Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

Dritter Abschnitt. Dynamik.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Dritter Abschnitt.

Dynamik.

§ 49. Bewegungsgröße, Antrieb und Energie.

Wirkt auf einen Körper mit der Masse M eine Kraft P ein, so erteilt sie ihm eine Beschleunigung $p = \frac{P}{M}$

Die Geschwindigkeit des Körpers ist nach t Sekunden laut § 2

$$v = p \cdot t = \frac{P}{M} \cdot t$$

Daher ergibt sich die Beziehung

$$\boldsymbol{M \cdot v = P \cdot t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(162)}$$

„Das Produkt aus der Masse eines Körpers und seiner Geschwindigkeit heißt die **Bewegungsgröße des Körpers**, dagegen das Produkt aus bewegender Kraft und der Zeit, welche nötig ist, um den Körper auf die Geschwindigkeit zu bringen, **Antrieb der Kraft**.“

„Die Bewegungsgröße einer mit der Geschwindigkeit v fortschreitenden Masse M ist gleich dem Antriebe jener Kraft P, welche in t Sekunden der Masse M die Geschwindigkeit v zu erteilen vermag.“

In der Zeit t bewegt die Kraft P nun die Masse M einen Weg

$$s = \frac{p}{2} t^2$$

Da $p = \frac{P}{M}$ und t aus $v = p\,t$ sich mit $t = \frac{v}{p} = \frac{v \cdot M}{P}$ ergibt, folgt

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{M} \cdot \frac{v^2 \cdot M^2}{P^2} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{P \cdot s = \frac{M \cdot v^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(163)}$$

Durch die Wirkung der Kraft P auf dem Wege s ist der Masse eine Arbeit $\frac{M\,v^2}{2}$ mitgeteilt worden, welche sie verrichten kann, wenn sie infolge irgend welcher Widerstände wieder in den Zustand der Ruhe zurückkommt.

„Das Vermögen einer bewegten Masse, eine bestimmte mechanische Arbeit verrichten zu können, heißt **Arbeitsfähigkeit, Arbeitsvermögen, lebendige**

Kraft (schlechte, leider üblich gebliebene Bezeichnung, welche von Poncelet herrührt) oder **Energie.**"

Hat indes die Kraft P die Masse M von der Anfangsgeschwindigkeit c in der Zeit t Sekunden auf die Endgeschwindigkeit v gebracht, dann ist

$$s = c\,t + \frac{p}{2} t^2$$

und $p = \frac{P}{M}$, ferner aus $v = c + p\,t$

$$t = \frac{v - c}{p} = \frac{(v - c) \cdot M}{P}, \text{ demnach}$$

$$s = c \frac{(v - c)\,M}{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{M} \cdot \frac{(v - c)^2 \cdot M^2}{P^2}$$

$$P \cdot s = M \cdot c\,(v - c) + \frac{1}{2} M\,(v - c)^2$$

$$P \cdot s = M \cdot (v - c) \cdot \left(c + \frac{v}{2} - \frac{c}{2}\right) = M\,(v - c) \frac{v + c}{2}, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{P \cdot s = \frac{M}{2} v^2 - \frac{M}{2} c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(164)}$$

„Die Arbeit, welche eine Kraft leistet, um eine Masse von der Geschwindigkeit c auf die Geschwindigkeit v zu bringen, ist gleich der Differenz der lebendigen Kräfte, welche die Masse zu Ende und zu Anfang der Bewegung besitzt."

Die Arbeit, welche die Kraft geleistet hat, ist somit als Energie in der bewegten Masse zum Vorschein gekommen.

„Man nennt daher dieses Gesetz das **Gesetz von der Erhaltung der Energie.**"

Beispiele.

189. Wie groß ist der Reibungskoeffizient f, wenn ein Körper mit dem Gewichte G kg unter Einwirkung einer Kraft P kg in t Sekunden vom Ruhezustande aus s Meter auf horizontaler Bahn zurücklegt?

