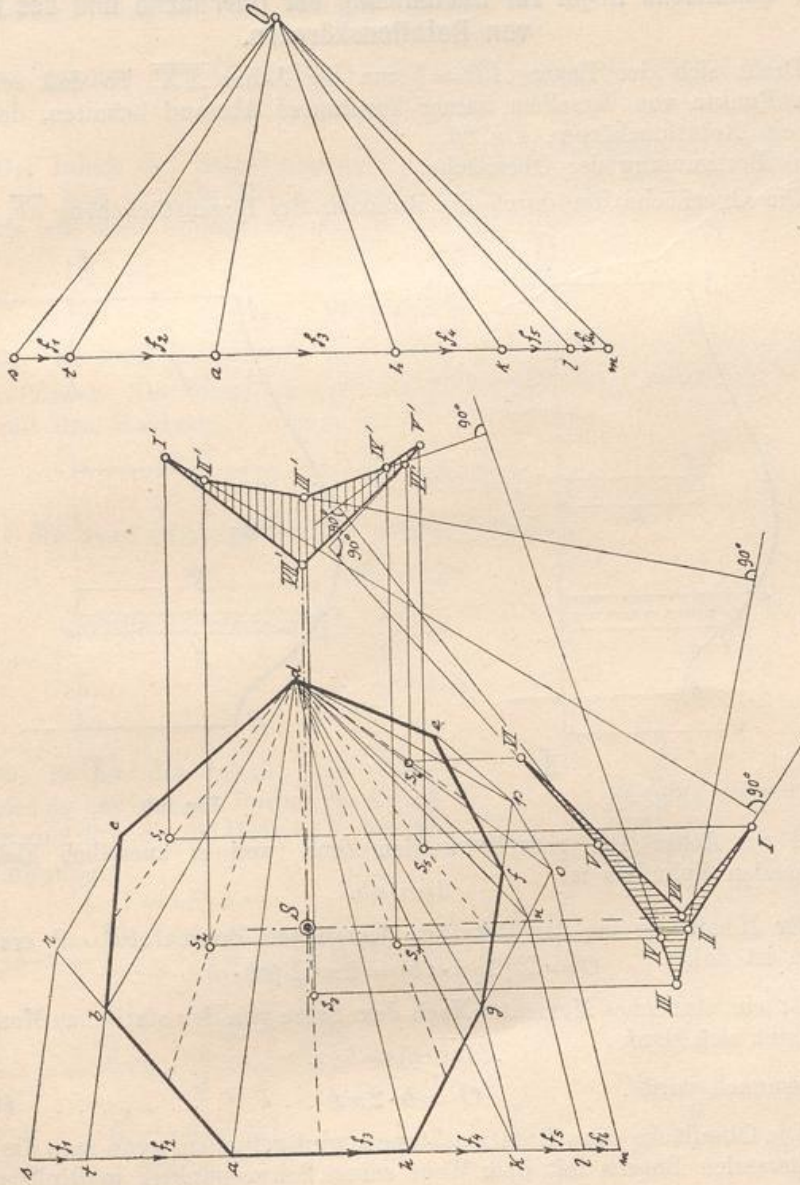


Fig. 88.

letztere an einem dünnen Faden auf und reiße in ihr die Verlängerung seiner Richtung auf. Diese Linie ist eine Schwerlinie der Figur. Wird auf gleiche Art eine andre Schwerlinie bestimmt, so ergibt sich der Schwerpunkt als Schnitt der gefundenen Schwerlinien.



Statt die Figur an einem Faden aufzuhängen, kann man sie auf eine scharfe Schneide auflegen und derart ihre Schwerlinie finden (durch Ausbalanzieren).

Freilich ist von den Resultaten dieser Methode kein hoher Genauigkeitsgrad zu verlangen.

**§ 27. Guldinsche Regel zur Bestimmung der Oberfläche und des Inhaltes von Rotationskörpern.**

Dreht sich der Bogen  $AB=b$  um die Achse  $\overline{XX'}$ , so daß seine einzelnen Punkte von derselben immer konstanten Abstand behalten, dann entsteht ein Rotationskörper, Fig. 89.

a) Bestimmung der Oberfläche.

Die Oberfläche des durch die Rotation des Bogenstückchens  $\overline{ab}$ , welches

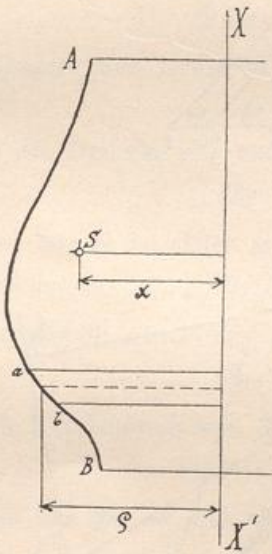


Fig. 89.

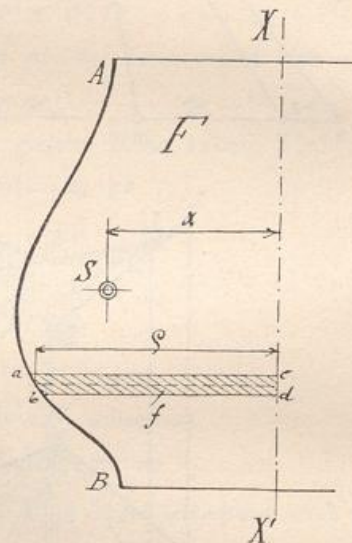


Fig. 90.

parallel zur Achse  $\overline{XX'}$  gedacht werden kann (weil es unendlich klein ist), entstehenden Zylinders ist  $2\pi \cdot \overline{ab}$ .

Der Inhalt der bei der Rotation des ganzen Bogens  $AB=b$  erzeugten Flächen ist daher  $O = \Sigma (2\pi \cdot \overline{ab}) = 2\pi \cdot \Sigma (\overline{ab} \cdot \rho)$

$\overline{ab} \cdot \rho$  ist ein statisches Moment. Nach dem Satze von den statischen Momenten (48) ergibt sich dann  $\Sigma (\overline{ab} \cdot \rho) = b \cdot x$ .

Demnach wird  $O = b \cdot 2\pi x \dots \dots \dots (62)$

„Die Oberfläche eines Rotationskörpers wird gefunden, wenn man die Länge des rotierenden Bogens mit dem Wege seines Schwerpunktes multipliziert.“

b) Bestimmung des Inhaltes.

Der Inhalt des unendlich kleinen Zylinders, welcher durch die Rotation des unendlich schmalen Flächenstreifens  $f = abcd$  entsteht, Fig. 90, ist

$$\rho^2 \cdot \pi \cdot \overline{ab}.$$

Daher ist der Inhalt des ganzen Umdrehungskörpers

$$V = \Sigma (\varrho^2 \cdot \pi \cdot \overline{ab}) = 2\pi \cdot \Sigma \left( \overline{ab} \cdot \varrho \cdot \frac{\varrho}{2} \right) = 2\pi \cdot \Sigma \left( f \cdot \frac{\varrho}{2} \right).$$

$f \cdot \frac{\varrho}{2}$  ist das statische Moment des unendlich schmalen Flächenstreifens  $f$ .

Demnach wird 
$$\Sigma \left( f \cdot \frac{\varrho}{2} \right) = F \cdot x.$$

Das Volumen des Umdrehungskörpers bestimmt sich sodann mit

$$V = F \cdot 2\pi x \dots \dots \dots (63)$$

„Der Inhalt des Rotationskörpers, welcher durch Rotation einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugt wird, ist gleich dem Produkte aus dem Inhalte der Fläche und dem Wege ihres Schwerpunktes.“

**Beispiele.**

108. Es sind Mantelfläche und Inhalt eines Kreiskegels zu finden.

Auflösung: Der Kegel entsteht durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $r$  und  $h$  um die letztere.

$$M = b \cdot 2\pi x = s \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{2},$$

wenn  $s$  die Seite (Erzeugende) des Kegels bedeutet.

$$M = \pi r s$$

$$V = \frac{r h}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{2}$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

109. Es ist der Inhalt eines Kegelstumpfes zu bestimmen. Radien der Grundflächen sind  $R$  und  $r$ , die Höhe ist  $h$ . Fig. 91.

Auflösung:

$$V = F \cdot 2\pi x$$

$$\frac{R+r}{2} \cdot h \cdot x = \frac{r h}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} r + \frac{R h}{2} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{2} + \frac{1}{3} r \right)$$

$$x = \frac{\frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{3} R^2 + \frac{1}{3} R r}{R+r}$$

$$x = \frac{R^2 + R r + r^2}{3(R+r)}$$

$$V = \frac{R+r}{2} h \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2 + R r + r^2}{3(R+r)}$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + R r + r^2)$$

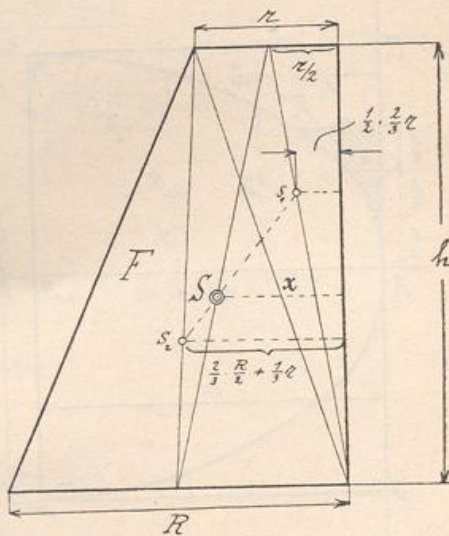


Fig. 91.

110. Es sind Oberfläche und Inhalt einer Kugel zu bestimmen.

Auflösung:  $O = b \cdot 2\pi x = r\pi \cdot 2\pi x$

Lt (51c) ist  $x = \frac{2r}{\pi}$ , daher

$$O = r\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi}$$

$$O = 4r^2\pi = d^2\pi$$

$$V = \frac{r^2\pi}{2} \cdot 2\pi x$$

Lt (58) ist  $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$

$$V = \frac{r^2\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

$$V = \frac{4}{3} r^3\pi = \frac{\pi}{6} d^3.$$

111. Oberfläche und Inhalt eines zylindrischen Ringes zu bestimmen. Mittlerer Durchmesser desselben sei  $D$ , der Durchmesser seines Querschnittes  $d$ .

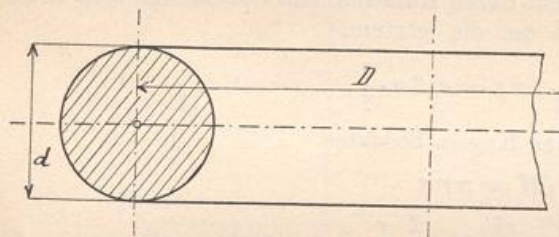


Fig. 92.

Fig. 92.

Auflösung:

$$O = b \cdot 2\pi x = d\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2}$$

$$O = \pi^2 \cdot Dd$$

$$V = F \cdot 2\pi x = \frac{d^2\pi}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2}$$

$$V = \frac{\pi^2}{4} Dd^2.$$

112. Die Lagen der Schwerpunkte  $S$  und  $S'$  in den Parabelstücken  $ABD$  und  $ACD$ , Fig. 93, festzustellen.

Auflösung: Sind die Flächen  $ABD$  und  $ACD$ , sowie die durch ihre Rotation um die  $X$ -Achse entstehenden Paraboloidvolumen gefunden, so lassen sich mittels der Guldinschen Regel leicht die Lagen von  $S$  und  $S'$  bestimmen. Zunächst werde  $F_1$  gesucht. Zu diesem Ende teile man  $AC = b$  in unendlich viele gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Parallele zur  $X$ -Achse bis zur Parabel. Die Längen derselben sind, da die Parabel die Gleichung  $y^2 = 2px$  hat, der Reihe nach

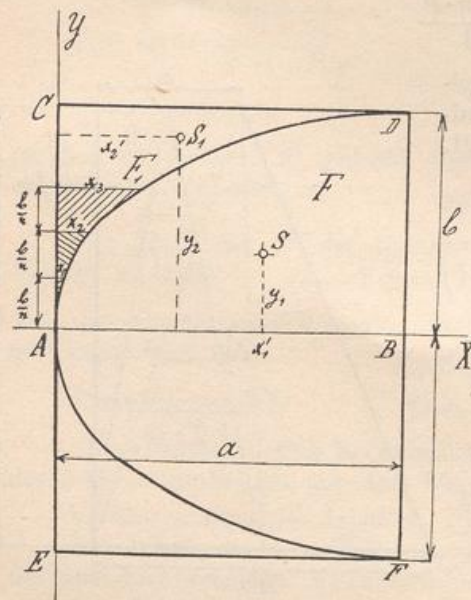


Fig. 93.

$$x_1 = \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^2}{2p}, \quad x_2 = \frac{\left(\frac{b}{2n}\right)^2}{2p}, \quad \dots$$

Die unendlich kleinen, schraffierten Rechtecke haben dann einen Inhalt

$$f_1 = \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot b}{2p}, \quad f_2 = \frac{\left(\frac{2b}{n}\right)^2 \cdot b}{2p}, \quad \dots$$

Demnach ergibt sich die Fläche  $F_1$  mit

$$F_1 = \frac{b}{n} \cdot \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^2}{2p} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \text{ oder}$$

$$F_1 = \frac{b^3}{n^3 \cdot 2p} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

Die Summe in der Klammer wird folgendermaßen bestimmt. Es ist

			$(n+1)^3$	$=$	$n^3$	$+ 3n^2$	$+ 3n$	$+ 1$
für	$n=0$	ist	$1^3$	$=$	$0$	$+ 3 \cdot 0$	$+ 3 \cdot 0$	$+ 1$
„	$n=1$	„	$2^3$	$=$	$1^3$	$+ 3 \cdot 1^2$	$+ 3 \cdot 1$	$+ 1$
„	$n=2$	„	$3^3$	$=$	$2^3$	$+ 3 \cdot 2^2$	$+ 3 \cdot 2$	$+ 1$
„	$\vdots$	„	$\vdots$	$=$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
„	$n \dots (n-1)$	„	$n^3$	$=$	$(n-1)^3$	$+ 3(n-1)^2$	$+ 3(n-1)$	$+ 1$
„	$n \dots n$	„	$(n+1)^3$	$=$	$n^3$	$+ 3n^2$	$+ 3n$	$+ 1$

Durch Addition auf beiden Seiten ergibt sich demnach

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = 1^3 + \dots + n^3 + 3(1^2 + \dots + n^2) + 3(1 + \dots + n) + (n+1)$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n}{2}(n+1) - \frac{n+1}{3} \\ &= \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot [2(n+1)^2 - 3n - 2], \text{ d. h.} \end{aligned}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n^3 \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}$$

Für  $n = \infty$  wird dann

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{6} \cdot 2 = \frac{n^3}{3}$$

Also ergibt sich  $F_1 = \frac{b^3}{2p \cdot n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{b^3}{6p}$ ; da  $p = \frac{b^2}{2a}$  ist, folgt

$$F_1 = \frac{b^3}{6 \frac{b^2}{2a}} \text{ oder}$$

$$F_1 = \frac{ab}{3}, \text{ demnach}$$

$$F = \frac{2}{3} ab$$

Durch Rotation des Parabelstückes  $ABD$  um die  $X$ -Achse entsteht ein Paraboloid, dessen Volumen gleich dem halben Volumen des Zylinders  $CDEF$  sein muß, da die Querschnitte  $DAF$  und  $DCEF$  sich verhalten wie  $\frac{4}{3}ab : 2ab = 1 : 2$ .

Somit ergibt sich durch Anwendung der Guldinschen Regel aus

$$\frac{2}{3} ab \cdot 2\pi \cdot y_1 + \frac{1}{2} \pi b^2 a$$

$$y_1 = \frac{3}{8} b \dots \dots \dots (64a)$$

Ebenso folgt aus der Erwägung, daß das durch Rotation des Parabelstückes  $ACD$  um die  $X$ -Achse entstehende Volumen gleich  $\frac{1}{2}$  des Zylindervolumens  $\pi b^2 a$  sein muß,

$$\frac{1}{3} ab \cdot 2\pi y_2 = \frac{1}{2} \pi b^2 a \text{ und hieraus}$$

$$y_2 = \frac{3}{4} b \dots \dots \dots (64b)$$

$y_2$  ist somit zweimal so groß als  $y_1$ . — Analog läßt sich schließen, daß  $x'_1$  zweimal so groß werden wird wie  $x'_2$ . Die durch die Rotation der Parabelstücke  $ABD$  und  $ACD$  um die  $Y$ -Achse entstehenden Volumen müssen zusammen das Zylindervolumen  $\pi a^2 b$  ergeben. Es wird also

$$\frac{1}{3} ab \cdot 2\pi x'_2 + \frac{2}{3} ab \cdot 2\pi x'_1 = \pi a^2 b.$$

Beiderseits durch  $\pi ab$  gekürzt und für  $x'_1 = 2x'_2$  gesetzt, folgt

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot x'_2 + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2x'_2 = a$$

$$\frac{10}{3} x'_2 = a$$

$$x'_2 = \frac{3}{10} a \dots \dots \dots (64c)$$

Demnach  $x'_1 = \frac{3}{5} a \dots \dots \dots (64d)$

## § 28. Ermittlung des Schwerpunktes homogener Körper.

113. Schwerpunkt einer Pyramide (eines Kegels). Fig. 94.

Auflösung: Wird die Pyramide durch zur Grundfläche parallele Ebenen in sehr dünne Schichten (Dreiecke) zerlegt, so liegen deren Schwerpunkte sämtlich in der Geraden  $DM$ , welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet. Betrachtet man nun  $BCD$  als Grundfläche und  $A$  als Spitze der Pyramide, so muß, wenn  $N$  der Schwerpunkt des Dreieckes  $BCD$

ist, der Schwerpunkt der Pyramide auch in der Geraden  $\overline{AN}$  liegen. Er ist somit der Schnittpunkt  $S$  von  $\overline{DM}$  und  $\overline{AN}$ . Zieht man die Hilfslinie  $\overline{MN}$ , so gilt

$$\overline{EM} = \frac{1}{3} \overline{EA}$$

$$\overline{EN} = \frac{1}{3} \overline{DE}$$

Daher ist  $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$  und es wird

$\triangle SNM \sim \triangle SAD$ , somit

$$\overline{MN} = \frac{1}{3} \overline{AD}$$

$$\overline{MS} = \frac{1}{3} \overline{SD}, \text{ also}$$

$$\overline{MS} = \frac{1}{4} \overline{MD}. \quad (65)$$

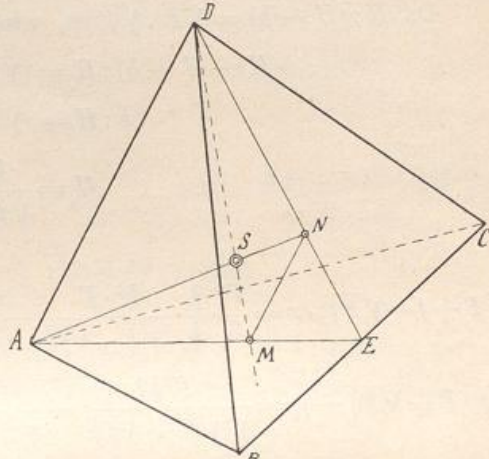


Fig. 94.

Eine vielseitige Pyramide kann durch Ebenen, welche durch die Spitze gehen, in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, deren Schwerpunkte sämtlich in  $\frac{1}{4}$  der Höhe, also in einer zur Grundfläche parallelen Ebene liegen. In letzterer liegt dann der Schwerpunkt der ganzen Pyramide. Daher ergibt sich das Gesetz:

„Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt in der Geraden, welche den Schwerpunkt der Basis mit der Spitze verbindet und im ersten Viertel der Höhe.“

Dasselbe gilt vom Kegel, da derselbe als eine Pyramide mit unendlich viel Seiten aufgefaßt werden kann.

114. Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes, Fig. 95. Die Grundflächen sind  $F$  und  $f$ , Höhe ist  $h$ .

Auflösung: Der Inhalt des Pyramidenstumpfes ist

$$\frac{h}{3} (F + \sqrt{Ff} + f)$$

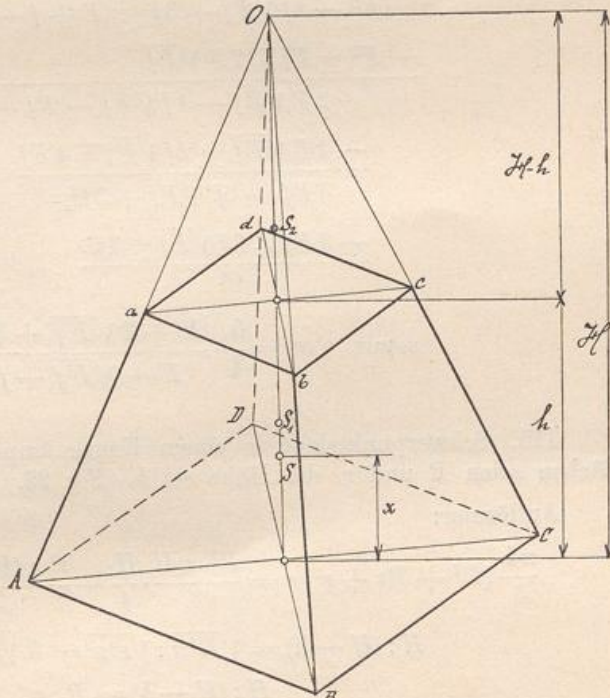


Fig. 95.

Das statische Moment des Pyramidenstumpfes in bezug auf die Grundfläche  $F$  muß gleich sein dem statischen Momente der ganzen Pyramide  $ABCDO$  weniger dem der Ergänzungspyramide  $abcdO$ . Demnach gilt



$$\pi h (R^2 + Rr + r^2) x = \frac{R^2 \pi}{4} \cdot \frac{h^2 R^2}{(R-r)^2} - r^2 \pi \left( \frac{hR}{R-r} - h \right) \left( h + \frac{\frac{hR}{R-r} - h}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \pi (R^2 + Rr + r^2) x &= \frac{R^4 h \pi}{4(R-r)^2} - r^2 \pi \left( \frac{R}{R-r} - 1 \right) \cdot \frac{4h + \frac{hR}{R+r} - h}{4} \\ &= \frac{h \pi}{4} \cdot \frac{R^4}{(R-r)^2} - r^2 \pi \frac{r}{R-r} \cdot \frac{4Rh - 4hr + hR - hR + rh}{4(R-r)} \\ &= \frac{h \pi}{4} \cdot \frac{R^4}{(R-r)^2} - \frac{r^3 \pi (4Rh - 3hr)}{4(R-r)^2} \\ &= \frac{h \pi}{4} \left\{ \frac{R^4 - r^3(4R - 3r)}{(R-r)^2} \right\} = \frac{h \pi}{4} \cdot \frac{R^4 - 4Rr^3 + 3r^4}{(R-r)^2} \end{aligned}$$

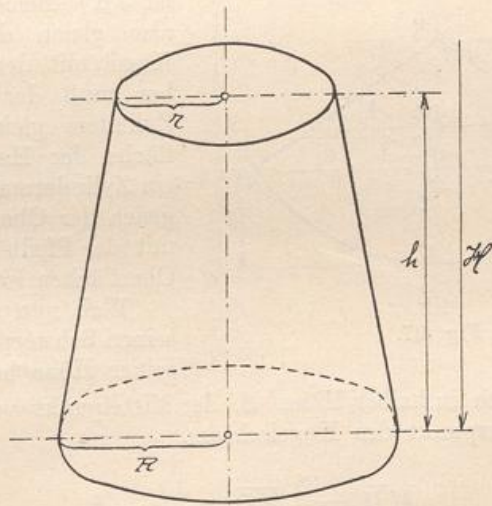


Fig. 96.

$$\begin{aligned} (R^4 - 4Rr^3 + 3r^4) : (R^2 - 2Rr + r^2) &= R^2 + 2Rr + 3r^2 \\ - R^4 \mp 2R^3r \pm R^2r^2 & \\ \hline 2R^3r - 4Rr^3 - R^2r^2 + 3r^4 & \\ - 2R^3r \mp 4R^2r^2 \pm 2Rr^3 & \\ \hline 3R^2r^2 - 6Rr^3 + 3r^4 & \\ - 3R^2r^2 \mp 6Rr^3 \pm 3r^4 & \\ \hline \emptyset & \\ x = \frac{h \pi}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} & \dots \dots \dots (67) \end{aligned}$$



116. Schwerpunktslage in einem Kugelsektor (Kugelausschnitt). Kugelhalbmesser  $r$ , Höhe der Kalotte  $\overline{CD} = h$ . — Fig. 97.

Auflösung: Man denke sich den Kugelsektor in unendlich viele Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen  $f$  sind und deren Spitzen sämtlich in  $M$  liegen. Alle diese Pyramiden haben ihre Schwerpunkte in der Entfernung  $\frac{3}{4}r$  von  $M$ . Der geometrische Ort derselben ist eine Kalotte, die derjenigen, welche den

Sektor begrenzt, ähnlich ist. Der Schwerpunkt des Sektors  $S$  fällt hiermit mit dem der neuen Kalotte zusammen.

Beschreibt man um die Kugel, von welcher der Sektor ein Teil ist, einen sie einhüllenden Zylinder, so ist dessen Mantelfläche (Achse ist  $JK$ ) gleich  $2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi$ , also gleich der Oberfläche der Kugel mit dem Radius  $r$ . — Daher muß der halbe Mantel des Zylinders gleich sein der Oberfläche der Halbkugel, allgemein ein Zylindermantel mit der Höhe  $h$  gleich der Oberfläche der Kalotte mit der Pfeilhöhe  $h$ . D. h. diese Oberflächen sind je  $2r\pi h$ .

Weil nun der Zylindermantel seinen Schwerpunkt in der Hälfte seiner Höhe hat, so hat die Kalotte

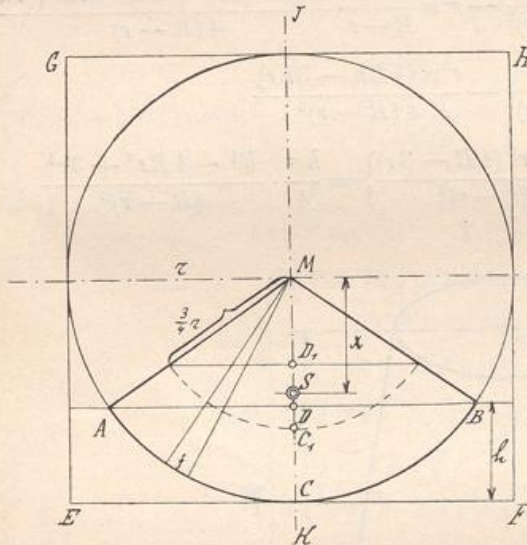


Fig. 97.

den ihren auch in halber Höhe.  $S$ , der Mittelpunkt von  $D_1C_1$ , ist somit der gesuchte Schwerpunkt des Kugelsektors.

Nun ist 
$$\overline{MD}_1 = \frac{3}{4} \overline{MD} = \frac{3}{4} (r - h)$$

$$\overline{D_1C_1} = \overline{MC_1} - \overline{MD}_1 = \frac{3}{4} r - \frac{3}{4} (r - h) = \frac{3}{4} h$$

$$\overline{D_1S} = \frac{1}{2} \overline{D_1C_1} = \frac{3}{8} h$$

$$\overline{MS} = \overline{MD}_1 + \overline{D_1S} = \frac{3}{4} (r - h) + \frac{3}{8} h = \frac{3}{4} r - \frac{3}{4} h + \frac{3}{8} h$$

$$x = \frac{3}{8} (2r - h) \dots \dots \dots (68)$$

117. Schwerpunktslage in einem Kugelabschnitt. Pfeilhöhe des Abschnittes sei  $h$ , Radius der Kugel sei  $r$  — Fig. 98.

Auflösung: Das statische Moment der Kalotte muß gleich sein demjenigen des Kugelsektors, minus dem des Kegels. Momentenebene ist  $EE_1$ .

Zur Auflösung der Aufgabe müssen zunächst die Inhalte von Kugelsektor und von Kalotte gefunden werden. Der Sektor kann aus unendlich vielen Pyramiden, deren Grundflächen die Oberfläche der Kalotte bilden und deren Spitzen in  $O$  liegen, zusammengesetzt gedacht werden. Mithin wird sein

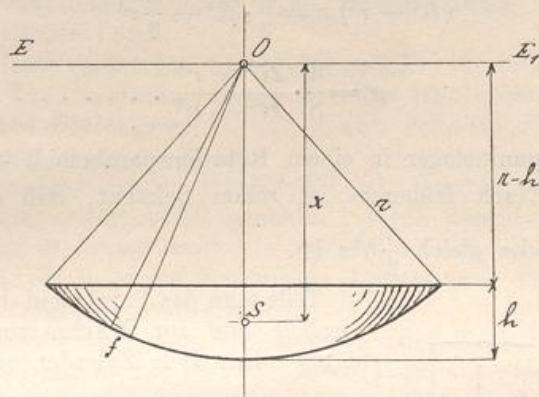


Fig. 98.

Inhalt  $J_1 = 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ . — Der Inhalt der Kalotte ist dann

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \frac{2}{3}\pi r^2 h - [r^2 - (r-h)^2] \pi \cdot \frac{r-h}{3} \\
 &= \frac{2}{3}\pi r^2 h - (r^2 - r^2 + 2rh - h^2) \frac{\pi}{3} (r-h) \\
 &= \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r h^2 + \frac{\pi r h^2}{3} - \frac{\pi}{3} h^3 \\
 J_2 &= \pi r h^2 - \frac{\pi}{3} h^3 = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h)
 \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi h^2}{3} (3r - h) x &= \frac{2}{3}\pi r^2 h \cdot \frac{3}{8} (2r - h) - \frac{r^2 - (r-h)^2}{3} \pi (r-h) \cdot \frac{3}{4} (r-h) \\
 h(3r - h) x &= \frac{3}{4} r^2 (2r - h) - (2r - h) \cdot \frac{3}{4} (r-h)^2 \\
 x &= \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h) \cdot [r^2 - (r-h)^2]}{h(3r - h)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)(2rh - h^2)}{h(3r - h)} \\
 x &= \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h} \dots \dots \dots (69)
 \end{aligned}$$

Für eine Halbkugel wird  $h = r$ , daher  $x = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - r)^2}{3r - r}$

$$x = \frac{3}{8} r \dots \dots \dots (70)$$

Für eine hohle Halbkugel mit den Radien  $R$  und  $r$  gilt

$$\left(\frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{2}{3} \pi r^3\right) x = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \frac{3}{8} R - \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot \frac{3}{8} r$$

$$(R^3 - r^3) x = \frac{3}{8} \cdot R^4 - \frac{3}{8} r^4$$

$$x = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} \dots \dots \dots (71)$$

118. Schwerpunktlager in einem Rotationsparaboloid. — Fig. 99.

Auflösung: Nach früherem ist schon bekannt, daß der Inhalt eines Rotationsparaboloides gleich  $\frac{\pi}{2} b^2 a$  ist.

Teilt man das Paraboloid durch zur  $Y$  Achse parallele und zur  $X$  Achse senkrechte Ebenen in unendlich viele Zylinder, so gilt

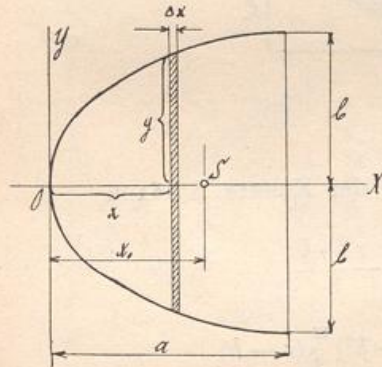


Fig. 99.

$$\Sigma [(y^2 \pi \cdot \Delta x) \cdot x] = \frac{\pi}{2} b^2 a \cdot x_0$$

$$\Sigma (2 p x^2 \cdot \pi \cdot \Delta x) = \frac{\pi}{2} b^2 a \cdot x_0$$

$$2 p \pi \cdot \Sigma (x^2 \cdot \Delta x) = \frac{\pi}{2} b^2 \cdot a \cdot x_0$$

Da  $b^2 = 2 p a$  ist, wird

$$\frac{b^2}{a} \pi \cdot \Sigma (x^2 \cdot \Delta x) = \frac{\pi}{2} b^2 a x_0$$

Die Summe  $x^2 \cdot \Delta x$  ist zu bilden von  $x=0$  bis  $x=a$ . — Zu diesem Ende werde eine quadratische Pyramide, Fig. 100, deren Basis die Seite  $a$  hat und deren Höhe  $a$  ist, gedacht. Wird sie in der Entfernung  $x$  und in der Entfernung  $x + \Delta x$  von der Spitze durch zur Basis parallele Ebenen geschnitten, so entsteht zwischen denselben ein kleiner Körper vom Inhalte  $x^2 \cdot \Delta x$ . — Denkt man sich die ganze Pyramide aus lauter solchen kleinen Körpern gebildet, so wird

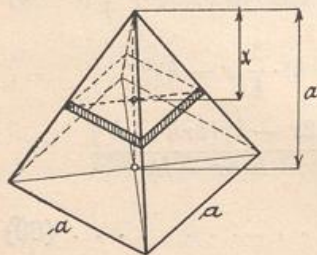


Fig. 100.

$$\Sigma (x^2 \cdot \Delta x) = a^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Daher wird

$$\frac{b^2}{a} \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi}{2} \cdot b^2 \cdot a \cdot x_0$$

$$\frac{1}{3} a = \frac{1}{2} x_0 \text{ oder}$$

$$x_0 = \frac{2}{3} a \dots \dots \dots (72)$$

### § 29. Die drei möglichen Gleichgewichtsfälle.

Wirkt auf einen in einem einzigen Punkte unterstützten (z. B. aufgehängten) Körper nur das in seinem Schwerpunkte angreifende Eigengewicht, so befindet sich der Körper im Gleichgewichte, wenn Unterstützungs- und Schwerpunkt in derselben Vertikalen liegen.

a) Fallen Unterstützungs- und Schwerpunkt zusammen, so bleibt der Körper in jeder Lage in Ruhe. Dieses Gleichgewicht heißt **unentschiedenes oder indifferentes Gleichgewicht**. In diesem befinden sich z. B. um horizontale Achsen sich drehende Räder.

b) Liegt der Schwerpunkt unterhalb des Unterstützungspunktes, so wird des Körpers Gleichgewicht **stabil** genannt. Wird derselbe aus seiner Lage gebracht, so kehrt er immer wieder in dieselbe zurück. In stabilem Gleichgewichte ist z. B. ein in einem Endpunkte aufgehängter und in einer vertikalen Ebene schwingender Stab (Pendel).

c) Befindet sich aber der Schwerpunkt eines Körpers oberhalb seines Unterstützungspunktes, so ist nur in diesem Falle Gleichgewicht vorhanden. Wird der Körper aus seiner Lage gebracht, so kehrt er nicht wieder in diese zurück. Diese Art des Gleichgewichtes heißt **labiles Gleichgewicht**. In demselben befindet sich z. B. ein auf seiner Spitze balanciertes Schwert, eine mit ihrem Schwerpunkte auf eine Nadelspitze gesetzte homogene Platte usw.

### § 30. Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad.

Aus der Einleitung ist schon bekannt, daß jeder freie Körper unter dem Einflusse einer Kraft in Bewegung gesetzt wird. Die Wirkung der Kraft auf einem bestimmten Wege heißt nun die **Arbeit** (auch **mechanische Arbeit**) der Kraft.

Letztere ist nun direkt proportional der Größe des Weges, aber unabhängig von der Zeit, in welcher sie zustande kommt.

Der mathematische Ausdruck für die Größe der Arbeit ist daher

$$A = P \cdot s \dots \dots \dots (73)$$

Die Wirkung der Kraft ist nun nichts anderes als die Überwindung eines Widerstandes während des Weges, z. B. beim Heben von Lasten die Überwindung des Gewichtes derselben, bei gleichförmiger Bewegung die Überwindung der Reibung zwischen Körper und seiner Unterlage, bei gleichförmig beschleunigter Bewegung die Überwindung der Reibung und die Überwindung des Widerstandes des Körpers gegen die Annahme der Beschleunigung, d. h. die Überwindung der Trägheit.

Die Arbeitseinheit ist jene Arbeit, welche 1 kg auf dem Wege 1 m leistet. Sie heißt ein **Meterkilogramm** und wird abgekürzt 1 mkg geschrieben.

Zum Heben der Last  $Q = 100$  kg auf eine Höhe von 1,5 m sind 150 mkg, zum Fortziehen eines Körpers auf einer horizontalen Ebene mittelst einer Kraft  $P = 15$  kg auf einem Wege von 5 m sind 75 mkg nötig.

Andere Arbeitseinheiten werden später noch angegeben werden.

Die Arbeit pro Zeiteinheit

$$L = \frac{A}{t} \dots \dots \dots (74)$$

wird **Leistung** oder **Effekt** genannt. Einheit der Leistung ist ein **Meterkilogramm pro Sekunde**, auch **Sekundenmeterkilogramm** genannt. Die abgekürzte Bezeichnung für diese Leistungseinheit ist **mkg/sek**

Diese letztere Einheit ist für die Technik zu klein. Es wurde daher eine größere aus 75 mkg/sek gebildet und diese eine **PS**, d. h. eine **Pferdestärke** genannt.

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ mkg/sek} \dots \dots \dots (75)$$

Die englische Bezeichnung für 75 mkg/sek, nämlich **HP** (horse-power) ist in Deutschland jetzt nicht mehr üblich.

Will man  $L$  mkg/sek in PS verwandeln, so muß man dieselben durch 75 dividieren. Die Leistung in PS ist demnach

$$N = \frac{L}{75} \dots \dots \dots (76)$$

Behufs Übertragung der Wirkungen von Kräften werden Maschinen angewandt. Die von denselben aber abgenommenen Leistungen sind immer geringer als die theoretisch möglichen der ausgenützt werden sollenden Kräfte. Das Verhältnis aus der Nutzleistung einer Maschine zur theoretischen, welche vorhanden wäre, wenn innerhalb der Maschine keinerlei Effektsverluste entstehen würden, heißt der **Wirkungsgrad** der Maschine. Wird die Nutzleistung mit  $N_n$  bezeichnet, die theoretisch mögliche mit  $N$ , dann lautet die Formel für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{N_n}{N} \dots \dots \dots (77)$$

Der Wirkungsgrad einer Maschine ist keine durch Rechnung bestimmbare Zahl, sondern nur ein Erfahrungswert. Bestimmt wird er, wie später gezeigt werden wird, durch Bremsen.

### Beispiele.

119. Wie groß ist die Arbeit eines Spaziergängers während eines 1500 m langen und horizontal verlaufenden Weges unter der Annahme, daß sich sein 75 kg schwerer Körper bei jedem 75 cm langen Schritte um 25 mm hebt?

Auflösung: Während eines Weges von 1500 m hebt sich der Körper des Spaziergängers um  $25 \cdot \frac{1500}{0,75}$  mm =  $\frac{1500}{0,03}$  mm = 50000 mm = 50 m. — Daher ist

$$\begin{aligned} \text{seine geleistete Arbeit} & A = 75 \cdot 50 \text{ mkg} \\ & A = 3750 \text{ mkg} \end{aligned}$$

120. An einem Wasserfall stürzen pro Minute 20 cbm Wasser 10 m hoch herab. Wieviel PS gehen hier verloren?

$$\begin{aligned} \text{Auflösung:} \quad N &= \frac{20000 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}}{60 \cdot 75} \\ N &\sim 44,5 \text{ PS} \end{aligned}$$

121. Wie lautet allgemein die Formel für die Leistung einer Turbine, durch welche pro Sekunde  $Q$  cbm Wasser fließen und welche ein Gefälle von  $H$  m ausnützt, wenn ihr Wirkungsgrad  $\eta = 0,75$  beträgt?

$$\begin{aligned} N_n &= 0,75 \cdot \frac{(Q \cdot 1000 \text{ kg}) \cdot H \text{ m}}{75} \text{ PS} \\ N_n &= 10 QH \end{aligned}$$

122. Wieviele PS sind zum Betriebe einer Dampfspritze, welche pro Sekunde 50 l Wasser 15 m hoch werfen soll, erforderlich, wenn die Reibungsverluste unberücksichtigt gelassen werden?

Auflösung: 
$$N = \frac{50 \cdot 15}{75} = 10 \text{ PS}$$

123. An den Enden eines Fadens, der über zwei im Abstände 2l befindlichen Röllchen geht, hängen die zwei gleichen Gewichte  $mg$  — In der Mitte der Röllchen wird nun auf den Faden das Gewicht  $m'g$  gelegt. Wie tief fällt dasselbe? Fig. 101.

Auflösung: Die Arbeit des fallenden Gewichtes  $m'g$  ist  $m'g \cdot x$  — Dieselbe muß gleich sein der zur Hebung der Gewichte  $mg$  nötigen zwei gleichen Arbeiten. Letztere sind je

$$mg \cdot (\sqrt{l^2 + x^2} - l).$$

Somit existiert die Beziehung

$$\begin{aligned} m'g \cdot x &= 2mg [\sqrt{l^2 + x^2} - l] \\ (m'x + 2ml)^2 &= 4m^2(l^2 + x^2) \\ m'^2 \cdot x^2 + 4mm'l \cdot x + 4m^2l^2 &= 4m^2l^2 + 4m^2x^2 \\ m'^2 \cdot x + 4mm'l &= 4m^2 \cdot x \\ x(4m^2 - m'^2) &= 4mm'l \\ x &= \frac{4mm'l}{4m^2 - m'^2} \end{aligned}$$

124. In dem Zylinder einer Dampfmaschine beträgt der mittlere Dampfdruck  $p = 2 \text{ kg/qcm}$ . Der Zylinder hat eine Bohrung  $D = 360 \text{ mm}$ , der Hub beträgt  $S = 600 \text{ mm}$ . Die Tourenzahl der Maschine ist  $n = 100$ , ihr Wirkungsgrad ist  $\eta = 0,75$ . Wie groß ist die Leistung dieser Maschine?

Auflösung: Der nützliche Zylinderquerschnitt ist gleich  $\frac{D^2 \pi}{4}$  minus dem Querschnitte der Kolbenstange. Da letzterer den Durchmesser  $\frac{D}{7}$  besitzt, ist demnach der erstere

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \pi}{4} - \left(\frac{D}{7}\right)^2 \cdot \pi &= \frac{\pi}{4} D^2 \left(1 - \frac{1}{49}\right) \sim \frac{\pi}{4} D^2 \left(1 - \frac{1}{50}\right), \text{ also} \\ &0,98 \frac{\pi}{2} D^2 \end{aligned}$$

Der Totaldruck auf den Kolben wird dann

$$0,98 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot p \text{ kg}$$

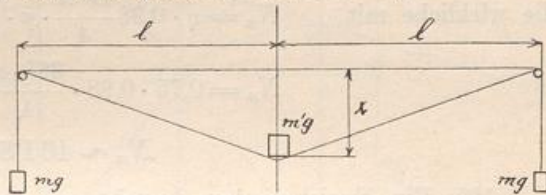


Fig. 101.

Der Weg des letzteren in einer Sekunde beträgt

$$\frac{2 S n}{60} = \frac{n S}{30} \text{ Meter.}$$

Die theoretische Leistung der Maschine ergibt sich daher mit

$$N = 0,98 \frac{D^2 \pi}{4} \cdot p \cdot \frac{n S}{30 \cdot 75} \text{ PS}$$

die wirkliche mit  $N_n = \eta \cdot 0,98 \frac{D^2 \pi}{4} \cdot p \cdot \frac{n S}{30 \cdot 75} \text{ PS}$

$$N_n = 0,75 \cdot 0,98 \cdot \frac{36^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{100 \cdot 0,6}{30 \cdot 75} \text{ PS}$$

$$N_n \sim 40 \text{ PS}$$

125. Eine Speichieranlage besteht aus zwei Aufzügen für je 1000 kg Nutzlast und 20,5 m Förderhöhe und einem Kran für 1500 kg Nutzlast und 11 m Förderhöhe. Der Antrieb der Hebemaschinen ist hydraulisch, der Betriebsdruck 50 Atm. In Betrieb sind immer ein Aufzug und der Kran. Die Förderschale jedes Aufzugs wiege 150 kg, das Hakengewicht an der Krankette sei 50 kg. Die Hubgeschwindigkeit der Lasten darf höchstens 0,5 m/sek betragen. Welche Leistung muß die Druckpumpe, die das Betriebswasser liefert, haben, falls ihr Wirkungsgrad mit 0,85 angenommen wird? Der Wirkungsgrad der Hebezeuge ist 0,7 —

Auflösung: Jeder Hub erfordert 40 Sekunden. Wird behufs Aufsetzens und Abnehmens der Last je 1 Minute gerechnet, so können die Hebezeuge alle 3 Minuten bedient werden.

Die Betriebspumpe hat also den nötigen Wasserbedarf in 3 Minuten zu decken.

Für jeden Aufzug ist eine Betriebsarbeit von

$$\frac{1150 \cdot 20,5}{0,7} \text{ mkg}$$

erforderlich. Ein kg Druckwasser hat eine Arbeitsfähigkeit von 500 mkg, da es eine Wassersäule 500 m hoch zu heben vermag. Zur Arbeit  $\frac{1150 \cdot 20,5}{0,7}$  mkg sind somit so viele kg (Liter) Druckwasser nötig als 500 in  $\frac{1150 \cdot 20,5}{0,7}$  enthalten ist.

$$x_1 = \frac{1150 \cdot 20,5}{0,7 \cdot 500} = 67 \text{ l}$$

Desgleichen braucht man pro Hub des Kranes

$$x_2 = \frac{1550 \cdot 11}{0,7 \cdot 500} = 49 \text{ l}$$

Zusammen sind daher  $x \sim 125 \text{ l}$  Wasser nötig, wenn 9 l als Ersatz für Verluste in Rechnung gestellt werden.

Pro Sekunde hat die Betriebspumpe

$$\frac{125}{3} \cdot \frac{1}{60 \cdot 0,85} \text{ l}$$

Wasser zu liefern. Da die Arbeitsfähigkeit von 1 kg Wasser pro Sekunde  $\frac{500}{75}$  mkg beträgt, ist die Leistung der Pumpe

$$N_n = \frac{125 \cdot 500}{3 \cdot 60 \cdot 0,85 \cdot 75} \text{ PS}$$

$$N_n \sim 5,5 \text{ PS}$$

126. Die mechanische Arbeit, welche eine Kraft  $P$  leisten muß, um einen in sicherer Gleichgewichtslage befindlichen Körper in die unsichere, d. h. seinen Schwerpunkt  $S$ , Fig. 102, vertikal über seine Kippkante zu bringen, heißt **dynamische Standsicherheit**. Das statische Moment des Eigengewichtes des Körpers in bezug auf die Kippkante heißt **Stabilitäts- oder Standsicherheitsmoment**.

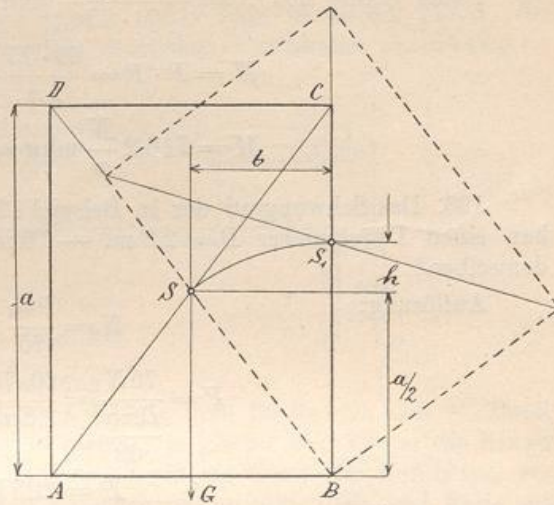


Fig. 102.

Erstere ist . . . . .  $A = G \cdot h$  . . . . . (78)

Letztere bestimmt sich mit  $M = G \cdot b$  . . . . . (79)

Ein parallelepipedischer Gußeisenblock  $ABCD$ , Fig. 102, hat  $a = 0,5$  m Höhe,  $b = 0,3$  m Breite und  $c = 0,2$  m Tiefe. Wie groß ist dessen Standsicherheitsmoment und wie groß ist die mechanische Arbeit, um den Block umzuwerfen, wenn das spezifische Gewicht des letzteren  $\gamma = 7200$  kg/cbm beträgt?

Auflösung: Das Gewicht des Blocks ist

$$G = 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 7200 = 0,03 \cdot 7200 \text{ kg}$$

$$G = 216 \text{ kg}$$

Das Standsicherheitsmoment in bezug auf die Kante  $B$  ist somit

$$M = 216 \cdot 0,15 \text{ mkg}; \quad M = 32,4 \text{ mkg}$$

Das Maß, um welches der Schwerpunkt gehoben werden muß, beträgt

$$h = BS_1 - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{0,25^2 + 0,15^2} - 0,25$$

$$h \sim 0,06 \text{ m}$$

Folglich ist die dynamische Standsicherheit

$$A = 216 \cdot 0,06$$

$$A = 12,96 \text{ mkg}$$

127. Eine Scheibe hat  $N$  PS bei  $n$  Touren zu übertragen. Wie groß ist das an ihrem Umfang wirkende Drehmoment?

Auflösung: Die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe ist  $v = \frac{2 R \pi n}{60}$

Meter, wenn der Scheibenradius  $R$  in Metern eingesetzt ist. Ist nun  $P$  kg die Umfangskraft an der Scheibe, so überträgt dieselbe den Effekt

$$N = \frac{P \cdot v}{75} \text{ . . . . . (80)}$$



Daher ergibt sich  $N = \frac{P \cdot 2 R \pi n}{60 \cdot 75}$  und daraus

$$M = P \cdot R = \frac{60 \cdot 75 \cdot N}{2 \pi \cdot n} \text{ oder}$$

$$M = 716,2 \frac{N}{n} \text{ mkg} = 716200 \frac{N}{n} \text{ mmkg} \dots (81)$$

128. Das Schwungrad der in Beispiel 124 dimensionierten Dampfmaschine hat einen Durchmesser  $D = 2,8$  m. — Wie groß ist die Umfangskraft an demselben?

Auflösung:

$$N = \frac{P \cdot v}{75}$$

$$P = \frac{75 N}{D \pi n} = \frac{60 \cdot 75 \cdot 40}{2,8 \pi \cdot 100}$$

$$60$$

$$P = 205 \text{ kg}$$

129. Das treibende Kegelrad einer vertikal geachsten Turbine hat einen Durchmesser  $D = 3440$  mm und muß eine Leistung von  $N = 246$  PS bei  $n = 46$  Touren übertragen. Wie groß ist der Zahndruck in diesem Kegelrade?

$$v = \frac{D \pi n}{60} = \frac{3,44 \cdot \pi \cdot 46}{60}$$

$$v = 8,25 \text{ m}$$

$$\frac{Z \cdot v}{75} = N$$

$$Z = \frac{75 \cdot 246}{8,25}$$

$$Z = 2225 \text{ kg}$$

### § 31. Die gleitende Reibung.

Der fortschreitenden Bewegung eines Körpers von bestimmtem Materiale auf irgend einer Unterlage wirkt immer eine dieselbe verzögernde Ursache entgegen. — Man nennt letztere die **gleitende Reibung**. — Sie wird bedingt durch das Gewicht des Körpers, durch die Unebenheiten der Auflagefläche des Körpers und durch die seiner Unterlage, sowie durch die Art des Materiales beider, endlich zum Teil durch die Adhäsion.

Je nachdem Körper und Unterlage in direkter oder indirekter Berührung sind — letzteres ist der Fall bei Anwendung von Schmiermitteln —, unterscheidet man direkte (unmittelbare) und indirekte (mittelbare) Reibung.

Ein Schlitten sei durch ein Gewicht belastet und mit demselben  $Q$  kg schwer. — Am Ende des Schlittens, Fig. 103, ist eine Schnur befestigt, welche über eine Rolle geführt wird und an deren Ende sich ein Gewicht befindet. Dasselbe wird nun so groß genommen, daß ein Anstoß an den Schlitten genügt, um ihn in gleichförmige Bewegung zu setzen. Dann stellt  $P$  jene Kraft vor, welche die Reibung überwindet und zwar deshalb, weil die Be-

wegung des Schlittens eine gleichförmige geworden ist. Indem man den Schlitten nun mehr oder weniger belastet, hat man es in der Hand, den Reibungswiderstand abhängig von allen möglichen Umständen zu messen.

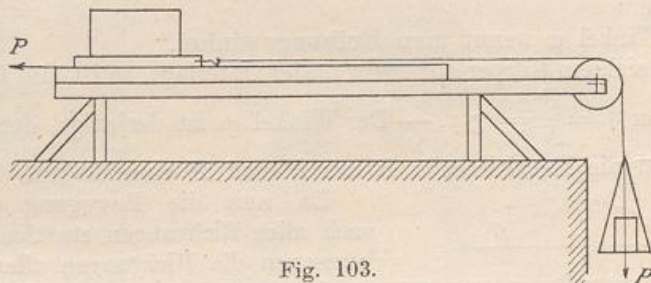


Fig. 103.

Gesetze über die gleitende Reibung:

1. Der Reibungswiderstand ist abhängig vom Stoffe der sich berührenden Körper. Er wird um so kleiner, je glatter und härter die Körper sind. Bei Holz ist die Reibung geringer, wenn die Berührung von Holz und Holz parallel zur Faserrichtung erfolgt. Öle und Fette verringern die Reibung; Wasser zwischen Hölzern vergrößert die Reibung.
2. Die Reibung ist abhängig vom Normaldruck des Körpers auf die Unterlage und zwar demselben proportional (die Adhäsion zwischen Körper und Unterlage ist vom Normaldruck aber unabhängig).
3. Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der Größe der Berührungsflächen der Körper (Adhäsion ist dagegen von ihr abhängig). Wenn bei demselben Normaldruck die Berührungsflächen größer werden, so wird der spezifische Normaldruck kleiner, die spezifische Reibung wird kleiner, die totale bleibt gleich.
4. Der Reibungswiderstand während der Bewegung ist nahezu unabhängig von der Geschwindigkeit derselben.
5. Die Reibung der Ruhe ist größer als diejenige der Bewegung.

Ist für 1 kg Normaldruck der Reibungswiderstand  $f$ , so ist derselbe bei  $N$  kg Normaldruck

$$W = f \cdot N \dots \dots \dots (82)$$

„Der Reibungswiderstand pro 1 kg Normaldruck heißt **Reibungskoeffizient**. Der totale Reibungswiderstand ist also gleich dem Produkte aus Reibungskoeffizient mal Normaldruck des Körpers.“

Zur Messung von  $f$  dient folgende Erwägung: Wird eine schiefe Ebene, Fig. 104, auf welcher sich ein Körper, dessen Reibungskoeffizient bestimmt werden soll, so lange gegen die Horizontale geneigt, bis der Körper nicht mehr von ihr heruntergleitet, so gilt die Beziehung

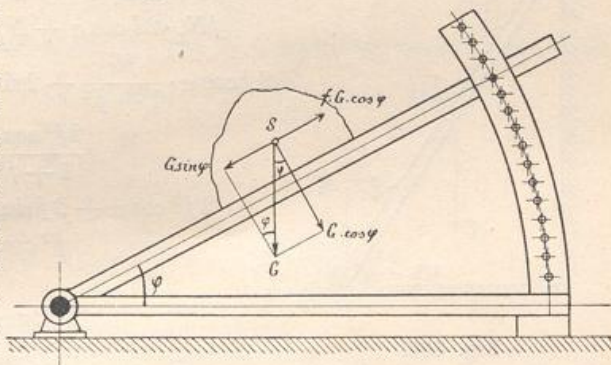


Fig. 104.

$$G \cdot \sin \varphi = f \cdot G \cos \varphi, \text{ d. h.}$$

$$f = \text{tg } \varphi \dots \dots \dots (83)$$

D. h. „Der Reibungskoeffizient ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die schiefe Ebene, auf welcher sich der Körper befindet, mit dem Horizonte einschließen muß, damit der letztere von ihr nicht mehr heruntergleite.“

„Den Winkel  $\varphi$  nennt man **Reibungswinkel**.“

Bewegt sich ein Körper auf horizontaler Unterlage, so ist also  $P = W = fN$ ,

Fig. 105, oder  $f = \frac{P}{N} = \text{tg } \varphi$ . — Der Winkel  $\varphi$  ist derjenige, den der Normaldruck  $N$  und die Resultierende  $R$  aus  $N$  und  $P$  einschließen.

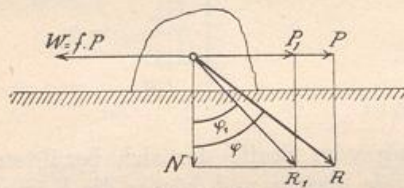


Fig. 105.

Da nun die Bewegung des Körpers nach allen Richtungen stattfinden kann, so begrenzen die Richtungen aller Resultierenden  $R$  einen Kegel, welcher **Reibungskegel** genannt wird.

Ist nun eine Kraft  $P_1$  nicht imstande, den Körper in gleichförmige Bewegung zu setzen oder ihn in derselben zu erhalten,

so ist der Winkel  $\varphi_1$ , welchen jetzt die Resultierende  $R_1$  und  $N$  bilden, kleiner als  $\varphi$ ; die Resultierende fällt in den Reibungskegel.

**Beispiele.**

130. Unter welchem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont muß eine  $G$  kg schwere Leiter mindestens in Fig. 106 geneigt sein, damit sie im Gleichgewichte bleibe? Der Reibungskoeffizient ist  $f$ .

Auflösung: Dem Umfallen der Leiter wirken entgegen die Reibungswiderstände  $fN_1$  und  $fN_2$ . Dann wird

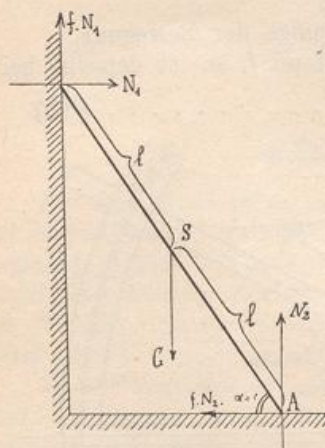


Fig. 106.

$$\begin{aligned} N_1 &= fN_2 \\ fN_1 + N_2 &= G \\ f^2N_2 + N_2 &= G \\ N_2 &= \frac{G}{1+f^2}; \quad N_1 = \frac{fG}{1+f^2} \end{aligned}$$

Aus  $\Sigma(M) = 0$ , z. B. in Bezug auf  $A$  wird

$$\begin{aligned} fN_1 \cdot 2l \cos \alpha + N_1 \cdot 2l \sin \alpha - G \cdot l \cos \alpha &= 0 \\ 2f \cos \alpha \cdot \frac{fG}{1+f^2} + 2 \sin \alpha \cdot \frac{fG}{1+f^2} - G \cos \alpha &= 0 \\ \frac{2f^2 \cos \alpha}{1+f^2} + \frac{2f \sin \alpha}{1+f^2} - \cos \alpha &= 0 \\ 2f^2 \cos \alpha + 2f \sin \alpha - \cos \alpha - f^2 \cos \alpha &= 0 \\ f^2 \cos \alpha + 2f \sin \alpha - \cos \alpha &= 0 \\ f^2 + 2f \text{tg } \alpha - 1 &= 0 \\ 2f \text{tg } \alpha &= 1 - f^2 \\ \text{tg } \alpha &= \frac{1-f^2}{2f} \end{aligned}$$

131. Es ist die zum Einrücken einer Friktionskupplung nötige Kraft zu ermitteln. Gegeben sind der Radius der Kupplung  $r$ , die zu übertragende Leistung  $N$ , die Tourenzahl  $n$ , der Winkel  $\alpha$  und der Reibungskoeffizient  $f$ . Fig. 107.

Auflösung: Durch die Einrückkraft wird auf die Kegelfläche der Kupplung ein spezifischer Druck  $p$ , d. h. ein Totaldruck  $F \cdot p$  ausgeübt. Derselbe muß

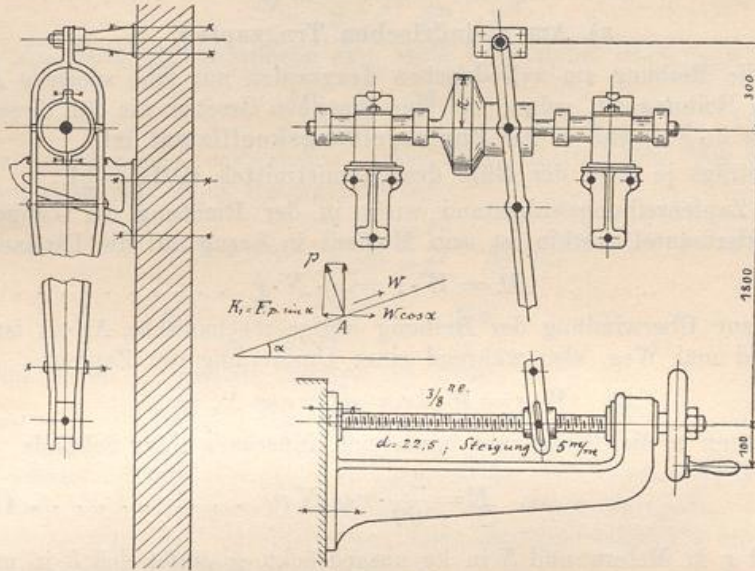


Fig. 107.

erzeugt werden, um erstens die Umfangskraft in der Kupplung, zweitens den Widerstand gegen die Einrückung aufzuheben.

Erstere ist  $\frac{M}{r} = f F p$ , letzterer  $W = f F \cdot p$ .

Aus  $\frac{M}{r} = f F p$  ergibt sich  $p = \frac{M}{f F \cdot r}$ .

Um diese Flächenpressung zu erzeugen, ist parallel zur Achsrichtung der Welle die Kraft

$$K_1 = F \cdot p \cdot \sin \alpha \quad \text{oder}$$

$$K_1 = F \cdot \frac{M}{f F r} \sin \alpha = \frac{M}{f r} \sin \alpha$$

nötig. Da auch die Horizontalkomponente von  $W$  aufgehoben werden muß, wird

$$K_2 = W \cos \alpha = f F p \cos \alpha = f F \cdot \frac{M}{f F r} \cdot \cos \alpha \quad \text{oder}$$

$$K_2 = \frac{M}{r} \cos \alpha$$

Daher ist die Einrückkraft

$$K = K_1 + K_2 = \frac{M}{f r} \sin \alpha + \frac{M}{r} \cos \alpha$$

$$K = \frac{M}{f r} (\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

laut (81) war  $M = 716200 \frac{N}{n}$ , somit ist

$$K = \frac{716200 \cdot N}{f r n} (\sin \alpha + f \cos \alpha) \dots \dots \dots (84)$$

§ 32. Zapfenreibung.

a) Am zylindrischen Tragzapfen.

Da die Reibung am zylindrischen Tragzapfen nur eine spezielle Art der gleitenden Reibung ist, gelten für jene dieselben Gesetze wie für diese; es ist dann  $W = \varphi \cdot N$ , wenn  $\varphi$  der **Zapfenreibungskoeffizient** ist.

$\varphi$  beträgt je nach der Güte des Schmiermittels  $0,014 \div 0,1$ .

Der Zapfenreibungswiderstand wirkt in der Richtung der Tangente an den Zylindermantel, mithin ist sein Moment in bezug auf die Drehachse

$$M = W \cdot r = \varphi \cdot N \cdot r \dots \dots \dots (85)$$

Die zur Überwindung der Reibung nötige mechanische Arbeit ist gleich Widerstand mal Weg, also während einer Umdrehung des Zapfens

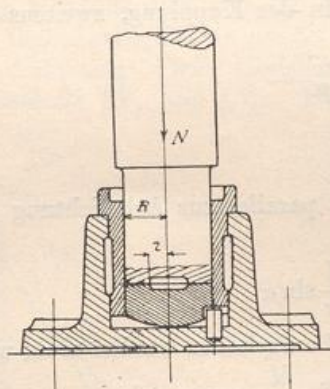
$$W \cdot s = W \cdot 2 r \pi = 2 \pi r \cdot \varphi N,$$

folglich, wenn  $n$  die Tourenzahl bezeichnet, innerhalb einer Sekunde

$$E = \frac{2 \pi}{60} \cdot r \varphi N n \dots \dots \dots (86a)$$

Wird  $r$  in Metern und  $N$  in kg ausgedrückt, so ergibt sich  $E$  in mkg/sek. In PS wird

$$E = \frac{2 \pi}{60 \cdot 75} r \varphi N n \dots \dots \dots (86b)$$



b) Am zylindrischen Spurzapfen.

Die Reibung des Spurzapfens auf seiner Unterlage ist ebenfalls eine Art gleitender Reibung; die Formel (82) findet somit auch hier Anwendung.

Das Moment der Reibung ist indes von dem am Tragzapfen verschieden.

In Fig. 108 sei ein ebener Ringspurzapfen mit dem äußeren Halbmesser  $R$  und dem innern  $r$  vorausgesetzt. Für einen neuen Zapfen ist die Annahme, daß sich der Druck gleichmäßig auf die Unterstützungsspurplatte verteilt, erlaubt. Der Druckmittelpunkt in einem Ringstückchen hat von der Achse den Abstand laut (57)

$$\varrho = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Da  $\alpha$  sehr klein und

$$\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sim 1$$

ist, ergibt sich

$$\varrho = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

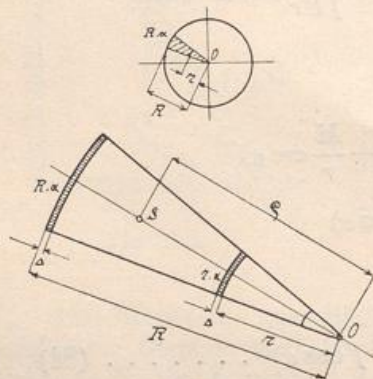


Fig. 108.

Demnach wird das Reibungsmoment

$$M = \frac{2}{3} \varphi N \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \dots \dots \dots (87)$$

Ist die Unterstüztungsfläche eine volle Kreisfläche, dann wird

$$M = \frac{2}{3} \varphi N \cdot R \dots \dots \dots (88)$$

Die pro Sekunde verbrauchte Arbeit zur Überwindung des Reibungswiderstandes beträgt beim Ringspurzapfen

$$E = \varphi \cdot N \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \pi \frac{n}{60 \cdot 75} \text{ PS oder}$$

$$E = \frac{\pi}{45 \cdot 75} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \varphi N n \dots \dots \dots (89)$$

Beim vollen Spurzapfen dagegen ist diese

$$E = \frac{\pi}{45 \cdot 75} \cdot R \varphi N n \dots \dots \dots (90)$$

Die Erfahrung hat gezeigt, daß bei eingelaufenen Zapfen der Druck auf die Flächeneinheit umgekehrt proportional der Geschwindigkeit, also auch umgekehrt proportional der Entfernung vom Zapfenmittelpunkte ist. Ist der Druck nun außen  $p_a$ , innen  $p_i$ , so gilt

$$\frac{p_a}{p_i} = \frac{r}{R}$$

Wird nun ein kleines Ringstückchen in lauter konzentrische Streifen von unendlicher kleiner Breite  $\Delta$  zerlegt, so ist der Druck auf den äußersten Streifen  $p_a \cdot R \cdot \alpha \cdot \Delta$ , auf den innersten  $p_i \cdot r \cdot \alpha \cdot \Delta$ . — Da aber laut obiger Gleichung  $p_a \cdot R = p_i \cdot r$  ist, folgt, daß die äußersten und innersten Streifen gleiche Drücke aufnehmen. Dasselbe gilt auch für alle andern Streifen, so daß die Mittelkraft aller Drücke also von der Drehachse den Abstand

$$\rho = \frac{R + r}{2}$$

haben muß. Das Reibungsmoment bei dem eingelaufenen Ringspurzapfen erhält somit den Wert

$$M = \varphi N \cdot \frac{R + r}{2} \dots \dots \dots (91)$$

bei dem vollen Zapfen hingegen

$$M = \frac{1}{2} \varphi N \cdot R \dots \dots \dots (92)$$

Die pro Sekunde zur Überwindung des Reibungswiderstandes am eingelaufenen Ringspurzapfen nötige Arbeit wird

$$E = \varphi \cdot N \cdot 2 \pi \cdot \frac{n}{60 \cdot 75} \text{ PS oder}$$

$$E = \varphi N (R + r) \frac{\pi n}{60 \cdot 75} \dots \dots \dots (93)$$

am eingelaufenen, vollen Spurzapfen dagegen

$$E = \varphi N \cdot R \frac{\pi n}{60 \cdot 75} \dots \dots \dots (94)$$

**Beispiele.**

132. Eine Welle, die eine 100 kg schwere Scheibe aufnimmt, ist mittels zweier Tragzapfen mit dem Durchmesser  $d = 60$  mm gelagert. Welche Leistung geht durch Reibung in den Lagern verloren, wenn die Welle  $n = 120$  Touren macht und der Reibungskoeffizient  $\varphi = 0,1$  ist?

Auflösung: 
$$E = \frac{2\pi}{60 \cdot 75} \cdot r \varphi N n$$

$$E = \frac{2\pi \cdot 0,03 \cdot 0,1 \cdot 100 \cdot 120}{60 \cdot 75}$$

$$E = 0,05 \text{ PS}$$

133. Der Druck auf einen Tragzapfen beträgt  $N$  kg — Die Tourenzahl des Zapfens ist  $n$  — Wie lang muß der Zapfen sein, damit die Reibungsarbeit höchstens 1 mkg/qcm werde?  $\varphi = 0,05 = \frac{1}{20}$ .

Auflösung: Der Flächendruck des Zapfens ist

$$q = \frac{N}{dl}$$

Die Reibungsarbeit pro Sekunde wird

$$a = \varphi \frac{N}{dl} \cdot \frac{d\pi n}{60} = \varphi \frac{N}{l} \cdot \frac{\pi n}{60}$$

$$1 \text{ mkg/qcm} = 1000 \text{ mmkg}/100 \text{ qmm} = 10 \text{ mmkg}/1 \text{ qmm}$$

$$a \leq 10 \text{ mmkg}/1 \text{ qmm}$$

$$\varphi \frac{N}{l} \cdot \frac{\pi n}{60} = 10$$

$$l = \varphi \frac{N \cdot \pi n}{600} \sim \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{200} N n$$

$$l \sim \frac{1}{4000} N \cdot n \dots \dots \dots (95)$$

134. Eine schmiedeeiserne, runde Welle soll eine Leistung von  $N$  PS bei  $n$  Touren übertragen. Ihr Durchmesser ist  $d = 0,12 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$  Meter, ihre Länge  $l$  Meter. — Der wievielte Teil der Leistung geht durch Reibung in ihren Lagern verloren, wenn  $\varphi = 0,05$  ist und das spezifische Gewicht für Schmiedeeisen rund mit  $\gamma = 8 \text{ kg/cdm}$  angenommen wird?

Auflösung: Das Gewicht der Welle in kg ist

$$G = \left( \frac{d^3 \pi}{4} \cdot l \cdot \gamma \right) \text{ kg}$$

In dieser Rechnung werden alle Maße auf Meter und kg bezogen.

Der Effektsverlust, in mkg/sek gemessen, wird

$$E = \frac{2\pi}{60} r \varphi G n$$

$$E = \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{d^2 \pi}{4} l \gamma n$$

$$E = \frac{\pi}{60 \cdot 80} \cdot 0,12^3 \cdot \frac{N}{n} \cdot l \gamma n$$

$$E = \frac{\pi^2 \cdot 0,12^3}{60 \cdot 80} \cdot 8000 \cdot N l$$

$$E = \frac{\pi^2 \cdot 0,001728 \cdot 10}{6} = 0,0288 N l$$

$$E \sim 0,03 N l \dots \dots \dots (96)$$

D. h. pro 1 m Wellenlänge gehen  $\frac{3}{100} N$  mkg/sek verloren?

Für  $N = 50$  PS und  $l = 100$  m ergibt sich z. B.

$$E = \frac{0,03 \cdot 50 \cdot 100}{75} = 2 \text{ PS}$$

135. Der volle, ebene Stützzapfen einer vertikal geachsten Turbine, welche 246 PS bei 46 Touren überträgt, muß einen Druck von 10000 kg aufnehmen und hat einen Durchmesser von 170 mm. Wie groß ist die durch Reibung verloren gehende Leistung und wie viele Prozente der Gesamtleistung der Turbine beträgt sie a) wenn der Zapfen eingelaufen, b) wenn er neu ist?  $\varphi = 0,08$ .

Auflösung: a)  $E = \varphi N R \frac{\pi n}{60 \cdot 75}$

$$E = \frac{0,08 \cdot 10000 \cdot 0,085 \cdot \pi \cdot 46}{60 \cdot 75}$$

$$E \sim 2,18 \text{ PS}$$

$$218 : 246 = 0,89, \text{ d. h.}$$

es gehen durch Reibung  $0,89\%$  der Gesamtleistung der Turbinen verloren.

b)  $E = \frac{\pi}{45 \cdot 75} \cdot R \varphi N n$

$$E = \frac{\pi \cdot 0,085 \cdot 0,08 \cdot 10000 \cdot 46}{45 \cdot 75}$$

$$E \sim 2,9 \text{ PS}$$

$$290 : 246 = 1,18, \text{ d. h.}$$

der Verlust beträgt beim neuen Zapfen  $1,18\%$  der Gesamtleistung.

136. Der Ringspurzapfen einer vertikal geachsten Turbine hat 430 mm äußeren und 300 mm inneren Durchmesser. Der Druck auf ihn beträgt 20635 kg. Die Turbine hat 1250 PS bei 120 Touren zu übertragen. Wie groß ist der durch Reibung verloren gehende Effekt, wenn vorausgesetzt wird, daß der Zapfen eingelaufen und  $\varphi = 0,08$  ist?



Auflösung:

$$E = \varphi N (R + r) \frac{\pi n}{60 \cdot 75}$$

$$E = 0,08 \cdot 20635 \cdot (0,215 + 0,15) \frac{\pi \cdot 120}{60 \cdot 75}$$

$$E \sim 5,05 \text{ PS}$$

$$505 : 1250 = 0,405$$

Der Effektsverlust ist  $0,405\%$  der Gesamtleistung.

### § 33. Das Bremsdynamometer oder der Prony'sche Zaum.

Die Zapfenreibung kann benutzt werden, um mittels einer geeigneten Vorrichtung, dem Bremsdynamometer oder Prony'schen Zaum, Fig. 109, den Effekt einer Arbeitsmaschine zu messen.

Diese Vorrichtung besteht aus einem langen **Gewichtshebel**, an dessen einem Ende mittelst fester Schrauben zwei segmentförmig ausgeschnittene

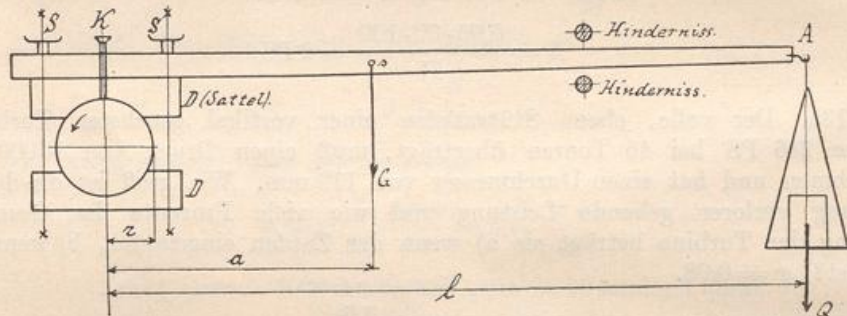


Fig. 109.

**Backen (Sättel)** befestigt sind und an dessen anderem Ende eine **Wagschale** hängt. Um ein Herumschleudern des Hebels zu verhindern, wird ober- und unterhalb desselben in der Nähe der Wagschale je ein festes **Hindernis** angebracht.

Die Anwendung des Zaumes ist folgende. Die Welle der Arbeitsmaschine wird von der der Kraftmaschine losgekuppelt und der Zaum auf letztere aufgebracht, wobei die Schrauben *S* noch nicht fest angezogen sind. Wird nun die Kraftmaschine in Gang gesetzt, so sucht ihre Welle den Zaum, in vorliegendem Falle nach links, mitzunehmen, was aber durch die feste Schwelle verhindert wird. Die Schrauben werden nun so lange angezogen, bis die Kraftmaschine ihre Tourenzahl *n* hat, d. h. jene Tourenzahl, welche sie früher für die Arbeitsmaschine hatte. Die Reibung des Bremszaumes verzehrt nun ebensoviel Arbeit wie die Kraftmaschinenwelle an die Arbeitsmaschinenwelle abzugeben hat.

Die Gewichtsschale wird nun mit Gewichten versehen, bis der Hebel horizontal liegt. Dann ist das Moment der Zapfenreibung gleich dem der Gewichte, also gilt

$$W \cdot r = Q \cdot l, \text{ somit}$$

$$W = Q \frac{l}{r}$$

Die Arbeit des Widerstandes pro Sekunde und auch die Leistung der Maschine wird dann

$$N = W \cdot \frac{2r\pi n}{60 \cdot 75} = Q \frac{l}{r} \cdot \frac{2r\pi n}{60 \cdot 75} \text{ oder}$$

$$N = \frac{\pi}{30 \cdot 75} Q l n \dots \dots \dots (97)$$

Um einer zu großen Erhitzung der Welle und der Backen vorzubeugen, wird durch den Kanal *K* stets Seifenwasser zugeführt.

In *Q* ist auch das Gewicht der Wagschale und das auf deren Aufhängepunkt reduzierte Zaumgewicht *P* einbegriffen. — Ist nämlich das Zaumgewicht *G* kg, dann gilt  $G \cdot a = Pl$  und

$$P = G \frac{a}{l}$$

Der Abstand *a* kann durch Ausbalancieren des Zaumes versuchsweise ermittelt werden. Sonach ist *P* auch bestimmt.

Die letztere Operation kann gespart werden, wenn man den Hebel über die Backen hinaus soweit verlängert, daß sein Schwerpunkt vertikal über das Wellenmittel zu liegen kommt.

Bei vertikal stehender Welle kann der Zaum ebenfalls zweckentsprechend benutzt werden, der Endpunkt *A* muß aber genau horizontal geführt sein, da sonst eine Verdrehung der ganzen Bremse eintreten würde. *Q* kann dann durch ein Gewicht gemessen werden, welches an einem über eine feste Rolle geleiteten Seile hängt. Das Seilstück von *A* bis zur Rolle muß senkrecht zum Hebel und genau horizontal sein. — Auch eine Federwage kann zur Messung von *Q* herangezogen werden.

Mittels des Prony'schen Zaumes kann die Leistung der Kraftmaschine bei jeder beliebigen Tourenzahl bestimmt werden, was in der Praxis von hochbedeutender Wichtigkeit ist.

Ist der Durchmesser der Kraftmaschinenwelle klein, so nimmt man gußeiserne Bremsringe.

Je kleiner die Tourenzahl der Welle und je größer die von ihr übertragene Leistung ist, desto größer wird der Durchmesser der Bremsbackenausnehmung genommen.

### § 34. Die rollende Reibung oder Wälzungswiderstand.

Die rollende Reibung tritt auf, wenn ein zylindrischer Körper auf einer Unterlage fortrollt. Der Unterschied gegen die gleitende Reibung ist der, daß der Körper mit immer neuen Teilen der Unterlage in Berührung kommt. Das Auftreten der rollenden Reibung kann man so erklären, daß man annimmt, der Körper drücke die Unterlage auf der Breite *a* ein, Fig. 110a. — Um nun denselben gleichmäßig fortzurollen, bedarf es einer gewissen Kraft *P*, deren Moment um die Kippkante *B* genau so groß sein muß, wie das Moment des Körpergewichtes in bezug auf *B*. — *a* heißt der **Hebelarm der rollenden Reibung** und beträgt für Eisen auf Eisen 0,05 cm, ebensoviel für Hartholz auf Hartholz, für gewöhnliches Holz auf gewöhnlichem Holz 0,1 cm, für Stein auf Stein (gut gepflasterte oder gut geschotterte Straßen) 0,15 cm. — In den Fällen a), b) und c) gilt dann

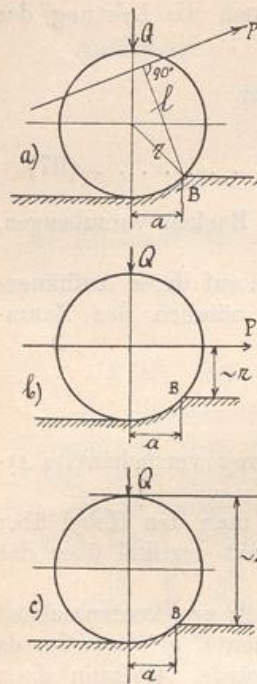


Fig. 110.

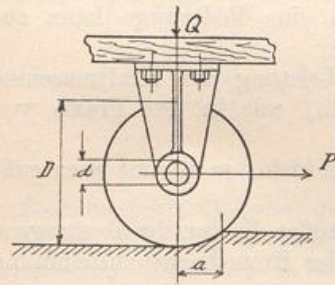


Fig. 111.

$$\left. \begin{aligned} P \cdot l &= Qa & \text{oder} & & P &= \frac{Q \cdot a}{l} \\ P \cdot r &= Qa & \text{oder} & & P &= \frac{Q \cdot a}{r} \\ P \cdot 2r &= Q \cdot a & \text{oder} & & P &= \frac{Q \cdot a}{2r} \end{aligned} \right\} 98)$$

Die zur Fortbewegung von Fahrzeugen nötige Kraft  $P$  indes bestimmt sich nicht mehr so einfach. Wirkt  $P$ , Fig. 111, die Wagenachse ziehend, so hat das Moment von  $P$  gleich zu sein dem Momente der rollenden Reibung plus dem Momente der Zapfenreibung. Demnach wird

$$\begin{aligned} P \cdot \frac{D}{2} &= Qa + \varphi Q \frac{d}{2} \\ P &= \frac{Qa + \varphi Q \frac{d}{2}}{\frac{D}{2}} = Q \frac{a + \varphi \frac{d}{2}}{\frac{D}{2}} \end{aligned}$$

Die Größe  $k = \frac{a + \varphi \frac{d}{2}}{\frac{D}{2}}$  heißt der **Koeffizient**

der Gesamtreibung für Fahrzeuge. Somit ist

$$\left. \begin{aligned} P &= k \cdot Q, \\ \text{wenn } k &= \frac{a + \varphi \frac{d}{2}}{\frac{D}{2}} \end{aligned} \right\} \dots (99)$$

Werte von Reibungskoeffizienten (Koeffizienten der gleitenden, rollenden und der Zapfenreibung sowie der Gesamtreibung für Fuhrwerke) sind in des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte“ und auch in Ingenieurkalendern enthalten.

Die wälzende oder rollende Reibung ist natürlich kleiner als die gleitende und auch kleiner als die Zapfenreibung. Man kann dies an jedem auf Rädern laufenden Fahrzeuge oder an jedem auf untergelegten Walzen fortbewegten Körper erkennen.

**Beispiele.**

137. Wie groß muß die durch die Achse einer 200 kg schweren, gußeisernen Walze von 40 cm Durchmesser gehende Kraft  $P$  sein, damit sie diese Walze auf gußeisener Bahn gleichförmig fortbewege?

Auflösung:

$$\begin{aligned} P &= Q \frac{a}{r} = 200 \frac{0,05}{20} \\ P &\sim 0,5 \text{ kg} \end{aligned}$$

138. Ein 300 kg schwerer Körper soll mittels zweier, je 20 kg schwerer, hölzerner Walzen und auf denselben liegender Holzplatte, deren Gewicht in dem Körpergewicht einbegriffen ist, auf Steinpflaster fortgeschafft werden. Wie groß muß die an der Platte wirkende, horizontale Kraft  $P$  sein, wenn der Hebelarm der rollenden Reibung zwischen Holz und Steinpflaster 0,75 und derjenige zwischen Holz und Holz 0,1 cm ist?

Auflösung: Die Reibung zwischen Platte und Walzen ist

$$P_1 = \frac{0,1}{15} \cdot 300$$

Die Reibung zwischen Walzen und Unterlage wird

$$P_2 = \frac{0,75}{15} \cdot (300 + 40)$$

Demnach ergibt sich

$$P = P_1 + P_2 = \frac{0,1}{15} \cdot 300 + \frac{0,75}{15} \cdot 340$$

$$P = 2 + 0,05 \cdot 340$$

$$P \sim 19 \text{ kg}$$

139. Welche Zugkraft ist notwendig, um einen Wagen, welcher samt Belastung 2500 kg wiegt, auf chaussierter Straße (in gutem Zustande) fortzubewegen?  $k = 0,023$ .

Auflösung:

$$P = 0,023 \cdot 2500$$

$$P \sim 57 \text{ kg}$$

### § 35. Der Hebel.

Unter einem Hebel versteht man eine unbiegsame Stange, welche von mehreren Kräften um einen Punkt, den sogenannten **Unterstützungspunkt**, gedreht wird. Unter **Hebelarm** versteht man die Entfernung des Angriffspunktes einer Kraft vom Unterstützungspunkte. Ein **mathematischer Hebel** ist ein solcher, dessen Gewicht als Null angenommen wird; ein **physischer Hebel** ein solcher, dessen Gewicht berücksichtigt werden muß. Ein **einarmiger Hebel**, Fig. 112a, ist derjenige, an welchem die Kräfte nur auf einer Seite des Unterstützungspunktes angreifen; ein **zweiarmiger Hebel** ist ein solcher, an welchem die Kräfte beiderseits desselben wirken, Fig. 112b. — Fallen alle Hebelarme in eine gerade Linie, so heißt der Hebel ein **gerader Hebel**, bilden die Hebelarme einen Winkel, so heißt er **Winkelhebel**, Fig. 112c.

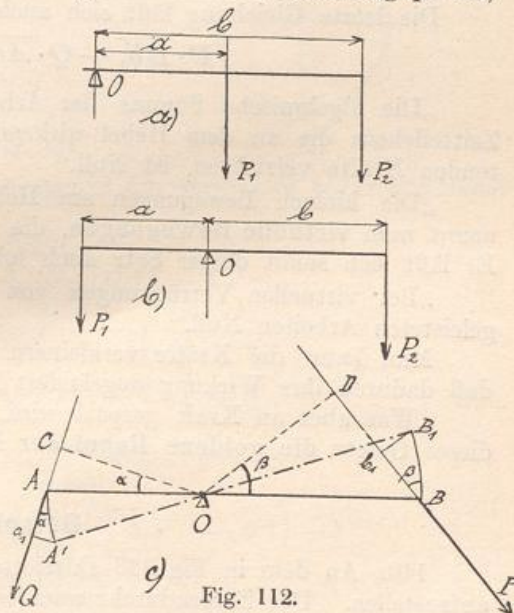


Fig. 112.

„Gleichgewicht an einem Hebel ist vorhanden, wenn die Summe der statischen Momente aller vorhandenen äußeren Kräfte in bezug auf den Unterstützungspunkt gleich Null wird.“

Ein Hebel, Fig. 112c, an dem die Kräfte  $P$  und  $Q$  angreifen, sei im Gleichgewicht. Wird er um den Unterstützungspunkt ein wenig gedreht, so daß  $A$  nach  $A'$  und  $B$  nach  $B'$  kommt, dann ist die von  $P$  geleistete Arbeit  $P \cdot \overline{Bb_1}$ , — die von  $Q$  geleistete  $Q \cdot \overline{Aa_1}$ . — Hierbei ist  $\overline{A'a_1} \perp Q$  und  $\overline{B'b_1} \perp P$ .

Da die Bögen  $AA'$  und  $BB'$  sehr klein sind, können sie als Gerade angenommen werden. Deshalb folgt

$$\overline{Aa_1} = AA_1 \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{Bb_1} = BB_1 \cdot \cos \beta$$

Die Arbeiten der Kräfte  $P$  und  $Q$  sind dann

$$P \cdot \overline{Bb_1} = P \cdot BB_1 \cos \beta = P \cdot BB_1 \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

$$Q \cdot \overline{Aa_1} = Q \cdot AA_1 \cdot \cos \alpha = Q \cdot AA_1 \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

Nun ist  $P \cdot \overline{OD} = Q \cdot \overline{OC}$  und  $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$  oder  $\frac{AA_1}{OA} = \frac{BB_1}{OB}$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} P \cdot \overline{Bb_1} : Q \cdot \overline{Aa_1} &= P \cdot BB_1 \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} : Q \cdot AA_1 \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \\ &= P \cdot \overline{OD} \cdot \frac{BB}{\overline{OB}} : Q \cdot \overline{OC} \cdot \frac{AA_1}{\overline{OA}} \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$P \cdot \overline{Bb_1} = Q \cdot \overline{Aa_1} \dots \dots \dots (100a)$$

Die letzte Gleichung läßt sich auch in der Form schreiben:

$$P \cdot \overline{Bb_1} - Q \cdot \overline{Aa_1} = 0 \dots \dots \dots (100b)$$

„Die algebraische Summe der Arbeiten, welche während eines kleinen Zeitteilchens die an dem Hebel wirkenden und sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte verrichten, ist Null.“

„Die kleinen Bewegungen am Hebel (auch an anderen Vorrichtungen) nennt man **virtuelle Bewegungen**, die kleinen Arbeiten **virtuelle Arbeiten**.“ Es läßt sich somit obiger Satz auch folgendermaßen aussprechen:

„Bei virtuellen Verrückungen von Vorrichtungen ist die Summe aller geleisteten Arbeiten Null.“

Man kann die Kräfte verkleinern und ihre Hebelarme vergrößern, so daß dadurch ihre Wirkung ungeändert bleibt.

„Was aber an Kraft gespart wird, geht an Weg verloren. Man nennt dieses Gesetz **die goldene Regel der Mechanik**.“

**Beispiele.**

140. An dem in Fig. 113 skizzierten Hebel die Gleichgewichtsbedingung aufzustellen. Der Zapfendurchmesser sei  $r$ , der Zapfenreibungskoeffizient  $\varphi$ .

Auflösung: Bringt man im Zapfenmittelpunkte zu den Kräften  $P$ ,  $Q$  und  $G$  parallele und entgegengesetzt gleiche Kräfte an, so ergeben sich die Kräftepaarmomente  $P \cdot a$ ,  $G \cdot c$  und  $Qb$ , und der Zapfen erfährt einen Normdruck  $N$ . Letzterer wird als Resultierende aller an ihm angreifenden horizontalen und vertikalen Kräfte bestimmt. Nun ergeben sich die Gleichungen

$$\Sigma(H) = P \sin \beta - Q \sin \alpha$$

$$\Sigma(V) = G + P \cos \beta + Q \cos \alpha$$

$$N = \sqrt{[\Sigma(H)]^2 + [\Sigma(V)]^2}$$

Der Zapfenreibungswiderstand wird  $\varphi \cdot N$ . Die Gleichgewichtsbedingung am Hebelzapfen lautet daher

$$P \cdot a + G \cdot c - Q \cdot b +$$

$$+ \varphi \sqrt{(P \sin \beta - Q \sin \alpha)^2 + (G + P \cos \beta + Q \cos \alpha)^2} \cdot r = 0$$

141. Wie groß muß das Gewicht  $G$  des in Fig. 114 gezeichneten Sicherheitsventiles gemacht werden, damit letzteres bei einem Kesselüberdrucke von  $p = 6$  Atm. geschlossen bleibe? Hierzu noch gegeben das Ventilgewicht

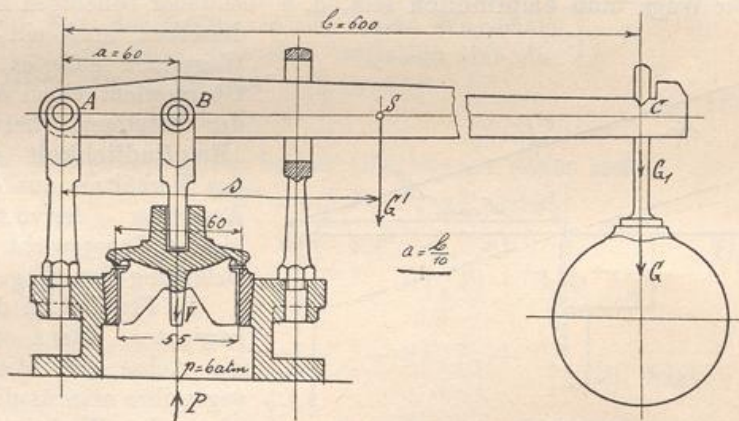


Fig. 114.

$V = 0,2$  kg und das auf den Aufhängepunkt des Gewichtes reduzierte Hebelgewicht  $G_1 = 1$  kg.

In bezug auf den Drehpunkt  $A$  gilt

$$V \cdot a - P \cdot a + (G + G_1) b = 0$$

$$G + G_1 = P \cdot \frac{a}{b} - V \cdot \frac{a}{b}$$

$$G = P \cdot \frac{a}{b} - V \cdot \frac{a}{b} - G_1$$

$$G = \frac{a}{b} \left( \frac{\pi}{4} d^2 p - V \right) - G_1$$

$$G = \frac{60}{600} \left( \frac{\pi}{4} 5,5^2 \cdot 6 - 0,2 \right) - 1$$

$$G \sim 13 \text{ kg}$$

§ 36. Die Wagen.

Die Wagen beruhen auf dem Gesetze des Hebels. Sie dienen für Ermittlung des Gewichtes von Körpern.

a) Die gleicharmige Wage. Sie besteht aus einem gleicharmigen Hebel, an dessen Endpunkten die Wagschalen aufgehängt sind, Fig. 115.

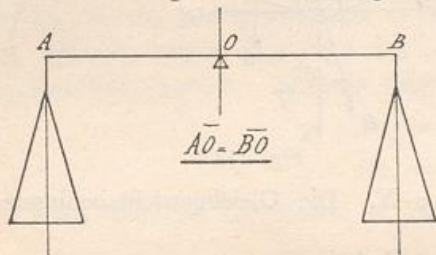


Fig. 115.

Die Anforderungen, welche an eine gute Wage gestellt werden, sind:

a) Sie muß richtig sein, d. h. bei gleicher Belastung der gleich schweren Wagschalen muß der Waghebel horizontal liegen. Das ist nur der Fall, wenn derselbe symmetrisch ausgeführt ist. Der Drehpunkt des Wagbalkens muß mit den Aufhängepunkten der Schalen theoretisch in einer Geraden liegen.

β) Die Wage muß sich in sicherem Gleichgewichte befinden. Dies trifft zu, wenn ihr Schwerpunkt vertikal unter dem Aufhängepunkt des Wagbalkens liegt.

γ) Die Wage muß empfindlich sein, d. h. bei jeder beliebigen Belastung derselben muß ein in eine Wagschale gelegtes, kleines Übergewicht einen Ausschlag der letzteren hervorrufen.

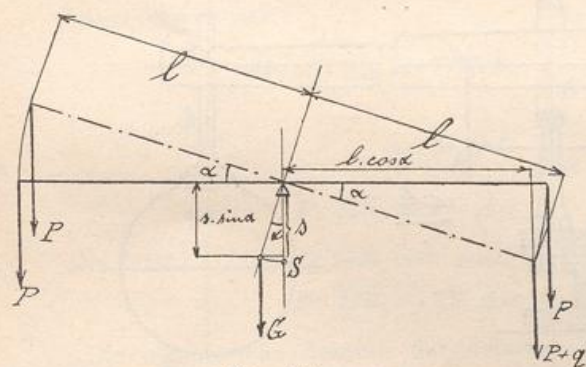


Fig. 116.

„Empfindlichkeit ist nun das Verhältnis aus dem den Ausschlag hervorrufenden, kleinen Übergewicht und der Belastung der Wage.“

In Fig. 116 sei das Übergewicht q. Dann stellt sich die Achse des Wagbalkens gegen ihre ursprüngliche Lage unter dem Winkel alpha ein. Es ist somit

$$\begin{aligned}
 (P + q)l \cos \alpha &= G \cdot s \sin \alpha + P \cdot l \cos \alpha \\
 ql \cos \alpha &= G \cdot s \cdot \sin \alpha \\
 \left. \begin{aligned}
 \text{tg } \alpha &= \frac{ql}{G \cdot s} \\
 \text{und } q &= \frac{G \cdot s \cdot \text{tg } \alpha}{l}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (101)
 \end{aligned}$$

Der Ausschlagwinkel alpha wird um so größer, d. h. die Wage um so empfindlicher, je geringer das Gewicht der Wage und je größer der Arm des Wagbalkens ist, ferner je weniger tief der Schwerpunkt sich unter dem Aufhängepunkt befindet:

Um den ersten beiden Bedingungen zu genügen, wird der Wagebalken durchbrochen ausgeführt.

Es seien  $G = 2 \text{ kg}$ ,  $s = 1 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 1^\circ$  ( $\text{tg } \alpha \sim 0,02$ ) und  $l = 500 \text{ mm}$ ,  
 ferner  $P = 10 \text{ kg}$ .

Dann wird  $q = \frac{2000 \cdot 1 \cdot 0,02}{500} \text{ Gramm} = 0,08 \text{ Gramm}$ .

Demnach wird die Empfindlichkeit der Wage

$$E = \frac{0,08}{10000} = \frac{8}{1000000}$$

$$E \sim \frac{1}{125000}$$

Um mit einer unrichtigen Wage doch richtig wägen zu können, bedient man sich entweder der Methode von **Borda** oder derjenigen von **Gauß**.

Methode von Borda. Man lege den Körper auf die eine Wagschale und stelle durch Auflegen von Tara auf die andere Gleichgewicht her. Dann ersetze man den Körper durch Gewichte. Letztere ergeben dann seine Schwere.

Methode von Gauß. Der Körper wird zuerst in die linke Wagschale, Fig. 117, gelegt und durch in die rechte gelegte Gewichte von der Größe  $P_1$  gewogen.

Dann ist  $K \cdot a = P_1 \cdot b$

Hierauf wird der Körper in die rechte Wagschale gelegt und werden links Gewichte aufgelegt, bis die Wage ins Gleichgewicht gelangt. Dann wird

$K \cdot b = P_2 \cdot a$

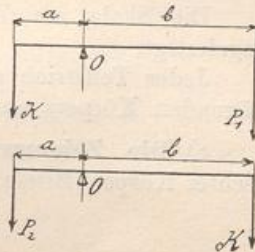


Fig. 117.

Durch Multiplikation der beiden Gleichungen ergibt sich

$K^2 \cdot ab = P_1 \cdot P_2 \cdot ab$  oder

$K = \sqrt{P_1 \cdot P_2}$  . . . . . (102a)

Da  $\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 = \frac{P_1^2 + 2P_1P_2 + P_2^2}{4}$  und

$\left(\frac{P_1 - P_2}{2}\right)^2 = \frac{P_1^2 - 2P_1P_2 + P_2^2}{4}$  ist, folgt

$\sqrt{\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{P_1 - P_2}{2}\right)^2} = \sqrt{P_1 \cdot P_2} = K$

Wegen der Kleinheit von  $\left(\frac{P_1 - P_2}{2}\right)^2$ , kann annähernd geschrieben werden

$K \sim \frac{P_1 + P_2}{2}$  . . . . . (102b)

„Das richtige Körpergewicht ist annähernd das arithmetische Mittel aus beiden Wägegewichten.“

b) Die Schnellwage. Fig. 118. Sie besteht aus einem ungleicharmigen Hebel, an dessen längerem Arm ein verschiebbares Gewicht und an dessen anderem Arm eine Wagschale angebracht ist. Ist  $Q'$  das Ge-

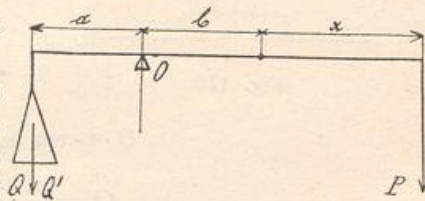


Fig. 118.



wicht der letzteren und  $P$  die Größe des verschiebbaren Gewichtes, so ist bei leerer Wagschale der Hebel horizontal, wenn

$$Q' \cdot a = P \cdot b$$

ist. Daraus kann  $b$  bestimmt werden. Der Anfangspunkt der Teilung liegt somit fest. Wird nun in die Wagschale das Gewicht  $Q$  gelegt, so muß  $P$  z. B. um  $x$  nach rechts geschoben werden, damit der Wagbalken wieder horizontal bleibe. Es ergibt sich dann

$$P(x + b) = (Q + Q') \cdot a$$

$$P \cdot x + P \cdot b = Q \cdot a + Q' \cdot a$$

$$P x = Q \cdot a$$

$$Q = \frac{P \cdot x}{a} \dots \dots \dots (103)$$

Die Skala am Wagbalken wird empirisch (auf Grund von Versuchen) angefertigt.

Jeder Teilstrich am längeren Wagarm gibt sofort das Gewicht des zu wägenden Körpers an.

c) **Die Zeigerwage.** Fig. 119. Sie wird hauptsächlich zur Wägung leichter Körper (Briefe u. dgl.) benutzt. In einem Ständer ist der Drehpunkt  $O$  eines dreiarmligen Winkelhebels gelagert, dessen oberster Arm bei mittlerer Belastung horizontal liegt. Der Schwerpunkt  $S$  des Winkelhebels befindet sich vertikal unter dem Drehpunkte  $O$ , wenn die Wage unbelastet ist. Zwischen den beiden andern Winkelhebelarmen ist eine bogenförmige Skala angebracht; die auf ihre Teilung zeigende Marke ist am Ständer festgemacht. Eine Stange  $AC$ , welche durch die Kurbel  $O_1C$  am Ständer gelenkt und in  $A$  mit  $OA$  gelenkig verbunden ist, nimmt oben die Wagschale auf.

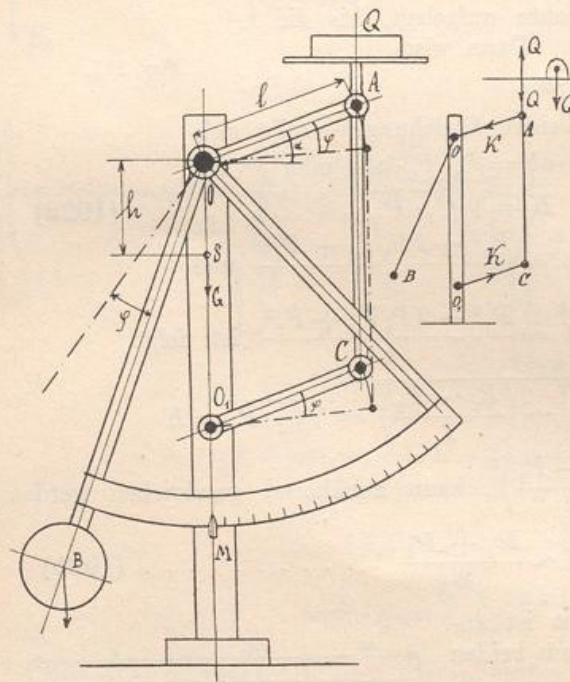


Fig. 119.

eines dreiarmligen Winkelhebels gelagert, dessen oberster Arm bei mittlerer Belastung horizontal liegt. Der Schwerpunkt  $S$  des Winkelhebels befindet sich vertikal unter dem Drehpunkte  $O$ , wenn die Wage unbelastet ist. Zwischen den beiden andern Winkelhebelarmen ist eine bogenförmige Skala angebracht; die auf ihre Teilung zeigende Marke ist am Ständer festgemacht. Eine Stange  $AC$ , welche durch die Kurbel  $O_1C$  am Ständer gelenkt und in  $A$  mit  $OA$  gelenkig verbunden ist, nimmt oben die Wagschale auf.

Wird in letztere ein Körper vom Gewichte  $Q$  gelegt, so dreht sich der Winkelhebel um  $\varphi$  nach abwärts. Nach den Bezeichnungen in Fig. 119 wird dann

$$Q \cdot l \cdot \cos(\alpha - \varphi) = Gh \sin \varphi$$

$$Q = G \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} \dots \dots \dots (104)$$

Aus aufgelegten, bekannten Gewichten  $Q$  können die zugehörigen Winkel  $\varphi$  gerechnet werden. Diese aber werden nicht auf der Skala aufgetragen, sondern gleich die entsprechenden Gewichte und zwar von 10 g zu 10 g.

Es ist gleichgültig, an welcher Stelle der Wagschale die Last liegt. Fügt man in  $A$  zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte  $Q$  hinzu, so drückt die nach abwärts wirkende den Winkelhebel nieder, während die nach aufwärts wirkende mit der Last  $Q$  ein Kräftepaar bildet, dessen Moment durch dasjenige des in den Hebelarmen  $\overline{OA}$  und  $\overline{O_1C}$  entstehende Kräftepaares aufgehoben wird.

Durch Verlängerung der Hebel  $\overline{OA}$  und  $\overline{O_1C}$  über  $O$  und  $O_1$  hinaus um die Stücke  $\overline{OA_1} = \overline{OA}$  und  $\overline{O_1C_1} = \overline{OC}$  unter Fortlassung des Hebels  $\overline{OB}$ , also durch doppelte Anordnung der Parallelogrammkonstruktion, entsteht die sogenannte **Tafelwage**, Fig. 120.

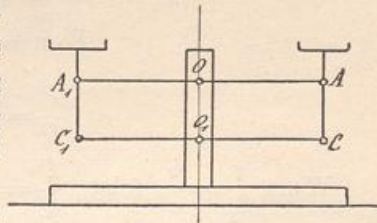


Fig. 120.

d) **Die Dezimalwage**. Fig. 121. Erfunden von Quintenz in Straßburg im Jahre 1821. Sie besteht im wesentlichen aus einem zweiarmigen Hebel, dessen Drehpunkt  $D_1$  in einem Ständer gelagert ist. An dem längeren Arme  $\overline{D_1A}$  dieses Wagbalkens hängt eine Wagschale, am kürzeren greifen zwei Zugstangen  $\overline{BD}$  und  $\overline{CE}$  an.

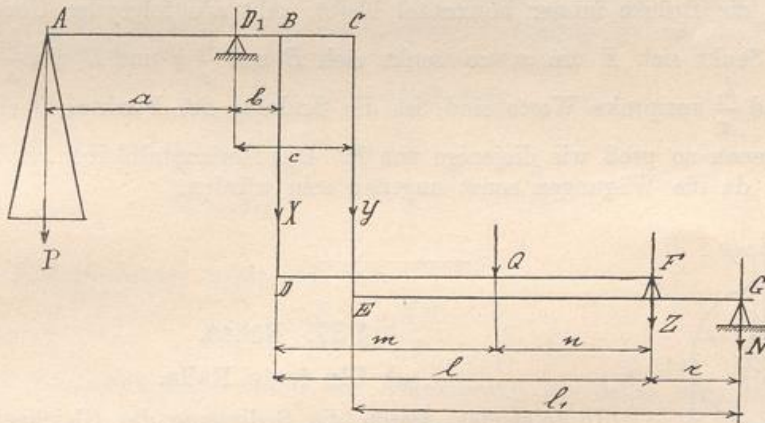


Fig. 121.

An letzteren sind die einarmigen Hebel  $\overline{DF}$  und  $\overline{EG}$  angehängt. Der erstere dieser Hebel heißt **Brücke**.

Eine auf einer beliebigen Stelle der letzteren befindliche Last bringt in der Zugstange  $\overline{BD}$  die Beanspruchung  $X$  und auf die Stütze  $F$  den Druck  $Z$  hervor. Nun muß sein

$$X \cdot l = Q \cdot n, \text{ daher}$$

$$X = \frac{Q \cdot n}{l} \text{ und}$$

$$Z \cdot l = Q \cdot m, \text{ also}$$

$$Z = \frac{Q \cdot m}{l}$$

Wird  $Z$  in  $Y$  und  $N$  zerlegt, so ergibt sich

$$Y \cdot l_1 = Z \cdot r, \text{ daraus}$$

$$Y = \frac{Z \cdot r}{l_1} = Q \frac{m \cdot r}{l \cdot l_1}$$

Gleichgewicht ist dann vorhanden, wenn die Summe der Momente von  $X$  und  $Y$  in bezug auf  $D_1$  gleich ist dem Momente von  $P$  in bezug auf genannten Drehpunkt. Somit wird

$$P \cdot a = X \cdot b + Y \cdot c$$

$$P \cdot a = Q \cdot \frac{n}{l} \cdot b + Q \frac{m \cdot r}{l \cdot l_1} \cdot c$$

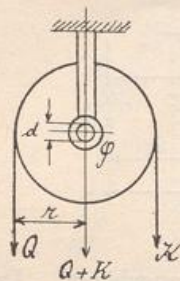
$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \cdot \left[ \frac{n}{l} + \frac{m \cdot r}{l \cdot l_1} \cdot \frac{c}{b} \right]$$

Wenn  $\frac{r}{l_1} = \frac{b}{c}$ , folgt  $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \left( \frac{n}{l} + \frac{m}{l} \right)$  oder

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \cdot \frac{m+n}{l} = \frac{b}{a}, \text{ d. h.}$$

$$P = Q \cdot \frac{b}{a} \text{ f\"ur } \frac{r}{l_1} = \frac{b}{c} \dots \dots \dots (105)$$

Wenn demnach  $a = 10b$  gemacht wird, braucht  $P$  nur  $\frac{1}{10}Q$  zu sein. Daß die Brücke immer horizontal bleibt, geht aus folgender Überlegung hervor. Senkt sich  $F$  um  $x$ , so senkt sich  $E$  um  $\frac{l_1}{r}x$  und  $D$  um  $\frac{b}{c} \cdot \frac{l_1}{r} \cdot x$ . Da  $\frac{b}{c}$  und  $\frac{l_1}{r}$  reziproke Werte sind, ist die Senkung des Punktes  $D$  ebenfalls  $x$ , also genau so groß wie diejenige von  $F$ . Das Horizontalbleiben der Brücke ist nötig, da die Wägungen sonst ungenau sein würden.



§ 37. Rollen.

a) Die feste Rolle.

In folgendem werde die Bedingung des Gleichgewichtes an einer festen Rolle mit Rücksicht auf alle vorhandenen Widerstände abgeleitet. Hierzu Fig. 122.

a) Der Einfluß des Zapfenreibungswiderstandes. Das Reibungsmoment am Zapfen ist

$$M = \varphi (Q + K) \cdot \frac{d}{2}$$

Demnach ist zur Überwindung der Reibung am Umfang der Rolle die Kraft

$$\frac{M}{r} = \frac{Q + K}{2r} \cdot \varphi d$$

nötig, welcher durch  $K - Q$  das Gleichgewicht gehalten werden muß.

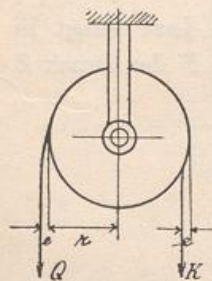


Fig. 122.

$$\begin{aligned} \frac{M}{r} &= \frac{Q + K}{2r} \cdot \varphi d = K - Q \\ K \cdot 2r - Q \cdot 2r &= K \varphi d + Q \varphi d \\ K(2r - \varphi d) &= Q(2r + \varphi d) \\ \frac{K}{Q} &= \frac{2r + \varphi d}{2r - \varphi d} = \frac{1 + \frac{\varphi d}{2r}}{1 - \frac{\varphi d}{2r}} \\ \frac{K}{Q} &= \frac{1 + \varphi \frac{d}{r} + \left(\frac{\varphi d}{2r}\right)^2}{1 - \left(\frac{\varphi d}{2r}\right)^2} \sim 1 + \varphi \frac{d}{r} \end{aligned}$$

Die Quadrate können nämlich ihrer Kleinheit halber vernachlässigt werden. Demnach beträgt die Zapfenreibung

$$Z = Q \cdot \varphi \frac{d}{r} \dots \dots \dots (106)$$

**β) Der Seilwiderstand.** Wird ein Seil aus gerader Richtung in eine Bogenrichtung übergeführt, dann ergibt sich ein Widerstand desselben gegen die Annahme dieser neuen Richtung. Das lastseitige Seilende weicht von der Tangente an die Ablaufstelle um  $e$  nach außen, das kraftseitige von der Tangente an die Anlaufstelle um  $e$  nach innen ab. Daher wird

$$K(r - e) = Q(r + e)$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{r + e}{r - e} = \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}} \sim 1 + \frac{e}{2r}$$

Der Seilwiderstand ergibt sich mit

$$B = Q \frac{2e}{r} \dots \dots \dots (107a)$$

Nach Versuchen ist, wenn  $\delta$  den Durchmesser des Seiles bedeutet,

$$e = 6,5 \delta^2$$

Demnach läßt sich auch schreiben

$$B = Q \frac{13 \delta^2}{r} \dots \dots \dots (107b)$$

Die zum Heben der Last  $Q$  mittels einer festen Rolle nötige Kraft wird daher

$$\begin{aligned} K &= Q + Z + B = Q + Q \frac{\varphi d}{r} + Q \frac{13 \delta^2}{r} \\ K &= Q \left( 1 + \varphi \frac{d}{r} + 13 \frac{\delta^2}{r} \right) \dots \dots \dots (108a) \end{aligned}$$

Den Klammerausdruck bezeichnet man mit  $\mu$  und nennt  $\mu$  die Widerstandsziffer für Seilrollen. Sie beträgt ca. 1,1. Dann wird

$$K = \mu Q = 1,1 Q \dots \dots \dots (108b)$$

Zum Heben von  $Q = 100$  kg braucht man an der Seilrolle eine Kraft  $K = 110$  kg.

Beim Herablassen einer Last vertauschen  $K$  und  $Q$  ihre Rollen, so daß folgt

$$Q = \mu \cdot K$$

Z. B.  $100 = 1,1 K$ , woraus  $K = \frac{100}{1,1} = 90,9$  kg sich ergibt.

Wird statt des Seiles eine Kette benutzt, so entstehen ebenfalls an Ablauf- und Anlaufstelle Widerstände und zwar durch gegenseitiges Verdrehen der benachbarten Kettenglieder. Praktische Versuche ergeben für den **Kettenwiderstand** die Formel

$$W = f \cdot \frac{\delta}{r} Q \dots \dots \dots (109)$$

wenn  $f = 0,15$  und  $\delta$  der Durchmesser des Ketteneisens sind.

Die **Widerstandsziffer für Kettenrollen** wird ca. 1,05. Demnach ist die zum Heben einer Last  $Q$  mittels Kettenrolle nötige Kraft

$$K = \mu_1 Q \sim 1,05 Q \dots \dots \dots (110)$$

Für Drahtseilrollen wird die Widerstandsziffer ca. 1,04. — Daher gilt

$$K = \mu_2 Q \sim 1,04 Q \dots \dots \dots (111)$$

„Das Verhältnis aus der theoretischen (ideellen) und der wirklichen (effektiven) Zugkraft heißt der **Wirkungsgrad der festen Rolle**.“ Derselbe ist also

$$\eta = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2} \right) \dots \dots \dots (112)$$

**b) Die lose Rolle.**

In Fig. 123 greife an einer losen Rolle die Last  $Q$  an. Ist die zur Hebung derselben nötige Kraft  $P$ , so wird das linksseitige Seil durch  $\frac{P}{\mu}$  gespannt. Somit ergibt sich

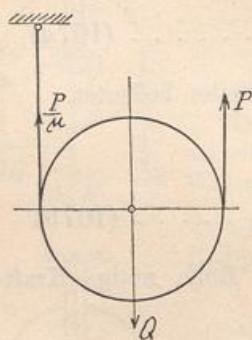


Fig. 123.

$$P + \frac{P}{\mu} = Q$$

$$P \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) = Q \text{ und}$$

$$P = \frac{Q}{1 + \frac{1}{\mu}} \dots \dots \dots (113)$$

Werden Zapfenreibung und Seil-(Ketten-, Drahtseil-)widerstand vernachlässigt, dann wird die Widerstandsziffer 1 und

$$P = \frac{Q}{2} \dots \dots \dots (113a)$$

Der Wirkungsgrad der losen Rolle folgt sodann mit

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2}}{Q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{\mu}}$$

$$\eta = \frac{1 + \frac{1}{\mu}}{2} \dots \dots \dots (114)$$

**Beispiele.**

142. Wie groß sind Widerstandsziffer und Wirkungsgrad einer festen Hanfseilrolle, an welcher  $r = 80$  mm,  $d = 24$  mm,  $\delta = 20$  mm und  $\varphi = 0,15$  betragen?

Auflösung:  $\mu = 1 + 0,15 \frac{0,024}{0,08} + 13 \frac{0,0004}{0,08}$

$\mu = 1 + 0,045 + 0,065$

$\mu = 1,11$

$\eta = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1,11}$

$\eta = 0,91$

143. Wie groß ist die zum Heben einer Last  $Q$  mittels einer losen Drahtseilrolle nötige Kraft  $P$ ? Wie groß ist der Wirkungsgrad dieser Rolle?

Auflösung:

$$P = \frac{Q}{1 + \frac{1}{1,04}} = \frac{Q}{1 + 0,96} = \frac{Q}{1,96}$$

$P = 0,51 Q$

$$\eta = \frac{1 + \frac{1}{\mu}}{2} = \frac{1 + 0,96}{2} = \frac{1,96}{2}$$

$\eta = 0,98$

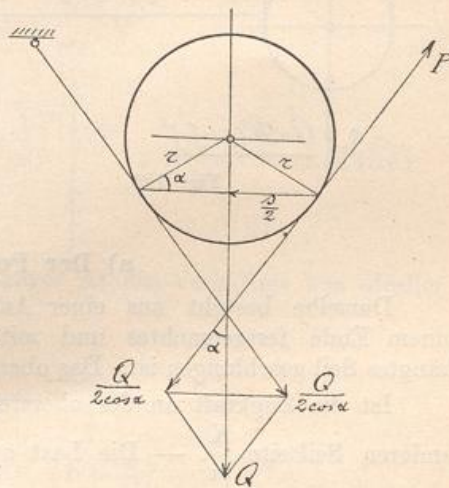


Fig. 124.

144. In welchem Verhältnisse stehen Kraft und Last an der losen Rolle, Fig. 124, wenn von allen Reibungswiderständen Abstand genommen wird?

Auflösung: Die Last  $Q$  zerlegt sich in die Komponenten  $\frac{Q}{2 \cos \alpha}$  und  $\frac{Q}{2 \cos \alpha}$

Die nötige Kraft  $P$  muß dann gleich einer solchen sein. Somit wird

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q} \cdot 2 \cos \alpha = \frac{P}{Q} \cdot 2 \frac{s}{2r} = \frac{Ps}{Qr}$$

Demnach

$$P:Q = r:s, \text{ d. h.}$$

„Die Kraft verhält sich zur Last wie der Radius der Rolle zur Sehne des vom Seil umspannten Bogens.“

### § 38. Rollenzüge und Flaschenzüge.

Mit Hilfe der Entwicklungen im letzten Paragraphen ist es möglich, die Kraftverhältnisse an manchen Rollenverbindungen, welche unter dem Namen Rollenzüge und Flaschenzüge in der Praxis angewendet werden, zu beurteilen.

„Als einzige Regel hat man nur zu beachten, daß in jedem Falle, wo ein Seil sich um eine Rolle schlingt, die Spannung des ablaufenden (ziehenden) Seiles gleich der  $\mu$ fachen Spannung des auflaufenden (gezogenen) Seiles ist.“

Zwischen Rollen- und Flaschenzügen besteht eigentlich kein Unterschied. Doch versteht man im engeren Sinne unter Rollenzügen solche Rollenverbindungen, bei welchen die Rollen einzeln neben- oder untereinander angebracht sind, und unter Flaschenzügen solche, bei welchen die Rollen in zwei Gehäusen, den sogenannten Flaschen, untergebracht werden.

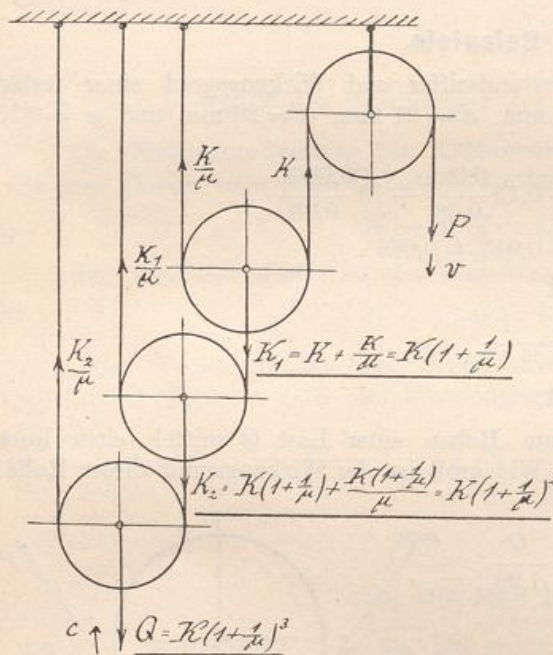


Fig. 125.

#### a) Der Potenzrollenzug.

Derselbe besteht aus einer Anzahl von Rollen, um welche je ein an einem Ende festgemachtes und mit dem andern an die nächste Rolle gehängtes Seil geschlungen ist. Das oberste Seil geht um eine feste Rolle. Fig. 125.

Ist die Zugkraft an der obersten Rolle  $K$ , so ist der Widerstand in der anderen Seilseite  $\frac{K}{\mu}$ . — Die Last an dieser Rolle ist daher

$$K_1 = K + \frac{K}{\mu} = K \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)$$

Ebenso ergibt sich die Last an der nächsten losen Rolle mit

$$K_2 = K \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{K \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)}{\mu} = K \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)^2$$

An der untersten, etwa der  $n$ ten losen Rolle greift daher an

$$K_n = K \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n = Q, \text{ woraus}$$

$$K = \frac{Q}{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n} \dots \dots \dots (115)$$

sich ergibt. Wären keinerlei Reibungswiderstände vorhanden, also die Widerstandsziffer  $\mu = 1$ , dann folgt

$$K = \frac{Q}{2^n} \dots \dots \dots (115a)$$

d. h. „Die Kraft ist gleich der Last  $Q$ , dividiert durch die sovielte Potenz von 2 als die Zahl der losen Rollen im Potenzflaschenzuge beträgt.“

Zur Hebung der Last  $Q$  ist am freien über die obere feste Rolle gehenden Seilende die Kraft

$$P = \mu K = \frac{\mu Q}{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n} = \frac{Q}{\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n} \dots \dots (115b)$$

nötig. — Um die Geschwindigkeit der Last zu finden, braucht nur die Arbeitsgleichung aufgestellt zu werden (nämlich Arbeit der Kraft gleich Arbeit der Last). — Nach den Bezeichnungen in Fig. 125 wird

$$\begin{aligned} P \cdot v &= Q \cdot c \\ c &= \frac{P \cdot v}{Q} = \frac{Q \cdot v}{\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n \cdot Q} \\ c &= \frac{v}{\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n} \left. \dots \dots \dots (115c) \right\} \\ \text{für } \mu &= 1 \quad c = \frac{v}{2^n} \end{aligned}$$

„Der Wirkungsgrad des Potenzrollenzuges ist das Verhältnis aus ideeller Zugkraft und effektiver.“

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\frac{Q}{2^n}}{Q} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n}} \text{ oder} \\ \eta &= \frac{\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n}{2^n} \dots \dots \dots (116) \end{aligned}$$



b) Der gewöhnliche Flaschenzug.

Bei diesem ist die Hälfte der Rollen in einer festen Flasche, die andere Hälfte in einer losen Flasche untergebracht. Die Seilführung ist aus der Fig. 126 ersichtlich. Laut Bezeichnungen der letzteren gilt

$$Q = \frac{P}{\mu} + \frac{P}{\mu^2} + \frac{P}{\mu^3} + \frac{P}{\mu^4} + \frac{P}{\mu^5} + \frac{P}{\mu^6}$$

$$Q = \frac{P}{\mu^6} (1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5)$$

$$Q = \frac{P}{\mu^6} \cdot \frac{\mu^6 - 1}{\mu - 1}$$

Allgemein

$$Q = \frac{P}{\mu^{2n}} \cdot \frac{\mu^{2n} - 1}{\mu - 1} \dots \dots (117)$$

Wird die Reibung überall vernachlässigt, dann wird

$\mu = 1$  und

$$Q = \frac{P}{1^{2n}} \cdot (\mu^{2n-1} + \mu^{2n-2} + \mu^{2n-3} + \dots + 1) = P \cdot 2n$$

$$P = \frac{Q}{2n} \dots \dots (117a)$$

d. h. „Die mittels eines Flaschenzuges zum Heben einer Last  $Q$  nötige Kraft  $P$  ist gleich dem Quotienten aus der Last und der doppelten Zahl der Rollen in einer Flasche.“

Der gewöhnliche Flaschenzug wird oft auch **Faktorenflaschenzug** genannt.

Der Wirkungsgrad desselben ist

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2n}}{\frac{Q \cdot \mu^{2n} (\mu - 1)}{\mu^{2n} - 1}} = \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{\mu^{2n} (\mu - 1)}{\mu^{2n} - 1}} \text{ oder}$$

$$\eta = \frac{\mu^{2n} - 1}{2n \cdot \mu^{2n} (\mu - 1)} \dots \dots (118)$$

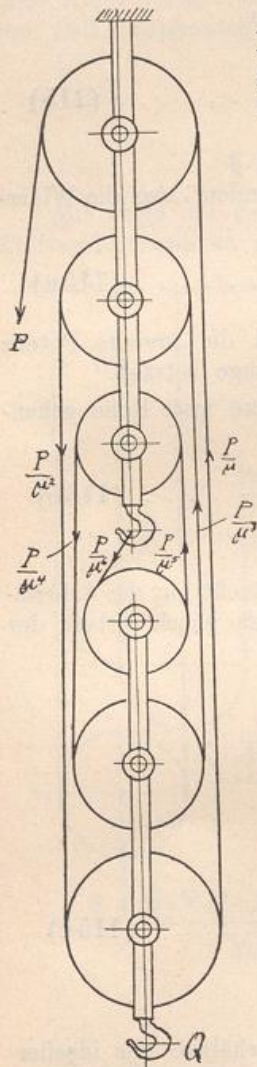


Fig. 126.

c) Der Differenzialflaschenzug.

Zur Hebung schwerer Lasten von Menschenhand eignet sich bestens der Differenzialflaschenzug, da in diesem Falle ein Faktorenflaschenzug wegen zu großer Zahl von Rollen einen zu geringen Wirkungsgrad ergeben würde.

Derselbe besteht der Hauptsache nach aus zwei auf derselben Achse sitzenden Rollen (meist aus einem Stück gegossen), deren Durchmesser indes nicht sehr verschieden sind, und einer Rolle, deren Durchmesser gleich ist dem Mittel aus den Durchmessern der ersteren Rollen. Um alle Rollen ist ein endloses Seil (endlose Kette) geschlungen, wie Fig. 127 anzeigt.

Entsteht im linken Seilteil an der unteren Rolle die Zugkraft  $P$ , so muß die im rechten Seilteil  $P\mu$  sein. Demnach ergibt sich

$$Q = P + P \cdot \mu = P \cdot (\mu + 1)$$

$$P = \frac{Q}{1 + \mu}$$

Die Summe der Momente der Kräfte  $K$  und  $P$  in bezug auf den Drehpunkt der oberen Rollen muß nun  $\mu$  mal so groß sein, wie das Moment der Kraft  $P \cdot \mu$  in bezug auf denselben, also wird

$$K \cdot R + P \cdot r = \mu (P \cdot \mu \cdot R)$$

$$K \cdot R = P (\mu^2 R - r)$$

$$K = Q \frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1 + \mu} \dots (119)$$

Bei Vernachlässigung aller Widerstände würde sich wegen  $\mu = 1$  ergeben

$$K = \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{r}{R} \right) \dots (119a)$$

Der Wirkungsgrad des Differenzialflaschenzuges ist

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)}{Q \frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1 + \mu}} \text{ oder}$$

$$\eta = \frac{(1 + \mu) \left( 1 - \frac{r}{R} \right)}{2 \left( \mu^2 - \frac{r}{R} \right)} \dots (120)$$

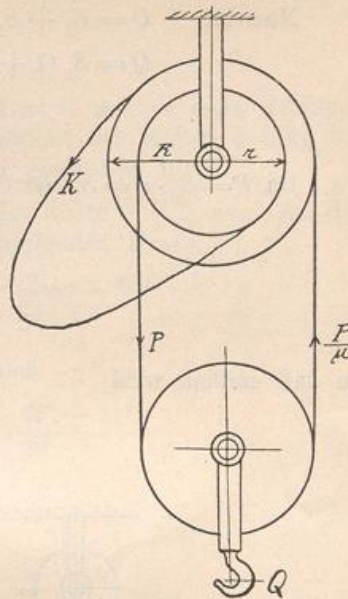


Fig. 127.

d) Lastrollenzüge mit gemeinsamer Hubbahn der losen Rollen.

**Beispiel.**

Lasttrum (Lastende) fest aufgehängt.

Die Spannungen in den parallelen Seilstücken seien der Reihe nach  $S_1, S_2, S_3 \dots S_n$ , Fig. 128. Dann wird

$$S_2 = S_1 \cdot \mu$$

$$S_3 = S_2 \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^2$$

$$S_4 = S_3 \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^3$$

⋮

$$S_n = S_1 \cdot \mu^{n-1}.$$

Nun ist  $Q = S_1 + S_1 \cdot \mu + S_1 \cdot \mu^2 + \dots + S_1 \cdot \mu^{n-1}$   
 $Q = S_1 (1 + \mu + \mu^2 + \dots + \mu^{n-1})$

$$Q = S_1 \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$$

Da  $P = S_n \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^{n-1} \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^n$  ist, folgt

$$S_1 = \frac{P}{\mu^n} \text{ und}$$

$$Q = \frac{P}{\mu^n} \cdot \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1},$$

so daß endlich wird

$$P = Q \cdot \frac{\mu^n \cdot (\mu - 1)}{\mu^n - 1} \dots \dots \dots (121)$$

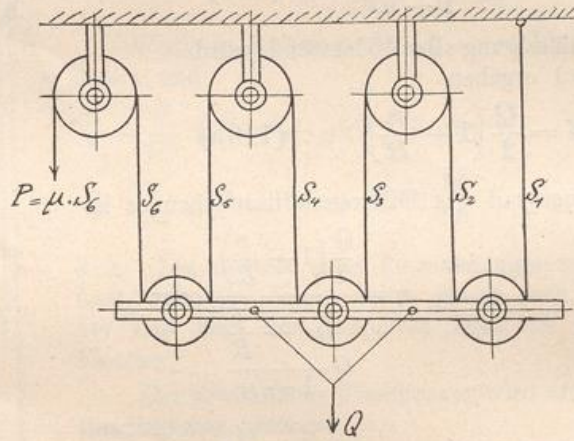


Fig. 128.

Die theoretische Hubkraft ergibt sich aus

$$P = Q \frac{\mu^n}{\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}} = Q \frac{\mu^n}{\mu^{n-1} + \mu^{n-2} + \dots + 1}$$

wenn man in dieser Beziehung  $\mu = 1$  setzt, mit

$$P = \frac{Q}{n} \dots \dots \dots (121a)$$

Daher wird der Wirkungsgrad dieses Rollenzuges

$$\eta = \frac{\frac{Q}{n} \cdot (\mu^n - 1)}{Q \cdot \mu^n \cdot (\mu - 1)} \text{ oder}$$

$$\eta = \frac{\mu^n - 1}{n \cdot \mu^n (\mu - 1)} \dots \dots \dots (122)$$

**Beispiele.**

145. Wie groß ist die zum Heben einer Last  $Q$  mittels eines  $n$ rolligen Potenzrollenzuges nötige Kraft  $P$ , wenn das Gewicht der Rollen à  $G$  kg berücksichtigt, von den Reibungswiderständen aber abgesehen wird?

Auflösung: An der untersten Rolle greift die Kraft  $Q + G$  an. An der Schere der zweiten Rolle ist die Größe der angreifenden Kraft

$$\frac{Q + G}{2} + G = \frac{Q + 3G}{2} = \frac{Q + (2^2 - 1)G}{2^{2-1}}$$

Für die Last an der dritten Rolle ergibt sich

$$\frac{Q + 3G}{4} + G = \frac{Q + 7G}{4} = \frac{Q + (2^3 - 1)G}{2^{3-1}}$$

Allgemein an der  $n$ ten Rolle

$$\frac{Q + (2^n - 1)G}{2^{n-1}}$$

Demnach ist zum Heben die Kraft

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q + (2^n - 1)G}{2^{n-1}} \text{ nötig oder}$$

$$P = \frac{Q + (2^n - 1)G}{2^n} \dots \dots \dots (115 d)$$

146. Wie verändert sich das Resultat der letzten Aufgabe, wenn außerdem noch die Reibungswiderstände berücksichtigt werden?

Auflösung: Laut Definition des Wirkungsgrades ergibt sich unter Benützung der Formeln (116 und 115 d)

$$\frac{\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n}{2^n} = \frac{Q + (2^n - 1)G}{2^n P}$$

$$P = \frac{Q + (2^n - 1)G}{\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n} \dots \dots \dots (115 e)$$

147. Es sollen 400 kg mit einem 4 rolligen Potenzrollenzuge gehoben werden. Wie groß ist die hierzu erforderliche Kraft, wenn das Gewicht jeder Rolle 6 kg ist und  $\mu = 1,1$  (für Seile) angenommen werden kann?

Auflösung:

$$P = \frac{400 + (2^4 - 1) \cdot 6}{\frac{1}{1,1} \left(1 + \frac{1}{1,1}\right)^4}$$

$$P = \frac{400 + 90}{0,91 \cdot 1,91^4} = \frac{490}{0,91 \cdot 13,3}$$

$$P \sim 38 \text{ kg}$$

148. Wie groß ist der Wirkungsgrad eines 4rolligen Potenzseilrollenzuges?

Auflösung: 
$$\eta = \frac{1}{1,1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{1,1}\right)^4}{2^4}$$

$$\eta \sim 0,76$$

d. h. 76%, natürlich unter Annahme, daß vier lose und eine feste Rolle vorhanden sind.

149. Welche Last kann mittels eines gewöhnlichen Flaschenzuges mit vier Rollen in jeder Flasche gehoben werden, wenn am freien Seilende mit 15 kg gezogen wird? Wie groß ist ferner der Wirkungsgrad dieses Flaschenzuges?

Auflösung: 
$$Q = \frac{P}{1,1^8} \cdot \frac{1,1^8 - 1}{1,1 - 1}$$

$$Q = \frac{15}{2,1} \cdot \frac{1,1}{0,1}$$

$$Q \sim 78,5 \text{ kg}$$

$$\eta = \frac{1,1^8 - 1}{8 \cdot 1,1^8 \cdot 0,1} = \frac{1,1}{0,8 \cdot 2,1} = \frac{1,1}{1,68}$$

$$\eta = 0,65$$

Ohne Rücksicht auf die Reibungswiderstände würde sich ergeben

$$Q = P \cdot 2n$$

$$Q = 15 \cdot 8 = 120$$

Wirklich ist  $Q = 120 \cdot 0,65 \sim 78,5 \text{ kg}$

150. Welche Last kann mit einem Differenzialflaschenzug gehoben werden, wenn das Verhältnis der Halbmesser der oberen Rollen  $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$  und die aufgewandte Kraft  $K = 40 \text{ kg}$  ist? Wie groß ist ferner der Wirkungsgrad?  $\mu = 1,1$ .

$$K = Q \frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1 + \mu}$$

$$Q = \frac{K(1 + \mu)}{\mu^2 - \frac{r}{R}}$$

$$Q = \frac{40 \cdot 2,1}{1,1^2 - \frac{11}{12}} = \frac{84}{1,21 - 0,917} = \frac{84}{0,293}$$

$$Q \sim 287 \text{ kg}$$

$$\eta = \frac{(1 + \mu) \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{2 \left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)} = \frac{2,1 \cdot \frac{1}{12}}{2 \cdot \left(1,1^2 - \frac{11}{12}\right)}$$

$$\eta = \frac{2,1}{24 \cdot 0,293}$$

$$\eta \sim 0,3$$

151. Unter welcher Bedingung ist ein Differenzialflaschenzug **selbsthemmend**, d. h. wann sinkt die untere Rolle trotz der Belastung nicht mehr hinunter?

Auflösung: In der Formel (119) ist statt  $\mu$  nur  $\frac{1}{\mu}$  zu setzen, damit die Größe der Kraft, welche das Herabsinken der Last verhindert, erhalten werde.

$$K = Q \frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{r}{R}}{1 + \frac{1}{\mu}} \dots \dots \dots (119b)$$

Der Differenzialflaschenzug wird nun selbsthemmend, wenn  $K = 0$  ist. Das trifft zu für

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{r}{R} \dots \dots \dots (119c)$$

152. Wie groß ist der Wirkungsgrad eines selbsthemmenden Differenzialflaschenzuges?

Auflösung:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{2 \left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)} = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{r}{R}}\right) \frac{R-r}{R}}{2 \left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R}\right)} \\ \eta &= \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{r}{R}}\right) \frac{R-r}{R}}{2 \frac{R^2 - r^2}{Rr}} \\ \eta &= \frac{1 + \sqrt{\frac{r}{R}}}{2 \left(1 + \frac{R}{r}\right)} \dots \dots \dots (119d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } \frac{r}{R} = \frac{11}{12} \text{ wird } \eta &= \frac{1 + \sqrt{\frac{11}{12}}}{2 \left(1 + \frac{12}{11}\right)} = \frac{1 + 0,955}{2 \cdot (1 + 1,09)} \sim \frac{1,955}{4,18} \\ \eta &\sim 0,47 \end{aligned}$$

### § 39. Das Rad auf der Welle und seine Anwendungen.

Will man eine ununterbrochen fortdauernde Hebelwirkung erzielen, so bedient man sich des Rades auf der Welle, Fig. 129. — Die Last hängt an

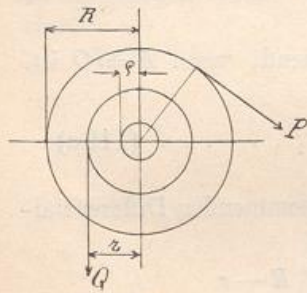


Fig. 129.

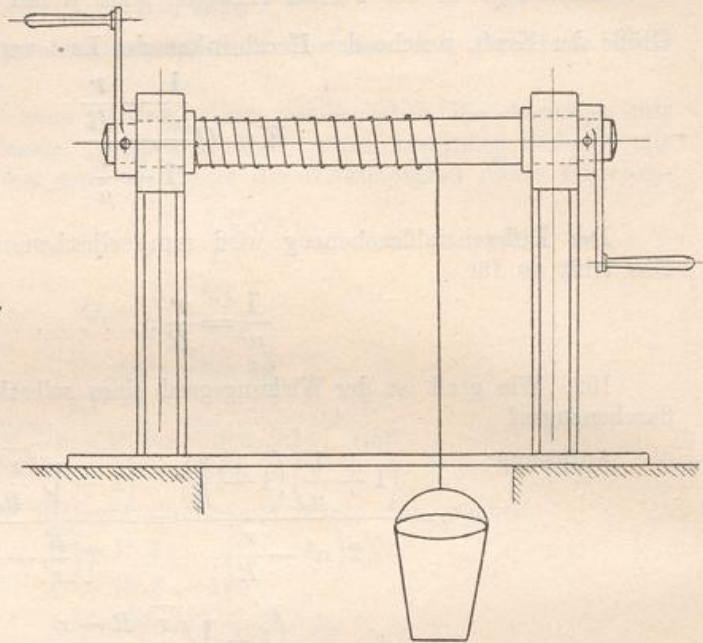


Fig. 130.

Seilen oder Ketten, welche um die Welle geschlungen sind. Durch Drehen eines auf der letzteren befestigten Rades kann sie gehoben werden.

Auf dem Prinzipie des Rades auf der Welle beruhen die **Haspeln**, Fig. 130, die **Göpel**, Fig. 131, und das **Seilrad**, Fig. 132.

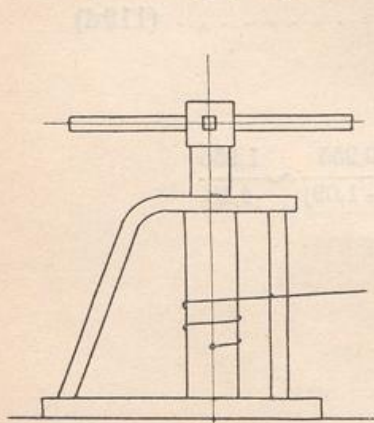


Fig. 131.

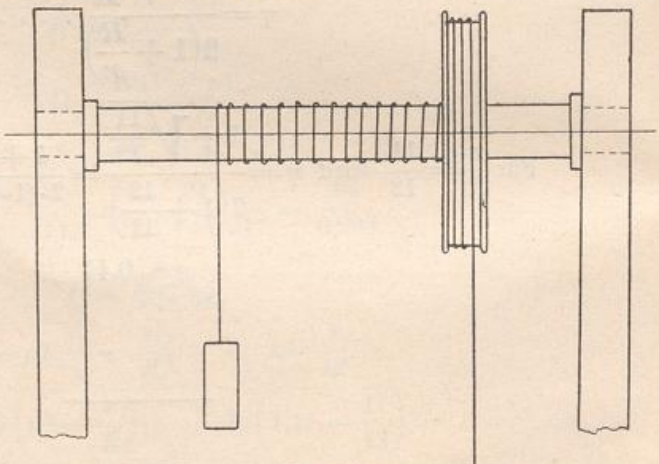


Fig. 132.

Bedeutet in Fig. 129 . . . .  $Q$  die Last,  $P$  die Kraft am Rade,  $r$  den Radius der Welle,  $R$  denjenigen des Rades,  $G$  das Eigengewicht der Welle,  $g$  den

Zapfenhalbmesser und  $\delta$  die Seildicke, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn, falls  $P \parallel Q$  liegt, für Heben der Last die Beziehung besteht

$$P \cdot R = Q \cdot r + (P + Q + G) \varphi \cdot \varrho + \frac{1}{2} \cdot \frac{13 \delta^2}{r} \cdot Q r \text{ oder}$$

$$P \cdot R = Q r + (P + Q + G) \cdot \varphi \cdot \varrho + \frac{1}{2} \cdot 13 \delta^2 \cdot Q \quad (123)$$

Es kommt nur die Hälfte des Seilwiderstandes in Betracht, da ein Seilende fest ist.

Beim Herunterlassen der Last wirken Zapfen- und Seilreibung entgegengesetzt. Daher wird

$$P \cdot R = Q r - (P + Q + G) \varphi \cdot \varrho - \frac{1}{2} \cdot 13 \delta^2 \cdot Q \dots (123a)$$

#### § 40. Räderwerke.

Um mit geringer Kraft und in bequemer Richtung mit derselben schwere Lasten heben zu können, benützt man **Räderwerke**.

„Das einfachste Räderwerk besteht aus zwei Zahnrädern, von denen das größere auf der Lastwelle, das kleinere auf der Kraftwelle aufgekeilt ist.“

„Ein zusammenarbeitendes Räderpaar heißt ein **Vorgelege**.“

„Die Wirkung eines aus einem größeren und einem kleineren Zahnrad bestehenden Vorgeleges besteht in der Verlangsamung der Bewegung der Last; da die Kraft also einen größeren Weg beschreibt, kann sie entsprechend mal kleiner als die Last sein.“

Bei Bestimmung der effektiven Kraft  $P$  an der Kurbel des in Fig. 133 gezeichneten Räderwerkes mit doppeltem Vorgelege werden gleich alle Reibungswiderstände berücksichtigt.

Ohne Rücksicht auf die Widerstände würde die am Umfang des Zahnrades  $B$  nötige Kraft gleich sein

$$Z_1 = \frac{P \cdot l}{r_1}$$

Mit Rücksicht auf Zapfen- und Zahnreibung aber ergibt sich der Druck

$$Z_1 = \eta_1 \frac{P \cdot l}{r_1}$$

wenn  $\eta_1$  der Wirkungsgrad des Vorgeleges ist.

Ist ebenso  $\eta_2$  derjenige des zweiten, so wird die effektive Umfangskraft am Rade  $C$  oder, was dasselbe ist, am Rade  $D$

$$Z_2 = \eta_2 \frac{Z_1 R_1}{r_2} = \eta_1 \eta_2 \frac{P l R_1}{r_1 r_2}$$

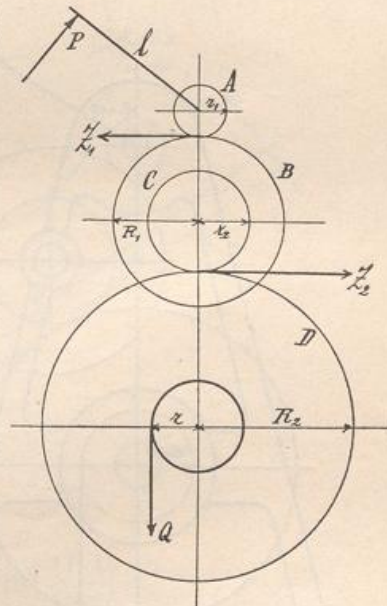


Fig. 133.



Bezeichnet endlich  $\eta_3$  den Wirkungsgrad der Lasttrommel, so wird

$$Q = \eta_3 \frac{Z_2 R_2}{r} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \frac{P \cdot l \cdot R_1 R_2}{r \cdot r_1 r_2}$$

und daraus  $P = \frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \cdot \frac{Q r}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}$

Die theoretisch nötige Kraft an der Kurbel ist

$$P = \frac{Q r}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}$$

Demnach beträgt der Gesamtwirkungsgrad des Räderwerkes

$$\eta = \frac{\frac{Q r}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}}{\frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \cdot \frac{Q r}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}} \text{ oder}$$

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \dots \dots (124)$$

Die Kraft an der Kurbel ergibt sich dann mit  $P = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Q r}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}$  (125)

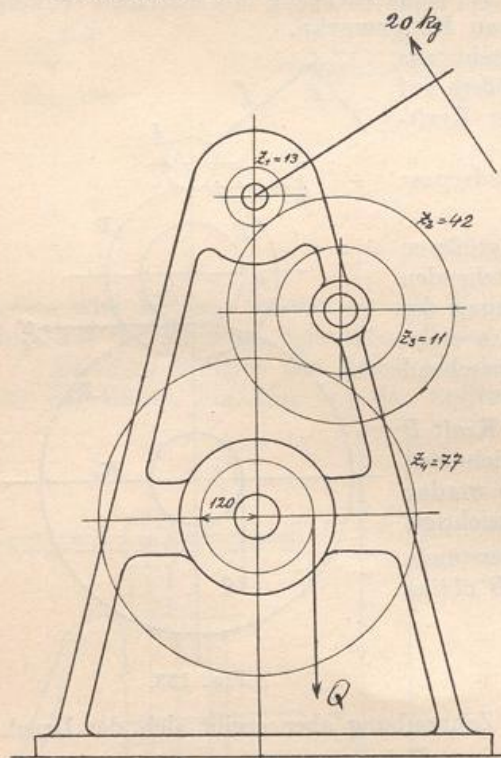


Fig. 134.

„Das Verhältnis aus dem Produkte der Radien (Zähnezahlen) der treibenden Räder und dem Produkte der Radien (Zähnezahlen) der getriebenen Räder heißt Übersetzung  $y$ “

$$y = \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2} \dots (126)$$

Es läßt sich daher für  $P$  auch schreiben

$$P = \frac{1}{\eta} \cdot y \cdot \frac{Q r}{l} \dots (127)$$

und für das Kraftmoment

$$P \cdot l = \frac{1}{\eta} y Q r \dots (128)$$

d. h. „das Kraftmoment ist gleich dem Produkte aus dem reziproken Werte des Wirkungsgrades, Übersetzung und Lastmoment.“

Für den Wirkungsgrad eines Zahnradvorgeleges kann 0,9 angenommen werden. Er wird um so günstiger, je größer die Zähnezahlen der treibenden Räder sind.

Bei zwei Vorgelegen soll im folgenden  $\eta = 0,8$  gesetzt werden.

**Beispiele.**

153. Wie groß kann die mittels der in Fig. 134 skizzierten Bauwinde zu hebende Last sein, wenn die Kraft an der Kurbel  $P = 20 \text{ kg}$ , der Hebelarm der Kraft  $l = 0,3 \text{ m}$ , der Radius der Lasttrommel  $r = 0,12 \text{ m}$  und die Zähnezahlen der Räder  $z_1 = 13$ ,  $z_2 = 42$ ,  $z_3 = 11$  und  $z_4 = 77$  sind?



§ 41. Die schiefe Ebene.

In diesem Paragraphen können alle Gleichgewichtsprobleme als Beispiele behandelt werden.

**Beispiele.**

155. Wie groß muß die parallel zur schiefen Ebene wirkende Kraft  $P$ , Fig. 136, sein, damit der Körper a) nicht heruntergleite, b) von der Kraft gleichförmig hinaufgezogen werden könne? Reibungskoeffizient sei  $f$ .

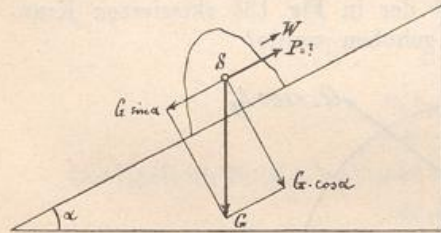


Fig. 136.

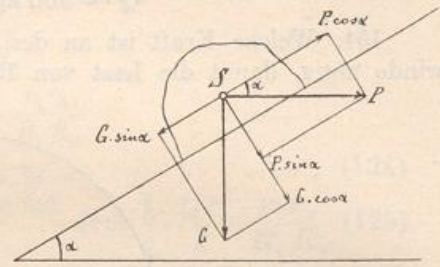


Fig. 137.

Auflösung: Die Kraft  $G$  zerlegt man in  $G \sin \alpha$  und  $G \cos \alpha$ .

ad a) Soll der Körper nicht heruntergleiten, dann muß  $G \sin \alpha$  gleich sein  $P$  plus der Reibung. Somit ergibt sich

$$G \sin \alpha = P + f \cdot G \cdot \cos \alpha$$

$$P = G \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Nun ist  $f = \operatorname{tg} \varphi$  (83), so daß folgt

$$P = G (\sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha) = G \left( \sin \alpha - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha \right)$$

$$P = G \frac{\sin \alpha \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha}{\cos \varphi}$$

$$P = G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \dots \dots \dots (129a)$$

ad b) Soll die Kraft  $P$  den Körper gleichförmig nach aufwärts bewegen, so wird die Reibung entgegengesetzte Richtung haben, also negativ zu setzen sein. Demnach ist

$$P = G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \dots \dots \dots (129b)$$

Wird die Reibung des Körpers auf der schiefen Ebene vernachlässigt, dann ist in beiden Fällen

$$P = G \sin \alpha,$$

d. h. gleich der den Körper hinunterziehenden Kraft.

156. Wie groß muß in den Fällen a) und b) die zur Basis der schiefen Ebene parallel wirkende Kraft  $P$  sein? Fig. 137.

Auflösung: ad a) Die Reibung wirkt hier im Sinne der Komponente  $P \cdot \cos \alpha$ . Gleichgewicht ist also vorhanden, wenn gilt

$$\begin{aligned}
 G \sin \alpha &= P \cos \alpha + f (G \cos \alpha + P \sin \alpha) \\
 G (\sin \alpha - f \cos \alpha) &= P (\cos \alpha + f \sin \alpha) \\
 G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} &= P \frac{\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi}{\cos \varphi} \\
 G \sin (\alpha - \varphi) &= P \cdot \cos (\alpha - \varphi) \\
 P &= G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos (\alpha - \varphi)} \\
 \mathbf{P} &= \mathbf{G \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)} \dots \dots \dots \mathbf{(130a)}
 \end{aligned}$$

ad b) Soll der Körper gleichförmig nach aufwärts gezogen werden, dann muß sein

$$\mathbf{P} = \mathbf{G \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)} \dots \dots \dots \mathbf{(130b)}$$

Bei Vernachlässigung der Reibung wird  $P = G \operatorname{tg} \alpha$  — Da  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b}$ , wenn  $h$  die Höhe und  $b$  die Basis der schiefen Ebene bedeuten, ist, folgt  $P : G = h : b$ , d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe zur Basis der schiefen Ebene.

157. Wie groß muß in den Fällen a) und b) die mit der schiefen Ebene den Winkel  $\beta$  einschließende Kraft  $P$  sein? Fig. 138.

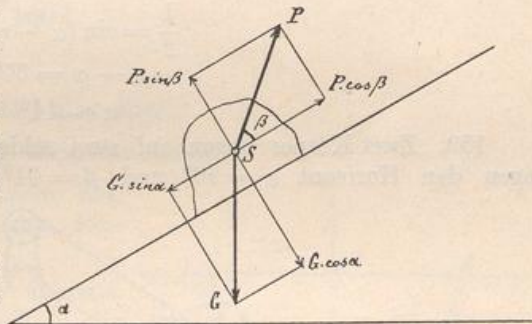


Fig. 138.

Auflösung: ad a) Die Reibung wirkt mit der Komponente  $P \cos \beta$ ; der Normdruck ist

$$G \cos \alpha - P \sin \beta$$

Daher muß sein

$$\begin{aligned}
 G \sin \alpha &= P \cos \beta + f (G \cos \alpha - P \sin \beta) \\
 G (\sin \alpha - f \cos \alpha) &= P (\cos \beta - f \sin \beta) \\
 G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} &= P \frac{\cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi}{\cos \varphi} \\
 G \sin (\alpha - \varphi) &= P \cos (\beta + \varphi) \\
 \mathbf{P} &= \mathbf{G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos (\beta + \varphi)}} \dots \dots \dots \mathbf{(131a)}
 \end{aligned}$$

ad b) wird 
$$\mathbf{P} = \mathbf{G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos (\beta - \varphi)}} \dots \dots \dots \mathbf{(131b)}$$

In diesem Falle sind die früheren als spezielle enthalten.

a) Wird  $\beta = 0$ , dann kommt man auf Aufgabe 155 zurück; es wird

$$P = G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$

β) Wird  $\beta = -\alpha$ , dann folgt der in Aufgabe 156 behandelte Fall und ergibt sich

$$P = G \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$$

158. Unter welchem Winkel muß eine schiefe Ebene gegen den Horizont geneigt sein, damit ein Körper mit dem Gewichte  $G$  kg auf ihr durch eine Kraft  $P = G$  kg, welche mit der schiefen Ebene den Winkel  $\beta = 46^\circ$  bildet, vor Hinuntergleiten bewahrt werde?  $f = 0,25$ .

Auflösung: Der Ansatz ist derselbe wie in der vorigen Aufgabe, nur ist statt  $P \dots G$  zu setzen.

$$G \sin \alpha = G \cos \beta + f(G \cos \alpha - G \sin \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta + f \cos \alpha - f \sin \beta$$

$$\sin \alpha - f \cos \alpha = \cos \beta - f \sin \beta$$

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} = \frac{\cos(\beta + \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$\sin(\alpha - \varphi) = \cos(\beta + \varphi)$$

$$f = 0,25 = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\varphi = 14^\circ$$

$$\cos(\beta + \varphi) = \cos(46^\circ + 14^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \sin(\alpha - \varphi)$$

$$\alpha - \varphi = 30^\circ$$

$$\alpha \sim 44^\circ$$

159. Zwei Körper liegen auf zwei schiefen Ebenen, deren Neigungswinkel gegen den Horizont  $\alpha = 36^\circ$  und  $\beta = 54^\circ 30'$  betragen. Wie groß ist das

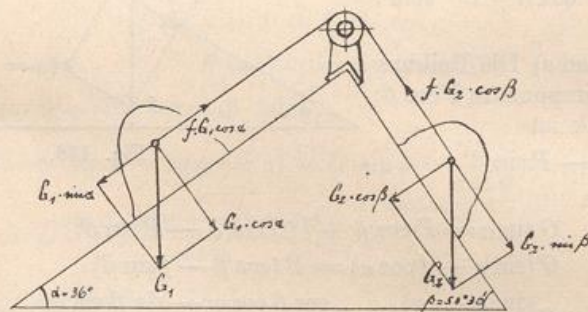


Fig. 139.

Verhältnis der Gewichte der Körper, wenn sie sich im Gleichgewichte befinden und  $f = 0,105$  ist?

Auflösung:  $G_1 \sin \alpha - f G_1 \cos \alpha = G_2 \sin \beta - f G_2 \cos \beta$

$$G_1 \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} = G_2 \cdot \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin(54^\circ 30' - 6^\circ)}{\sin(36^\circ - 6^\circ)}$$

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{0,75}{0,5}$$

$$\frac{G_1}{G_2} = 1,5$$

$$\frac{G_1}{G_2} = 1,5$$

160. Ein Wagen mit dem Gewichte  $Q$  kg soll eine Ebene von  $s^0/0$  Steigung hinaufgezogen werden. Wie groß ist die nötige Zugkraft, wenn der Koeffizient der Gesamtreibung  $k$  ist?

Auflösung: Die Zugkraft muß gleich sein der die Straße hinunterwirkenden Komponente  $Q \sin \alpha$  plus dem Widerstande  $kQ \cos \alpha$ .

$$P = Q \cdot \sin \alpha + kQ \cos \alpha$$

$$P = Q (\sin \alpha + k \cos \alpha)$$

Die Straße hat  $s^0/0$  Steigung, d. h. auf  $s$  Meter Höhenzuwachs kommen 100 Meter Straßenlänge. Die Tangente von  $\alpha$  ist daher  $\frac{s}{100}$ , somit

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$P = Q \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} + k \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right) \quad \text{oder}$$

$$P = \frac{Q}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{100}\right)^2}} \cdot \left( \frac{s}{100} + k \right)$$

## § 42. Der Keil.

### a) Der doppelte Keil.

Der in Fig. 140 skizzierte doppelte Keil  $ACB$  soll durch eine Kraft  $P$  zum Eindringen gebracht werden.

Die Fläche, in der die Kraft angreift, heißt **Rücken des Keiles**, die sich in der Kante  $A$  schneidenden Flächen werden als **Seiten des Keiles** bezeichnet.

Dem Eindringen des Keiles wirken entgegen  $\alpha$ ) die Widerstände  $Q$ ,  $\beta$ ) die Reibungswiderstände  $fQ$ . Erstere ergeben die Resultierende  $R_1$ , letztere  $R_2$ . Sind  $R_1$  und  $R_2$  zusammen gleich  $P$ , dann ist Gleichgewicht vorhanden und wird

$$P = R_1 + R_2 = 2Q \sin \alpha + 2fQ \cos \alpha$$

$$P = 2Q (\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

$$P = 2Q \left( \sin \alpha + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha \right)$$

$$P = 2Q \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \quad (132)$$

Das Zurückgehen des Keiles wird verhindert durch eine Kraft

$$P_1 = 2Q \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \quad (132a)$$

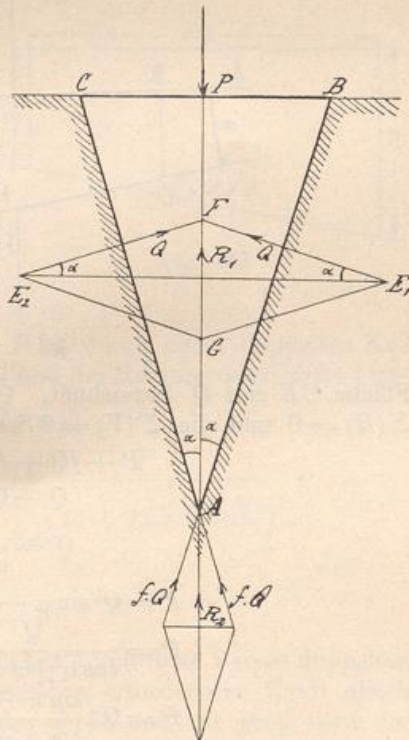


Fig. 140.

Die Reibung wirkt nämlich in diesem Falle entgegengesetzt wie früher, so daß  $f$  negativ zu setzen ist.

Wird  $(\alpha - \varphi) > 0$ , was für  $\alpha > \varphi$  zutrifft, dann ist  $P_1 > 0$ , d. h. es muß zum Eintreiben des Keiles eine Kraft vorhanden sein.

Wenn  $\alpha - \varphi = 0$  sich ergibt, was der Fall für  $\varphi = \alpha$  ist, folgt  $P_1 = 0$ . d. h. der Keil geht nicht zurück; er wird vor Zurückgehen durch Reibung bewahrt.

Die Kraft  $P_1$  ist kleiner als Null (negativ), wenn  $\varphi > \alpha$  ist, d. h. es gehört noch eine Kraft dazu, den Keil aus dem Materiale, in welches er eingedrungen ist, herauszuziehen. Keile mit  $\alpha < \varphi$  nennt man **Befestigungskeile**.

„Unter **Wirkungsgrad eines Keiles** versteht man das Verhältnis aus der zum Eintreiben desselben theoretisch nötiger und der praktisch nötigen (wirklichen) Kraft.“

$$\text{Daher wird } \eta = \frac{2Q \sin \alpha}{2Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}} = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + f \cot \alpha} \dots \dots \dots (133)$$

**b) Der einfache Keil.**

Zunächst werde die Kraft abgeleitet, um ein Herausspringen des Keiles zu verhindern. Hierzu Fig. 141.

Der Druck senkrecht zur Fläche  $BD$  werde mit  $Q$ , der senkrecht zur

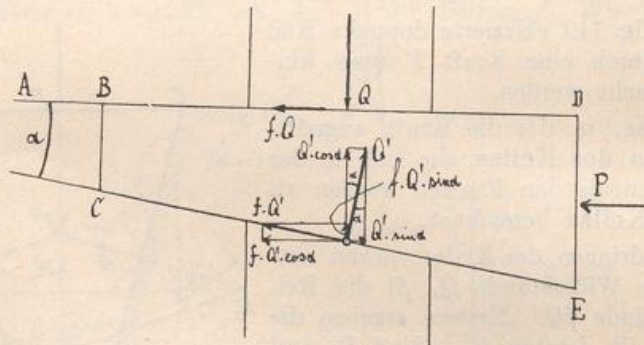


Fig. 141.

Fläche  $CE$  mit  $Q'$  bezeichnet. Gleichgewicht ist nun vorhanden, wenn die  $\Sigma(H) = 0$  und die  $\Sigma(V) = 0$  ist. Sonach folgen die Gleichungen

$$P + fQ + fQ' \cos \alpha - Q' \sin \alpha = 0$$

$$Q - Q' \cos \alpha - fQ' \sin \alpha = 0$$

$$Q' = \frac{Q}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

$$P = Q' \sin \alpha - fQ - fQ' \cos \alpha$$

$$P = \frac{Q}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha) - fQ$$

$$P = Q \left( \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} - f \right), \text{ somit}$$

$$P = Q \cdot [\text{tg}(\alpha - \varphi) - \text{tg} \varphi] \dots \dots \dots (134)$$

Die Kraft, um das Eindringen einzuleiten, ist

$$P = Q \cdot [\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \operatorname{tg} \varphi] \dots \dots \dots (134a)$$

Der Wirkungsgrad des einfachen Keiles wird

$$\eta = \frac{Q \operatorname{tg} \alpha}{Q [\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \operatorname{tg} \varphi]}$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \operatorname{tg} \varphi} \dots \dots \dots (135)$$

**Beispiele.**

161. Wann ist ein einfacher Keil selbsthemmend?

Auflösung: Zum Herausziehen des Keiles ist eine Kraft

$$P = Q [\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) - \operatorname{tg} \varphi]$$

nötig. **Selbsthemmend** heißt der Keil, wenn  $P = 0$  wird. Die Bedingung für Selbsthemmung lautet daher

$$\alpha - \varphi \bar{\leq} \varphi \text{ oder}$$

$$\alpha \bar{\leq} 2\varphi$$

162. Welcher Druck ist nötig, um mit der nicht angezogenen Fläche eines einfachen Keiles, Fig. 142, einen Druck von 300 kg auszuüben?  $f = 0,18$ .

Auflösung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{40}{400} = 0,1$$

$$\alpha = 5^\circ 43'$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,18$$

$$\varphi = 10^\circ 12'$$

$$P = 300 [\operatorname{tg}(5^\circ 43' + 10^\circ 12') + \operatorname{tg} 10^\circ 12']$$

$$P = 300 \cdot (\operatorname{tg} 15^\circ 55' + \operatorname{tg} 10^\circ 12')$$

$$P \sim 136 \text{ kg}$$

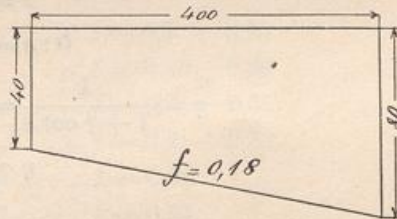


Fig. 142.

163. Welchen Druck  $Q$  kann man mit  $P$  kg durch einen doppelten Keil erzeugen, wenn dessen Rücken  $b$ , dessen Seite  $s$  und der Reibungskoeffizient  $f$  ist?

Auflösung:  $P = 2Q (\sin \alpha + f \cos \alpha)$

$$Q = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\frac{b}{2s} + f \sqrt{1 - \frac{b^2}{4s^2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\frac{1}{2s} \cdot [b + f \sqrt{4s^2 - b^2}]}$$

$$Q = \frac{P \cdot s}{b + f \sqrt{4s^2 - b^2}}$$

164. In welchem Verhältnisse müssen Rücken  $b$  und Seite  $s$  eines doppelten Keiles stehen, damit die zum Eintreiben desselben erforderliche Kraft gleich  $\frac{1}{2}$  des auf seine Seite wirkenden Widerstandes werde und wie groß wird der Wirkungsgrad dieses Keiles?  $f = 0,18$ .



Auflösung:

$$P = \frac{Q}{2}$$

$$P = 2Q \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{1}{2} Q = 2Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$\frac{\cos \varphi}{4} = \sin(\alpha + \varphi)$$

$$f = 0,18$$

$$\varphi = 10^\circ 12'$$

$$\frac{\cos \varphi}{4} = \frac{0,985}{4} = 0,246$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = 0,246$$

$$\alpha + \varphi = 14^\circ 15'$$

$$\alpha = 4^\circ 3'$$

$$\sin \alpha = 0,071 = \frac{b}{2s}$$

$$\frac{b}{s} = 0,142 = \frac{1}{x}$$

$$x = 7,15$$

$$b : s = 1 : 7,15$$

$$\eta = \frac{1}{1 + f \cot \alpha} = \frac{1}{1 + 0,18 \cdot \cot 4^\circ 3'}$$

$$\eta \sim 0,274$$

### § 43. Die Reibungsräder (Frikionsräder).

Bei den Reibungsrädern erfolgt die Arbeitsübertragung durch Aneinanderpressen zweier glatten Oberflächen.

#### a) Zylindrische Reibungsräder.

Um eine gleichmäßige Arbeitsübertragung mit zylindrischen Reibungsrädern zu bewirken, ist es notwendig, die Räder mit solcher Kraft aneinander zu pressen, daß die in der Berührungslinie ihrer Umfangsflächen erzeugte Reibung wenigstens der am Umfange des getriebenen Rades auftretenden Umfangskraft  $P$  gleichkommt, da sonst ein Gleiten eintreten würde. Es muß somit sein

$$P \leq fQ.$$

Ist dies der Fall, so wickeln sich in der nämlichen Zeit gleiche Umfänge des treibenden und des getriebenen Rades ab, d. h. die Winkelgeschwindig-

keiten der Reibungsräder sind einander gleich. In Fig. 143 sei  $v$  die Umfangsgeschwindigkeit des treibenden Rades an seiner Berührungsstelle mit dem getriebenen,  $P$  die Umfangskraft daselbst und  $Q$  der Druck, mit welchem ersteres

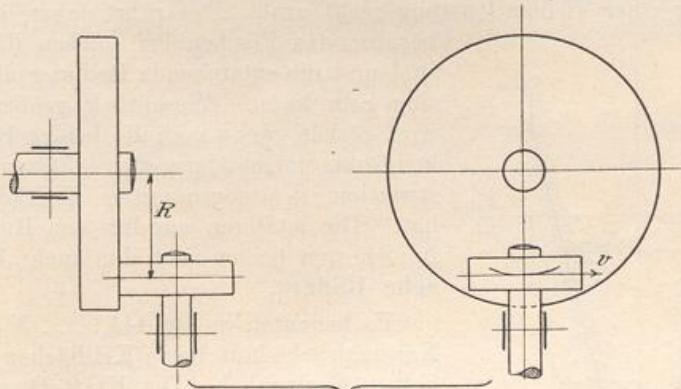


Fig. 143.

gegen letzteres gepreßt wird. Ist ferner  $f$  der Reibungskoeffizient, dann ergibt sich, da

$$\frac{P \cdot v}{75} = N \text{ und } P = \frac{75N}{v} \text{ ist,}$$

$$Q \geq 75 \frac{N}{f \cdot v} \dots \dots \dots (136)$$

Für Gußeisen auf Gußeisen . . . . .	$f = 0,1 \div 0,15$
„ „ „ Papier . . . . .	$f = 0,15 \div 0,20$
„ „ „ Leder . . . . .	$f = 0,2 \div 0,3$
„ „ „ Holz . . . . .	$f = 0,2 \div 0,5$
„ Holz auf Holz (mit $\parallel$ Fasern) . . .	$f = 0,62$
„ „ „ „ (mit $\perp$ Fasern) . . .	$f = 0,54$

Durch die Pressung des einen Rades gegen das andere entstehen die Zapfenreibungsmomente

$$M_1 = \varphi Q r_1$$

$$M_2 = \varphi Q r_2.$$

Für Überwindung dieser Zapfenreibungsmomente müssen an den Radumfängen die Kräfte wirken

$$P_1 = \frac{\varphi Q r_1}{R_1}$$

$$P_2 = \frac{\varphi Q r_2}{R_2}.$$

Demnach ist der auf den Scheibenumfang übertragene Kraftverlust, verursacht durch die Zapfenreibung,

$$P' = P_1 + P_2 = \varphi Q \left( \frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right) \dots \dots \dots (137)$$

b) Keilräder.

Der Anpressungsdruck bei zylindrischen Reibungsrädern wird schon bei Übertragung einer kleinen Leistung recht groß. Das rührt daher, daß die sich berührenden Flächen bei solchen Rädern klein sind und die entstehende Reibung also nur gering sein kann. Wesentlich größere Reibung wird erzielt, wenn man die beiden Radumfänge keilförmig ineinandergreifen läßt, was zur Konstruktion der sogenannten Keilräder geführt hat. Die letzteren wurden von Robertson erfunden und heißen nach ihm auch „Robertson'sche Räder“.

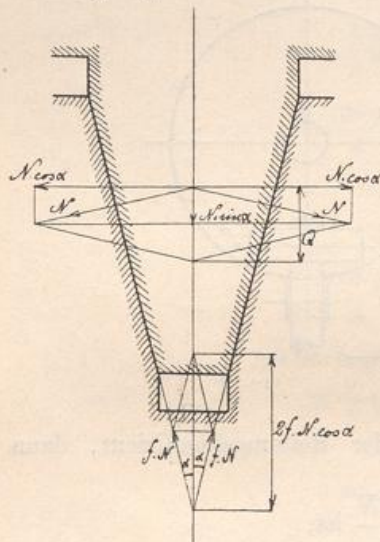


Fig. 144.

Es bedeuten in Fig. 144 . . . .  $N$  die nötigen Normaldrücke auf beide Keilflächen und  $\alpha$  den halben Keilwinkel. Die Kraft  $Q$ , mit welcher die Keilräder ineinandergepreßt werden müssen, hat einerseits die Drücke  $N$  zu erzeugen, andererseits die Reibung, welche dem Eindringen des einen Keilrades in das andere entgegenwirkt, zu überwinden.

Um die Drücke  $N$  zu erzeugen, ist die Kraft  $2 N \sin \alpha$

nötig und um genannte Reibung zu überwinden, die Kraft

$$2 f N \cos \alpha$$

nötig. Somit im ganzen

$$Q \geq 2 N (\sin \alpha + f \cos \alpha) \dots \dots \dots (138)$$

Da hier die Umfangskraft  $P \leq f \cdot 2 N$  sein muß, folgt

$$P \leq f \cdot 2 \frac{Q}{2 (\sin \alpha + f \cos \alpha)} \text{ oder}$$

$$P \leq \frac{f Q}{\sin \alpha + f \cos \alpha} \dots \dots \dots (139)$$

Die Reibung  $2 f N$  greift am Radius  $R$  an, hat also das Moment

$$2 f N \cdot R.$$

Dasselbe muß mindestens gleich dem zu übertragenden Momente  $M = P \cdot R$  sein, so daß sich ergibt

$$2 f N \cdot R \geq P \cdot R$$

$$N \geq \frac{P}{2 f} \text{ und aus (138)}$$

$$Q \geq \frac{P}{f} (\sin \alpha + f \cos \alpha) \dots \dots (138 a)$$

Gewöhnlich gibt man Keilrädern 5 Nuten und macht  $\alpha \sim 7\frac{1}{2}^{\circ}$  bis  $15^{\circ}$  — für Gußeisen auf Gußeisen ist  $f \sim 0,125$  —.

### e) Kegelförmige Reibungsräder.

Solche sind in Fig. 145 dargestellt. Es gilt wieder Formel (139), nur bedeutet  $\alpha$  den halben Winkel an der Spitze des kleineren Kegels.

Je kleiner Winkel  $\alpha$  ist, desto geringer wird auch die nötige Einrückkraft.

### Beispiele.

165. Ein treibendes, zylindrisches Reibungsräd hat an der Berührungsstelle mit dem getriebenen die Umfangsgeschwindigkeit  $v = 2 \text{ m}$  und hat 1 PS zu

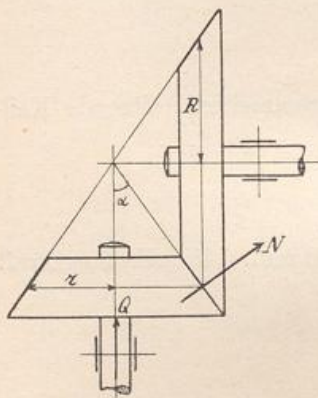


Fig. 145.

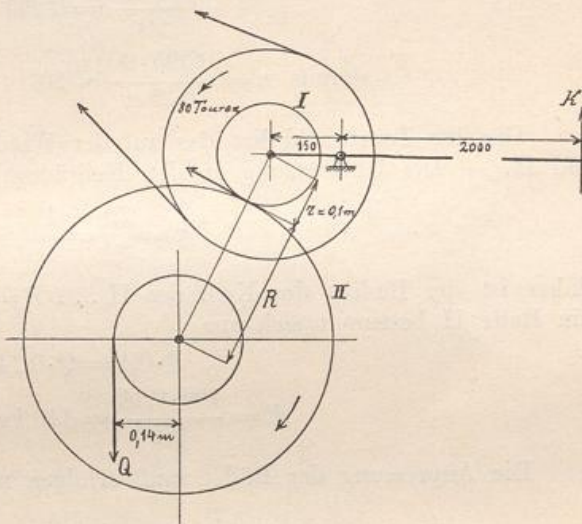


Fig. 146.

übertragen. Mit welcher Kraft muß dieses Rad an das letztere ange drückt werden?  $f = 0,17$ .

Auflösung:

$$Q \geq 75 \frac{N}{f \cdot v} \geq \frac{75 \cdot 1}{0,17 \cdot 2} \geq \frac{75}{0,34}$$

$$Q \geq 220 \text{ kg}$$

166. Wie groß muß der Anpressungsdruck für Keilräder, bei denen  $\alpha = 7\frac{1}{2}^\circ$  ist, sein?  $f = 0,125$ .

Auflösung:

$$Q \geq \frac{P}{f} (\sin \alpha + f \cos \alpha) \geq \frac{P}{0,125} (0,130 + 0,125 \cdot 0,991)$$

$$Q \geq 2 P$$

167. In welchem Verhältnisse stehen bei Reibungskegelrädern, bei denen sich die Radien  $r$  und  $R$  wie 1:4 verhalten, Umfangskraft  $P$  und Anpressungsdruck  $Q$ , wenn  $f = 0,1$  ist?

Auflösung:

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= 0,25 \\ \alpha &\sim 14^\circ \\ \frac{P}{Q} &= \frac{f}{\sin 14 + f \cos 14} = \frac{0,1}{0,242 + 0,1 \cdot 0,97} = \frac{0,1}{0,339} \\ \frac{P}{Q} &\sim \frac{1}{3,39} \end{aligned}$$

168. Welche Kraft ist am rechten Ende des Hebels der in Fig. 146 gezeichneten **Sackwinde** mit den Keilrädern I und II nötig, wenn mittels derselben eine Last von  $Q = 400$  kg mit einer Geschwindigkeit  $v = 0,295$  m/sek. gleichförmig gehoben werden soll? Das Keilrad I wird mit 80 Touren angetrieben. Radius der Lasttrommel ist 140 mm, Radius des Keilrades I ist 100 mm, die Arme des Hebels sind 150 mm und 2000 mm,  $f = 0,15$  und  $\alpha \sim 10^\circ$ .

Auflösung: Die Umfangsgeschwindigkeit der Windentrommel ist

$$\frac{0,28 \pi n}{60} = 0,295$$

$$\text{daraus } n = \frac{0,295 \cdot 60}{0,28 \pi} \sim 20$$

Dieselbe Tourenzahl hat das auf der Windentrommelwelle sitzende Keilrad II. — Die Übersetzung an den Keilrädern ist

$$y = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

daher ist der Radius des Keilrades II . . .  $R = 400$  mm. Die Umfangskraft am Rade II bestimmt sich aus

$$P \cdot 0,4 = Q \cdot 0,14$$

$$P = \frac{400 \cdot 0,14}{0,4} = 140 \text{ kg}$$

Die Anpressung der Räder muß erfolgen mit einem Drucke

$$Q \geq \frac{P}{f} (\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

$$Q \geq \frac{140}{0,15} (\sin 10^\circ + 0,15 \cos 10^\circ)$$

$$Q \geq \frac{140}{0,15} (0,174 + 0,15 \cdot 0,985)$$

$$Q \geq \frac{140}{0,15} \cdot 0,321 \sim 300 \text{ kg}$$

Dann ergibt sich endlich die Kraft  $K$  aus

$$K \cdot 2 = Q \cdot 0,15$$

$$K = \frac{300 \cdot 0,15}{2} = \frac{45}{2}$$

$$K \sim 22,5 \text{ kg}$$

§ 44. Die Schraube.

Eine Last durch eine am Umfange einer Schraube wirkende Kraft heben, Fig. 147, ist dasselbe, als diese durch eine horizontal wirkende Kraft eine schiefe Ebene mit der Basis  $2r\pi$  und der Höhe  $h$  hinaufzuziehen. Dann folgt

$$P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

Soll die Schraube „selbsthemmend“ sein, so muß noch eine Kraft  $P$  nach entgegengesetzter Richtung aufgewendet werden, damit die Last zum Sinken gebracht wird, d. h. es muß sein

$$P = -Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

Die Bedingung für die Selbsthemmung ist

$$\alpha < \varphi \dots \dots \dots (140)$$

„Der Steigungswinkel der Schraube muß kleiner sein als der Reibungswinkel.“

Sitzt auf der Spindel ein Handrad mit dem Radius  $R$ , so ist zum Heben der Last am Umfange desselben eine Kraft  $P_1$

$$P_1 = \frac{R}{r} Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \dots \dots \dots (141)$$

nötig. — Soll die Ganghöhe der Schraube in der Formel auftreten, dann ist

$$P_1 = \frac{r}{R} Q \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} = \frac{r}{R} Q \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2r\pi}$$

$$P_1 = \frac{r}{R} Q \cdot \frac{\frac{h}{2r\pi} + f}{1 + f \cdot \frac{h}{2r\pi}} \dots \dots \dots (142)$$

Das Pluszeichen gilt für Heben, das Minuszeichen für Senken der Last.

Ohne Rücksicht auf Reibung ergibt sich die zum Heben der Last  $Q$  am Umfange der Schraube nötige Kraft mit  $Q \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , mit Rücksicht auf dieselbe mit  $Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ .

„Das Verhältnis der am Umfange der Schraube zum Heben der Last nötigen theoretischen zu der dort nötigen praktischen Kraft heißt der Wirkungsgrad der Schraube.“

Derselbe ist also

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \dots \dots \dots (143)$$

Der Wirkungsgrad  $\eta$  wird kleiner, wenn bei gleichem  $\alpha$  der Reibungswinkel  $\varphi$  größer wird. Schwieriger zu erkennen ist, wie sich  $\eta$  mit  $\alpha$  bei konstant bleibendem  $\varphi$  ändert.

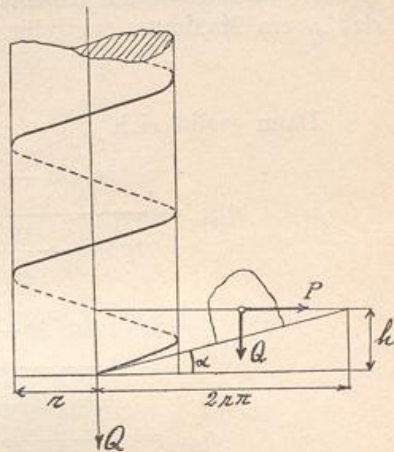


Fig. 147.

Wenn  $\varphi$  z. B.  $10^\circ$  und konstant ist, folgt

bei  $\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$

$\eta = 0,48, 0,63, 0,69, 0,71, 0,69, 0,63, 0,48.$

D. h. laut tabellarischer Aufstellung liegt der günstigste Wirkungsgrad  $\eta$  bei  $\alpha \sim 40^\circ$ . — Mit Hilfe der höheren Mathematik kann gezeigt werden, daß  $\eta$  ein Maximum wird für

$$\alpha = 45 - \frac{\varphi}{2} \dots \dots \dots (144)$$

Dann ergibt sich

$$\eta_{max} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2} + \varphi\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{cot}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\eta_{max} = \frac{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\eta_{max} = \frac{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\eta_{max} = \frac{1 - \cos(90 - \varphi)}{1 + \cos(90 + \varphi)}$$

$$\eta_{max} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \dots \dots \dots (145)$$

### Beispiele.

169. Der mittlere Radius einer Schraube ist 3 cm, die Ganghöhe 1 cm, der Reibungskoeffizient  $f = 0,14$ . — Welche Last kann mit 50 kg an einem Handrad auf der Schraube von  $R = 0,6$  m gehoben werden?

$$\text{Auflösung: } P = \frac{r}{R} Q \frac{\frac{h}{2r\pi} + f}{1 - f \frac{h}{2r\pi}} = \frac{3}{60} Q \frac{\frac{1}{6\pi} + 0,14}{1 - 0,14 \cdot \frac{1}{6\pi}} = 50$$

$$Q = \frac{50 \cdot 60}{3} \frac{6\pi - 0,14}{1 + 6\pi \cdot 0,14} = \frac{1000 \cdot 18,66}{3,64}$$

$$Q \sim 5140 \text{ kg}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2r\pi} = \frac{1}{6\pi} \sim 0,053$$

$$\alpha = 3^\circ 2' 12''$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,14; \varphi = 7^\circ 58' 11''$$

$$\alpha < \varphi,$$

d. h. die Schraube ist selbsthemmend.

170. Welche Last kann mit einer Schraube, deren innerer Durchmesser 40 mm, deren äußerer Durchmesser 50 mm und deren Ganghöhe 15,7 mm sind, gehoben werden, wenn die Umfangskraft an dem auf ihr sitzenden Handrad von 450 mm Durchmesser 10 kg beträgt?  $f = 0,105$ .

Auflösung: Der mittlere Durchmesser der Schraube ist 45 mm, daher wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15,7}{45 \pi} = 0,111; \alpha \sim 6^{\circ} 20'$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,105; \varphi \sim 6^{\circ}$$

$$P = \frac{r}{R} Q \cdot \operatorname{tg} 12^{\circ} 20'$$

$$Q = \frac{P \cdot R}{r \cdot \operatorname{tg} 12^{\circ} 20'} = \frac{10 \cdot 0,45}{0,0225 \cdot 0,218}$$

$$Q \sim 920 \text{ kg}$$

171. Die Schraube eines Schneckentriebes hat die Dimensionen  $r = 11 \text{ cm}$ ,  $h = 13 \text{ cm}$ . Wie groß ist ihr Wirkungsgrad, wenn  $f = 0,15$  ist?

Auflösung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 r \pi} = \frac{13}{22 \pi} = 0,188$$

$$\alpha = 10^{\circ} 40'$$

$$f = 0,15$$

$$\varphi = 8^{\circ} 32'$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} 10^{\circ} 40'}{\operatorname{tg} 19^{\circ} 12'}$$

$$\eta = \frac{0,188}{0,349}$$

$$\eta = 0,54$$

172. Welche Kraft  $P$  ist am Handrad nach gegebener Skizze zum Heben der Turbinenhohlwelle nötig?  $f = 0,105$ . Fig. 148.

Auflösung:

Spindel I  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dehm. außen } 170 \text{ mm} \\ \text{Dehm. innen } 130 \text{ mm} \\ \text{Steigung } 42,3 \text{ mm} \end{array} \right.$

Spindel II  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dehm. außen } 110 \text{ mm} \\ \text{Dehm. innen } 90 \text{ mm} \\ \text{Steigung } 28,3 \text{ mm} \end{array} \right.$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{42,3}{150 \pi} = 0,09; \alpha_1 = 5^{\circ} 10'$$

$$f = 0,105; \varphi = 6^{\circ}$$

$P_1$  am Umfange der Spindel I ist

$$P_1 = 5000 \cdot \operatorname{tg} 11^{\circ} 10'$$

$$P_1 = 5000 \cdot 0,1975$$

$$P_1 \sim 987,5 \text{ kg}$$

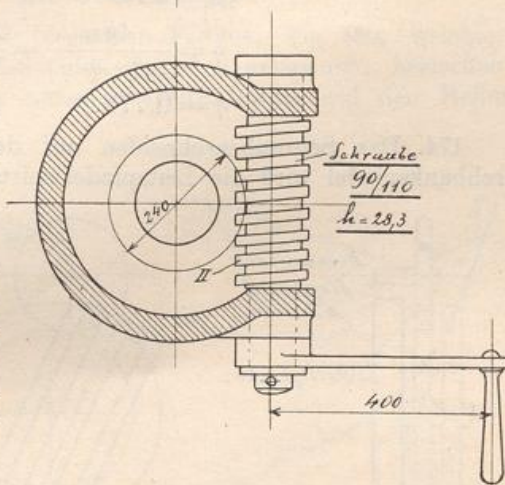
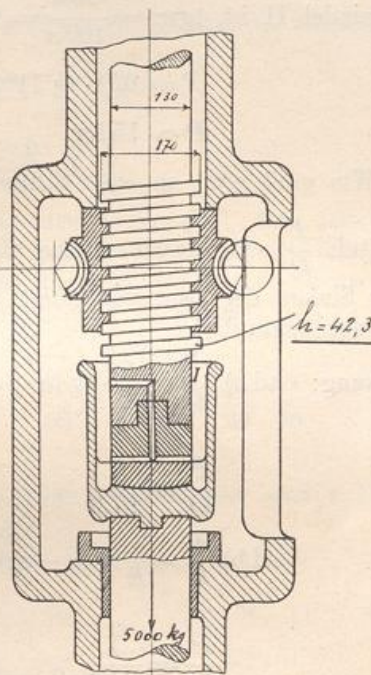


Fig. 148.



Reduziert auf den Umfang des Schneckenrades wird die nötige Kraft

$$P_2 = 987,5 \cdot \frac{150}{240} \sim 620 \text{ kg}$$

Demnach an der Kurbel nötig

$$\text{An Spindel II ist } \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{28,3}{100\pi} = 0,09; \alpha_2 = 5^\circ 10'$$

$$P = 620 \cdot \operatorname{tg} 11^\circ 20' \cdot \frac{50}{400} = 620 \cdot 0,1975 \cdot \frac{1}{8}$$

$$P \sim 15 \text{ kg}$$

173. Wie groß muß an einer Schraube mit  $\alpha = 42^\circ$ ,  $\varphi = 6^\circ$  und  $\frac{R}{r} = \frac{1}{20}$  das Verhältnis  $\frac{P}{Q}$  sein, damit a) eine gleichförmige Hebung der Last möglich sei, b) das Sinken der Last verhindert werde? Wie groß ist ferner der Wirkungsgrad der Schraube?

$$\text{Auflösung: ad a) } \frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{1}{20} \operatorname{tg} 48^\circ = \frac{1,1106}{20} = \frac{1}{1,1106}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{17,9}$$

$$\text{ad b) } \frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{0,72654}{20} = \frac{1}{27,6}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{27,6}$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{0,8693}{1,1106}$$

$$\eta = 0,778$$

174. Das Schraubenschnitten auf der Drehbank. Fig. 149. Von der Drehbankspindel wird die Leitspindel mittels der Räder  $a, b, c, d$  angetrieben.

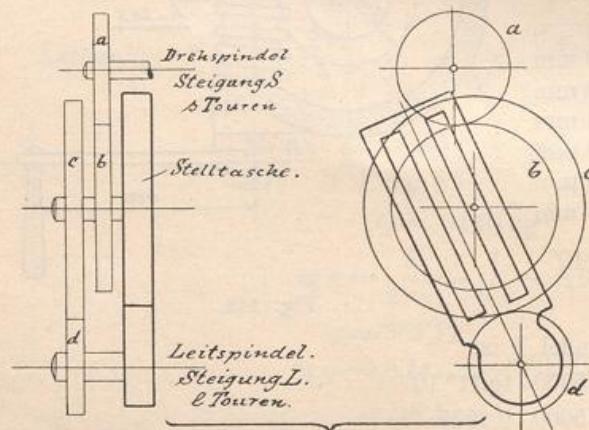


Fig. 149.

$a, b, c, d$  bedeuten gleichzeitig die Zähnezahlen dieser Räder. Von letzteren sind  $b$  und  $c$  auswechselbar (Wechselräder). Macht nun die Drehbankspindel  $s$  Umdrehungen, so besitzt die Leitspindel

$$l = s \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

Umdrehungen, so daß sich ergibt

$$\frac{l}{s} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß die Verschiebung des Supportes pro Umdrehung der Leitspindel um so größer wird, je größer der Wert  $\frac{ac}{bd}$  ist. —

Die Verschiebung des Supportes ist aber gleich der Steigung der zu schneidenden Schraube und auch gleich der Steigung der Leitspindel  $L$  mal der auf eine Drehung der Drehbankspindel entfallende Drehung der Leitspindel, d. i.  $\frac{L}{S}$ ,

mithin ist  $S = L \cdot \frac{l}{s}$ , also

$$S = \frac{ab}{cd} \cdot L \dots \dots \dots (146)$$

175. Auf einer Drehbank mit einer Leitspindel, bei der 3 Gänge auf einen Zoll gehen, soll eine Schraube geschnitten werden, welche 5 Gänge auf einen Zoll hat. Vorhanden sind die Räder  $a$  und  $d$  mit 24 und 20 Zähnen. Welche Wechselräder sind in die Stelltasche zu geben?

Auflösung:  $\frac{S}{L} = \frac{ab}{cd} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} = \frac{30}{50} = \frac{5 \cdot 6}{10 \cdot 5} = \frac{24}{20} \cdot \frac{5}{10}$

Die Zähnezahlen der zu nehmenden Wechselräder sind z. B.

$b = 30$  und  $c = 60$

oder

$b = 25$  und  $c = 50$

§ 45. Die Seilreibung.

An den freien Enden eines biegsamen Fadens, Fig. 150, welcher um einen festen Zylinder gelegt ist und den Bogen  $\alpha$  umspannt, herrschen die Spannungen  $t$  und  $T$ . Soll nun unter Rücksichtnahme auf den Reibungs-

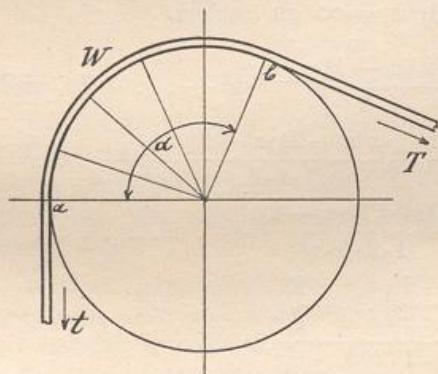


Fig. 150.

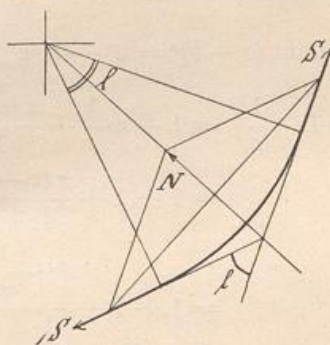


Fig. 151.

widerstand  $W$  die geringste Vermehrung von  $T$  eine Bewegung in der Richtung von  $T$  zur Folge haben, so muß gelten

$$T = t + W \text{ oder } W = T - t$$

Der Reibungswiderstand ändert sich mit dem von  $a$  bis  $b$  stets wachsenden Normaldruck.

Teilt man  $\alpha$  in unendlich viele Teile,  $n$  an der Zahl, so ist ein solcher  $\gamma = \frac{\alpha}{n}$ . Dadurch zerfällt der Faden in  $n$  gleich lange Teilchen, an deren Enden die Spannungen  $S$  und  $S'$  seien, Fig. 151. Die Resultierende der beiden ist der Normaldruck an der betreffenden Stelle des Zylinders. Je kleiner das betrachtete Fadenstückchen ist, desto weniger unterscheidet sich  $S$  von  $S'$ , desto mehr nähert sich das Kräfteparallelogramm einem Rhombus. Dann ist

$$N = 2S \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 2S \cdot \sin \frac{\alpha}{2n}$$

Da  $\sin \frac{\alpha}{2n} \sim \frac{\alpha}{2n}$  ist, folgt

$$N = S \cdot \frac{\alpha}{n} \quad \text{und} \quad W = f \cdot S \cdot \frac{\alpha}{n}$$

$$S' = S + W = S \left( 1 + f \cdot \frac{\alpha}{n} \right)$$

Im Anfangspunkte  $a$  besteht die Beziehung

$$S_1 = t \left( 1 + f \frac{\alpha}{n} \right)$$

Im nächsten Fadenelemente wird entsprechend

$$S_2 = S_1 \left( 1 + f \frac{\alpha}{n} \right) = t \left( 1 + f \frac{\alpha}{n} \right)^2$$

Weiter ist  $S_3 = t \left( 1 + f \cdot \frac{\alpha}{n} \right)^3$

Endlich wird  $S_n = T = t \left( 1 + f \frac{\alpha}{n} \right)^n$ , wobei  $n = \infty$  ist.

Es ist nun der Grenzwert  $\left( 1 + f \frac{\alpha}{n} \right)^n$  für  $n = \infty$  zu suchen.

Laut  $(a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + b^n$  wird

$$\left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z = 1 + z \cdot \frac{1}{z} + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{z(z-1)(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots$$

$$= 1 + 1 + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2 \cdot z^2} + \frac{z(z-1)(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z^3} + \dots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 \cdot 2} + \frac{\left( 1 - \frac{1}{z} \right) \left( 1 - \frac{2}{z} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$\text{Nun } \lim_{z=\infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

$$= 2 + 0,5 + 0,166 + 0,04166 + \dots$$

$$\lim_{z=\infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z = 2,71828 \dots = e$$

Für  $z = \frac{n}{f\alpha}$  gesetzt, ergibt sich letzterer Wert als

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \lim \left[1 + \frac{1}{\frac{n}{f\alpha}}\right]^{\frac{n}{f\alpha}} = \lim \left\{\left[1 + \frac{1}{\frac{n}{f\alpha}}\right]^{\frac{n}{f\alpha}}\right\}^{\frac{1}{f\alpha}} = e$$

d. h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{f\alpha}}\right)^{\frac{n}{f\alpha}} = e^{f\alpha}$

Daher  $T = t \cdot e^{f\alpha} \dots \dots \dots (147)$

und  $W = t \cdot (e^{f\alpha} - 1) \dots \dots \dots (148)$

Die Spannung  $T$  und der Widerstand  $W$  sind unabhängig vom Zylinderhalbmesser, wachsen aber mit der Größe des umspannten Bogens.

**Beispiele.**

176. Die Last  $G = 600$  kg soll mittels eines um einen festen Zylinder  $1\frac{1}{2}$  mal geschlungenen Seils gleichförmig heruntergelassen werden. Mit welcher Kraft ist das freie Seilende zu halten, wenn der Reibungskoeffizient zwischen Zylinder und Seil  $f = 0,4$  ist?

Auflösung:  $600 = T = t \cdot e^{f\alpha}$   
 $t = \frac{T}{e^{f\alpha}} = \frac{600}{2,718^{0,4 \cdot 3\pi}} = \frac{600}{2,718^{1,2\pi}} = 43,2$   
 $t = 13,9$  kg

177. Welche Last kann mit 1 kg durch ein um einen horizontalen, festen Zylinder gelegtes Seil gehalten werden, wenn  $\alpha = 1440^\circ (8\pi)$  und  $f = \frac{1}{3}$  ist?

Auflösung:  $T = 1 \cdot 2,718^{0,333 \cdot 8\pi} = 2,718^{2,664\pi}$   
 $T \sim 4350$  kg

**§ 46. Die Bandbremsen.**

Im § 45 wurden die Endspannungen  $t$  und  $T$  an den beiden Enden eines um einen festliegenden Zylinder gelegten Seiles so bestimmt, daß die größere Zugkraft ein gleichförmiges Hingleiten desselben über den Zylinder herbeizuführen imstande war.

Die Gleichgewichtsbedingung  $T = t \cdot e^{f\alpha}$  bleibt dann auch noch bestehen, wenn das Band mit den Endspannungen festliegt und der Zylinder gegen die Spannung  $T$  hin rotiert, Fig. 152. Diese Tatsache wird praktisch bei den Bandbremsen ausgenützt, um die Abwärtsbewegung einer Last zu verlangsamen, bzw. vollständig aufzuheben.

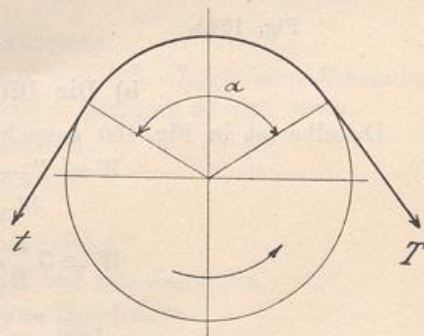


Fig. 152.

a) Die einfache Bandbremse.

Eine solche ist aus Fig. 153 ersichtlich. Wird das Ende des Bremshebels nach abwärts gedrückt, so entsteht im linken Bandende die größere Spannung. Der Widerstand gegen die Lastbewegung ist links gerichtet.

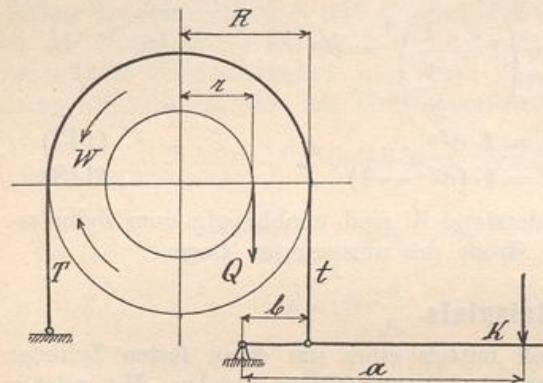


Fig. 153.

Wird das Ende des Bremshebels nach abwärts gedrückt, so entsteht im linken Bandende die größere Spannung. Der Widerstand gegen die Lastbewegung ist links gerichtet. Nun ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die Bedingung gilt

$$W = T - t = t(e^{\alpha} - 1)$$

$$Q \cdot r = W \cdot R$$

$$W = Q \frac{r}{R}$$

$$W = Q \frac{r}{R} = t(e^{\alpha} - 1),$$

woraus

$$t = Q \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{\alpha} - 1} \text{ folgt.}$$

Da ferner

$$t \cdot b = K \cdot a$$

sein muß, ergibt sich

$$Q \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{\alpha} - 1} b = K a \text{ und somit}$$

$$K = \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{e^{\alpha} - 1} \dots \dots \dots (149)$$

Andere Anordnungen von einfachen Bandbremsen geben Fig. 154a und 154b.

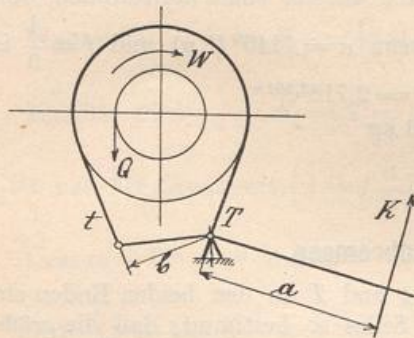


Fig. 154a.

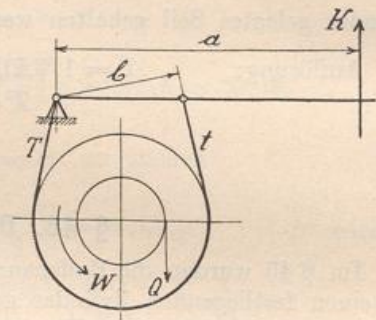


Fig. 154b.

b) Die Differentialbremse.

Dieselbe ist in Fig. 155 gezeichnet. Wieder wird

$$W = T - t = t(e^{\alpha} - 1)$$

$$W \cdot R = Q \cdot r$$

$$W = Q \frac{r}{R} = t \cdot (e^{\alpha} - 1)$$

$$t = \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{e^{\alpha} - 1}$$

Gleichgewicht am Bremshebel ist nun vorhanden, wenn die Summe der Momente in bezug auf seinen Drehpunkt gleich Null ist.

$$\begin{aligned}
 K \cdot a &= t \cdot b_2 - T \cdot b_1 \\
 K \cdot a &= t (b_2 - b_1 \cdot e^{f\alpha}) \\
 K \cdot a &= \frac{r}{R} Q \frac{b_2 - b_1 e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \\
 K &= \frac{1}{a} \cdot \frac{r}{R} Q \frac{b_2 - b_1 e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \dots \dots \dots (150)
 \end{aligned}$$

Der Reibungskoeffizient zwischen Stahlband und Gußeisenscheibe beträgt  $f = 0,18$ .

Die Bremse ist „selbsttätig“, wenn  $K = 0$  ist.

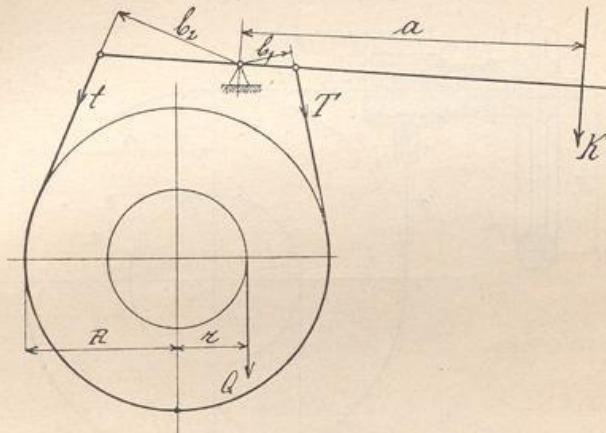


Fig. 155.

Die Bedingung für die Selbsthemmung ist

$$b_2 = b_1 \cdot e^{f\alpha} \dots \dots \dots (151)$$

für $\alpha =$	$0,2\pi$	$0,4\pi$	$0,6\pi$	$0,8\pi$	$0,85\pi$	$0,9\pi$	$0,95\pi$	$\pi$	$1,05\pi$
wird $e^{f\alpha} =$	1,12	1,25	1,4	1,57	1,62	1,66	1,71	1,76	1,81
für $\alpha =$	$1,1\pi$	$1,2\pi$	$1,3\pi$	$1,4\pi$	$1,5\pi$	$1,6\pi$	$1,7\pi$	$1,8\pi$	$2\pi$
wird $e^{f\alpha} =$	1,86	1,97	2,09	2,21	2,34	2,47	2,61	2,77	3,1

**c) Die Schraubenbremse.**

Der Anzug des Bremsbandes wird hier, Fig. 156, durch eine Schraube bewirkt, weshalb diese Bremse Schraubenbremse genannt werden kann.

- Es seien  $r$  der Radius der Lasttrommel,
- $R$  der Radius der Bremsscheibe,
- $r_1$  der Radius der Schraube,
- $\alpha_1$  der Steigungswinkel der Schraube,
- $R_1$  der Radius des Handrades auf der Schraube,
- $P$  die Kraft am Umfange des Handrades,
- $\varphi_1$  der Reibungswinkel für die Schraube.

Dann wird

$$\begin{aligned}
 W \cdot R &= Q \cdot r \\
 W &= Q \frac{r}{R} = T - t = t(e^{f\alpha} - 1) \\
 t \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1) \cdot \frac{r_1}{R_1} &= P \\
 t &= \frac{P \cdot R_1}{r_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1)} \\
 W &= \frac{P \cdot R_1}{r_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1)} \cdot (e^{f\alpha} - 1) = \frac{Qr}{R} \\
 P &= \frac{rr_1}{RR_1} Q \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1)}{e^{f\alpha} - 1} \dots \dots \dots (152)
 \end{aligned}$$

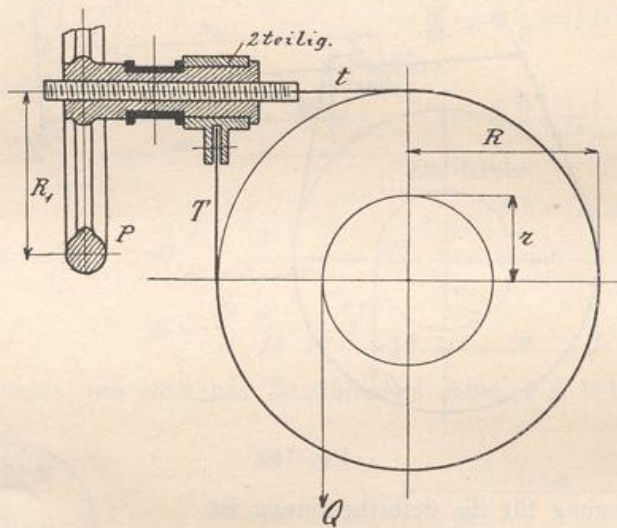


Fig. 156.

**Beispiele.**

178. Welche Last kann mit einer einfachen Bandbremse gebremst werden, wenn  $r = 125$  mm,  $R = 280$  mm,  $a = 120$  mm,  $b = 10$  mm,  $f = 0,18$ ,  $K = 40$  kg und  $\alpha = \frac{4}{3}\pi$  sind?

Auflösung:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{e^{f\alpha} - 1} \\
 Q &= K \frac{a}{b} \cdot \frac{R}{r} \cdot (e^{f\alpha} - 1) \\
 Q &= 40 \cdot \frac{0,12}{0,01} \cdot \frac{0,28}{0,125} \cdot (e^{0,18 \cdot \frac{4}{3}\pi} - 1) \\
 Q &\sim 1210 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

179. An einer Differentialbremse sind der Hebelarm der Last 200 mm, der Radius der Bremsscheibe 600 mm, der Hebelarm der Kraft 400 mm, die Last 1000 kg, der umspannte Bogen der Bremsscheibe  $0,7 \cdot 2\pi$ , die Hebelarme

der größeren und der kleineren Bandspannung 50 mm und 130 mm. — Wie groß ist die zum Bremsen der Last erforderliche Kraft?

Auflösung:

$$K = \frac{1}{400} \cdot \frac{200}{600} \cdot 1000 \frac{130 - 50 \cdot 2,21}{1,21} = \frac{19,5 \cdot 10}{1,21}$$

$$K = 13,4 \text{ kg}$$

180. Wie groß mußte dagegen in voriger Aufgabe der Hebelarm der größeren Bandspannung sein, damit die Bremse selbsttätig werde?

Auflösung:  $b_2 = b_1 e^{f\alpha} = 50 \cdot 2,21$

$$b_2 = 110,5 \text{ mm}$$

181. Die Kraft  $K$  am Hebel der in Fig. 135 dargestellten Differentialbremse zu bestimmen.

Auflösung: Die Umfangskraft an der Bremscheibe ergibt sich unter der Erwägung, daß der Wirkungsgrad eines Rädervorgeleges  $\eta = 0,9$  beträgt mit

$$P = \frac{Q \cdot 330}{z_4 \cdot t_4} \cdot \frac{z_3 \cdot t_3}{580 \cdot \eta}$$

$$P = \frac{1500 \cdot 330}{65 \cdot 40} \cdot \frac{13 \cdot 40}{580 \cdot 0,9} = \frac{170}{0,9}$$

$$P \sim 190 \text{ kg}$$

$$K_1 = \frac{1}{500} \cdot 190 \cdot \frac{150 - 70 \cdot 1,97}{0,97}$$

$$K_1 = \frac{190 \cdot 12,1}{500 \cdot 0,97}$$

$$K_1 \sim 4,75 \text{ kg}$$

182. In welchem Verhältnisse stehen an einer Schraubenbremse  $P$  und  $Q$ , wenn

$$\begin{array}{llll} r = 100 \text{ mm} & R = 300 \text{ mm} & \alpha_1 = \varphi_1 = 9^\circ 30' & f = 0,18 \\ r_1 = 15 \text{ mm} & R_1 = 120 \text{ mm} & \alpha = 1,4\pi & \end{array}$$

betragen?

Auflösung:

$$\frac{P}{Q} = \frac{r r_1}{R R_1} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1)}{e^{f\alpha} - 1}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{0,1 \cdot 0,015}{0,3 \cdot 0,12} \frac{\operatorname{tg} 19^\circ}{2,21 - 1}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{84}$$



§ 47. Die Backenbremsen.

Sie beruhen auf den Gesetzen der gleitenden Reibung.

a) Der Drehpunkt des Bremshebels liegt in der Tangente an die Brems-scheibe. Fig. 157.

Wird der Bremshebel an die Scheibe angedrückt, so entsteht die Reak-tion  $N$ . — Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Bedingung besteht

$$N \cdot b = K (a + b),$$

daraus ist 
$$N = \frac{a + b}{b} \cdot K$$

Der Reibungsbetrag am Umfang der Brems-scheibe ergibt sich dann mit

$$W = fN = f \frac{a + b}{b} \cdot K.$$

Damit Bremsen eintritt, muß  $P = W$  sein.

Nun ist

$$P \cdot R = Q \cdot r,$$

daher 
$$P = Q \frac{r}{R},$$

also 
$$Q \frac{r}{R} = f \frac{a + b}{b} \cdot K$$

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a + b} \cdot \frac{Q}{f} \quad (153)$$

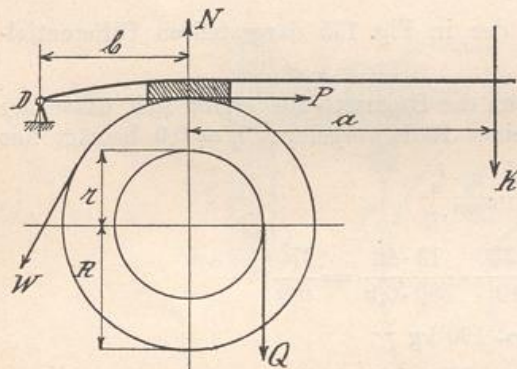


Fig. 157.

b) Der Drehpunkt des Bremshebels liegt oberhalb der Tangente an die Brems-scheibe. Fig. 158.

Wäre  $E$  der Hebeldrehpunkt, dann würde gelten

$$K_1 = \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a + b} \cdot \frac{Q}{f}$$

Da aber der Drehpunkt in  $D$  ist, tritt ein Kräftepaar  $P \cdot c$  auf, dessen Moment  $P \cdot c$  ebenfalls durch Bremsen aufgehoben werden muß. Die hierfür nötige Kraft ist nun aus

$$K_2 (a + b) = P \cdot c = Q \frac{r}{R} \cdot c$$

$$K_2 = \frac{r}{R} \cdot \frac{c}{a + b} \cdot Q$$

Demnach ist die totale Kraft am Bremshebel

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a + b} \cdot \frac{Q}{f} + \frac{r}{R} \cdot \frac{c}{a + b} \cdot Q$$

oder

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{a + b} \left( \frac{b}{f} + c \right) \dots \dots \dots (154)$$

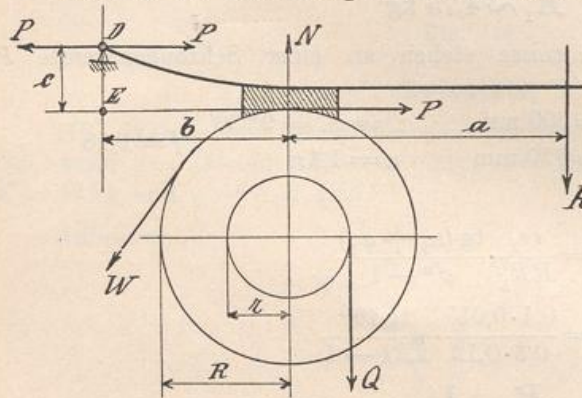


Fig. 158.

c) Der Drehpunkt des Bremshebels liegt unterhalb der Tangente an die Bremscheibe.

In diesem Falle hilft das Moment  $P \cdot c$  der Kraft  $K$

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{a+b} (b - c) \dots \dots \dots (155)$$

$f = 0,5$ , wenn Holz auf Eisen und trocken wirkt.

$f = 0,15 \div 0,1$  für Eisen auf Eisen.

**Beispiele.**

183. In welchem Verhältnisse stehen  $K$  und  $Q$ , wenn  $r = 100$ ,  $R = 300$ ,  $a = 400$ ,  $b = 75$  mm und  $f = 0,5$  sind?

Auflösung:

$$\frac{K}{Q} = \frac{100}{300} \cdot \frac{75}{475} \cdot \frac{1}{0,5}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{1}{9,5}$$

184. Wie groß ist für die Bremse in 183 die Last  $Q$ , wenn  $K \sim 20$  kg ist?

Auflösung:

$$Q = \frac{20 \cdot 300 \cdot 475 \cdot 0,5}{100 \cdot 75}$$

$$Q = 190 \text{ kg}$$

185. Wie groß ist für eine Bremse, bei welcher der Hebeldrehpunkt 30 mm unterhalb der Tangente an die Bremscheibe liegt, das Verhältnis  $\frac{K}{Q}$ , wenn  $a$ ,  $b$ ,  $r$  und  $R$  so groß wie in Beispiel 183 sind? Für welchen Wert von  $c$  wird ferner die Bremse selbsttätig?

Auflösung:

$$\frac{K}{Q} = \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{a+b} (b - c) = \frac{100}{300} \cdot \frac{1}{475} \cdot (75 - 30)$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{1}{11,9}$$

Die Bedingung für die Selbsttätigkeit der Bremse ist

$$\frac{b}{f} = c$$

$$c = \frac{75}{0,5}$$

$$c = 150 \text{ mm}$$

Wenn  $c < 150$  mm, ist Bremse nicht selbsttätig. Wird  $c > 150$  mm, dann muß man sogar Hebel noch etwas abheben, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll.

§ 48. Riemen- und Seilbetrieb.

Während eine direkte Bewegungsübertragung von einer auf eine andre Welle durch Stirn-, Kegel-, Schrauben- oder Reibungsräder erfolgt, findet die indirekte Bewegungsübertragung durch Riemen- oder Seilbetrieb statt.

a) Riemenbetrieb.

Der Riemenbetrieb wird angewendet, wenn es sich um Übertragung von nicht zu großen Kräften auf nicht zu große Entfernungen handelt.

Ein Riemen ist ein biegsames, an den beiden Enden zusammengefügtes Band ohne Ende. Das Material, aus welchem der Riemen gefertigt ist, ist meist lohbares Leder (seltener Kautschuk, Baumwolle, Drahtgewebe).

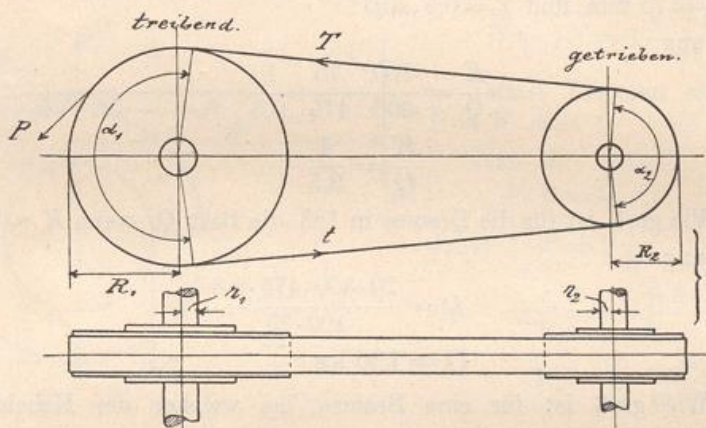


Fig. 159.

Ist der Riemen auf die ruhenden Scheiben aufgelegt, so herrscht in ihm überall die Spannung  $S$ . Fig. 159.

Während der Bewegungsübertragung indes wird die Spannung im ziehenden Teil  $T > S$ , im gezogenen  $t < S$ . Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muß die Umfangskraft  $P$  an der treibenden Scheibe gleich sein  $T - t$ , also

$$P = T - t$$

Nach den Gesetzen der Seilreibung (147) besteht die Beziehung

$$T = t \cdot e^{f\alpha}, \text{ so daß sich ergibt}$$

$$P = t \cdot (e^{f\alpha} - 1)$$

Somit resultieren die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{P}{e^{f\alpha} - 1} \\ T &= \frac{P \cdot e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (156)$$

Die Spannung  $S$ , mit welcher der Riemen auf die Scheiben aufgelegt werden muß, kann man setzen

$$S = \frac{T + t}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \dots \dots (157)$$

In diesen Gleichungen ist der Einfluß der Fliehkraft auf den Riemenbetrieb nicht berücksichtigt.

Die Zapfen haben je einen Druck  $2S$  aufzunehmen. Die auf den Umfang der Riemenscheiben reduzierten Reibungswiderstände sind dann

$$p_1 = \frac{2S \cdot \varphi \cdot r_1}{R_1} \text{ und } p_2 = \frac{2S \cdot \varphi \cdot r_2}{R_2}$$

Demnach ist der durch die Reibungswiderstände in den Zapfen verursachte Kraftverlust

$$p_1 + p_2 = \varphi \cdot 2S \cdot \left( \frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right) \text{ oder}$$

$$p_1 + p_2 = \varphi \cdot P \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \cdot \left( \frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right) \dots \dots (158)$$

Die Größen von  $e^{f\alpha}$  sind aus folgender, der Hütte entnommenen Tabelle zu ersehen.

$\frac{\alpha}{2 \cdot \pi}$	Lederriemen auf Scheiben aus			
	Holz	Gußeisen		
	Zustand des Riemens			
	etwas gefettet	sehr gefettet	etwas gefettet	feucht
	$f =$			
	0,47	0,12	0,28	0,38
0,1	1,34	1,01	1,19	1,27
0,2	1,81	1,16	1,42	1,61
0,3	2,43	1,25	1,69	2,05
0,4	3,26	1,35	2,02	2,60
0,5	4,38	1,46	2,41	3,3
0,6	5,88	1,57	2,81	4,19
0,7	7,90	1,66	3,43	5,32
0,8	10,6	1,83	4,09	6,75
0,9	14,3	1,97	4,87	8,57
1	19,2	2,12	5,81	10,9

### b) Der Seilbetrieb.

Wenn es sich um Übertragung größerer Kräfte handelt, so wendet man den Seilbetrieb an, und zwar innerhalb von Gebäuden vorteilhaft den **Hanfseilbetrieb**, auf größere Entfernungen von 50 bis 150 m den **Drahtseilbetrieb**.

#### α) Der Hanfseilbetrieb.

Die Hanfseiltransmission besteht darin, daß ein Hanfseil ohne Ende über zwei mit keilförmigen Rillen versehene Scheiben läuft und sich dabei in die Rillen einklemmt. Dadurch wird eine große Reibung erzeugt und die Spannung im Seile verringert. Der Keilwinkel der Rillen beträgt gewöhnlich  $\delta = 45^\circ$ . — Die Spannungen im ziehenden und gezogenen Teile des Seiles sind so groß wie diejenigen beim Riemenbetrieb, eher etwas kleiner wegen der auftretenden größeren Reibung.

β) Der Drahtseilbetrieb.

Da diese Art der Kraftübertragung auf größere Entfernungen angewendet wird, müssen ziehendes und gezogenes Seil durch Leitrollen unterstützt werden. Die Entfernung der Leitrollen hat 16 bis 20 m zu betragen. Die zulässige Umlaufgeschwindigkeit des Seiles ist mit 20 bis 30 m zu wählen. — Ein Seil besteht aus 6 Litzen à 6 bis 7 Drähten.

Bei der Montage muß das Seil schon eine gewisse Pfeilhöhe haben, Fig. 160. — Die Spannung  $T$  zerlegt sich dabei in die Komponenten  $H$  und  $V$ .

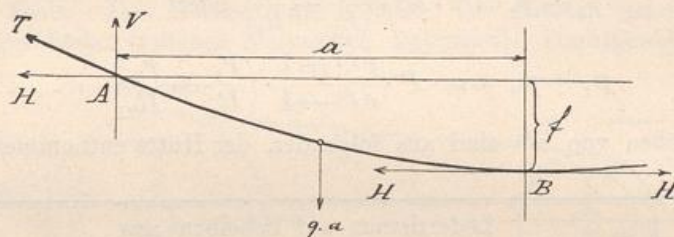


Fig. 160.

Das Gewicht der Längeneinheit der Horizontalprojektion des Seiles soll  $q$  kg sein. — Es müßte eigentlich angenommen werden, daß das Gewicht der Längeneinheit des Seiles konstant sei. Wenn dies hier nicht geschieht, so ist es deshalb, damit die Untersuchung sich einfacher gestalte. Man nimmt an

$$q = 0,7 \cdot i \cdot \delta^2 \dots \dots \dots (159),$$

wenn  $i$  die Zahl der Drähte und  $\delta$  die Drahtstärke in cm bedeuten.

Das Moment  $q a \cdot \frac{a}{2}$  bringt das Durchhängen einer Seilhälfte hervor. —

Das Gleichgewicht wird hier hergestellt durch das Moment  $H \cdot f$ .

Bringt man nämlich in  $B$  zwei horizontale, entgegengesetzt gleiche Kräfte  $H$  an, so bildet die rechtswirkende mit  $H$  in  $A$  das Kräftepaar mit dem Momente  $H \cdot f$ .

Die Gleichgewichtsbedingung lautet demnach

$$q a \cdot \frac{a}{2} = H \cdot f, \text{ daraus ist}$$

$$H = \frac{q a^2}{2 f}$$

Betrachtet man  $f$  und  $a$  als zugehörige Koordinaten, so ist  $H = \frac{q a^2}{2 f}$  die Gleichung einer Parabel. Würde indes die Voraussetzung gemacht werden, daß das Gewicht der Längeneinheit des Seiles konstant sei, dann würde die Gleichung einer Kettenlinie resultieren.

Es lassen sich nun die Pfeilhöhen im führenden und geführten Seile leicht rechnen.

$$\text{Im führenden Seile ist } \dots T = \frac{q a^2}{2 f_1},$$

$$\text{im geführten Seile ist } \dots t = \frac{q a^2}{2 f_2},$$

im ruhenden Seile ist . . . .  $S = \frac{q a^2}{2f}$ , so daß sich ergeben

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{q a^2}{2T} \\ f_2 &= \frac{q a^2}{2t} \\ f &= \frac{q a^2}{2S} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (160)$$

Die Größen von  $T$ ,  $t$  und  $S$  sind annähernd so groß wie die entsprechenden beim Riemenbetrieb.

$$\text{Da } \frac{q a^2}{2} = f_1 \cdot T = f_2 \cdot t = f \cdot S \dots \dots \dots (161)$$

ist, läßt sich sagen:

„Beim Drahtseilbetrieb ist Spannung mal Pfeilhöhe überall konstant.“

### Beispiele.

186. Welche Vielfache der Umfangskraft sind die Spannungen im ruhenden, ferner im führenden und geführten Teil eines etwas gefetteten Riemens, wenn derselbe 0,4 des Umfangs der treibenden Scheibe umspannt?

Auflösung: Für obenstehende Angaben ist  $e^{f\alpha} = 2,02$ .

$$S = \frac{P}{2} \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} = \frac{P}{2} \cdot \frac{3,02}{1,02}$$

$$S = 1,48 P \sim 1,5 P$$

$$T = \frac{P \cdot e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} = \frac{P \cdot 2,02}{1,02}$$

$$T \sim 2 P$$

$$t = \frac{P}{e^{f\alpha} - 1} = \frac{P}{1,02}$$

$$t \sim P$$

187. Wie groß sind die Spannungen im ruhenden, ferner im führenden und geführten Teil eines Hanfseiles, welches über zwei mit Rillen versehenen Scheiben läuft, wenn  $f = 0,7$  (bei Keilwinkel  $\delta = 45^\circ$ ) und  $\alpha = 0,9 \cdot \pi$  sind?

$$\text{Auflösung: } S = \frac{P}{2} \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} = \frac{P}{2} \cdot \frac{2,718^{0,7 \cdot 0,9 \cdot \pi} + 1}{2,718^{0,7 \cdot 0,9 \cdot \pi} - 1}$$

$$S = 0,66 P$$

$$T = \frac{P \cdot e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} = P \cdot \frac{2,718^{0,7 \cdot 0,9 \cdot \pi}}{2,718^{0,7 \cdot 0,9 \cdot \pi} - 1}$$

$$T = 1,16 P$$

$$t = 0,16 P$$

188. Mittels einer Drahtseiltransmission soll auf eine Entfernung von 100 m eine Leistung von 60 PS übertragen werden. Die Antriebsscheibe habe einen Durchmesser von 3,4 m und mache 100 Touren. Das Drahtseil bestehe aus 42 Drähten, deren jeder einen Durchmesser von 1,4 mm besitzt.

$T$  kann gleich  $2P$  und  $t$  gleich  $P$  angenommen werden. Wie groß sind die Pfeilhöhen im führenden und geführten Teile des Drahtseiles?

Auflösung:  $P \cdot R = 716200 \frac{N}{n}$

$$P = \frac{716200 \cdot 60}{100 \cdot 1700}$$

$$P \sim 250 \text{ kg}$$

$$T \sim 500 \text{ kg}$$

$$t \sim 250 \text{ kg}$$

$$q = 0,7 \cdot i \cdot \delta^2 = 0,7 \cdot 42 \cdot 0,14^2$$

$$q \sim 0,58 \text{ kg}$$

$$f_1 = \frac{q a^2}{2 T} = \frac{0,58 \cdot 50^2}{2 \cdot 500} = \frac{0,58 \cdot 25}{10}$$

$$f_1 = 1,45 \text{ m}$$

$$f_2 = \frac{q a^2}{2 t} = \frac{0,58 \cdot 50^2}{2 \cdot 250} = \frac{0,58 \cdot 25}{5}$$

$$f_2 = 2,9 \text{ m}$$