Auflösung: Die treibende Kraft ist $(P - f\,G)$; daher gilt

$$M \cdot v = (P - f\,G) \cdot t$$

$$\frac{G}{g} \cdot v = (P - f\,G) \cdot t$$

$$s = \frac{o + v}{2} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t$$

$$v = \frac{2\,s}{t}$$

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{2\,s}{t} = (P - f\,G) \cdot t$$

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{2\,s}{t^2} = P - f\,G$$

$$\boldsymbol{f = \frac{P}{g} - \frac{2\,s}{g\,t^2}}$$

190. Ein Körper mit dem Gewichte G kg soll durch eine Kraft, die mit dem Horizonte den Winkel β bildet, fortgezogen werden. Wie groß ist dieselbe, wenn der Reibungskoeffizient f ist?

Auflösung: Der Normaldruck des Körpers auf die Unterlage wird durch die Vertikalkomponente von P, nämlich durch $P \cdot \sin\beta$, verringert. Es ist dann

$$N = G - P \cdot \sin\beta$$

$$W = fG - fP \sin\beta$$

$$P \cdot \cos\beta = fG - fP \sin\beta$$

$$P \cdot \frac{\cos\beta \cos\varphi + \sin\beta \sin\varphi}{\cos\varphi} = G \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\boldsymbol{P = G \frac{\sin\varphi}{\cos(\beta - \varphi)}}$$

191. Welche Verzögerung erfährt ein gleitender Körper mit dem Gewichte G auf horizontaler Bahn?

Auflösung: Die verzögernde Kraft fG ist gleich der Masse des Körpers $\frac{G}{g}$ mal dessen Verzögerung b.

$$fG = b \cdot \frac{G}{g}$$

Die Verzögerung b wird daher

$$\boldsymbol{b = fg}$$

192. Ein Eisenbahnzug mit 200000 kg Gewicht soll beim Anfahren in einer Minute die Geschwindigkeit 15 m/sek erreichen. Wie groß muß die Zugkraft der Lokomotive sein, wenn $f = 0{,}005$ gesetzt werden darf?

Auflösung:
$$(P - fG) \cdot t = \frac{G}{g} \cdot v$$

$$P = fG + \frac{G \cdot v}{g \cdot t}$$

$$P = 0{,}005 \cdot 200000 + \frac{200000 \cdot 15}{9{,}81 \cdot 60}$$

$$P = 1000 + 5100$$

$$\boldsymbol{P = 6100 \text{ kg}}$$

193. Wie lange dauert es, bis ein auf horizontaler Strecke sich selbst überlassener Eisenbahnwagen zur Ruhe kommt, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit $c = 5$ m beträgt? $f = 0{,}005$. — Welche Strecke durchläuft er noch?

Auflösung: Die verzögernde Kraft ist fG. — Es ist dann

$$fG \cdot t = M \cdot c$$

$$t = \frac{M \cdot c}{f \cdot G} = \frac{G \cdot c}{f \cdot g \cdot G} = \frac{c}{fg}$$

$$t = \frac{5}{0{,}005 \cdot 9{,}81} = \frac{1000}{9{,}81} = 102 \text{ Sek.}$$

$$\boldsymbol{t = 1 \text{ Min. } 42 \text{ Sek.}}$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t = \frac{0 + 5}{2} \cdot 102$$

$$\boldsymbol{s = 255 \text{ m}}$$

Mittels der Arbeitsgleichung läßt sich die Aufgabe ebenfalls recht einfach lösen. Die lebendige Kraft des Wagens wird durch die Reibung aufgezehrt.

$$\frac{M \cdot c^2}{2} = f G \cdot s$$

$$\frac{G \cdot c^2}{2g} = f G \cdot s$$

$$s = \frac{c^2}{2 f g}$$

$$s = \frac{5^2}{2 \cdot 0{,}005 \cdot 9{,}81}$$

$$\mathbf{s = 255\ m}$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t = \frac{c}{2} \cdot t$$

$$t = \frac{2s}{c} = \frac{2c^2}{c \cdot 2fg}$$

$$t = \frac{c}{fg}$$

$$\mathbf{t = 1\ Min.\ 42\ Sek.}$$

194. Ein Regulierungsschieber, welcher unter einem Drucke von 3 Atm. steht, ist 75 mm breit und 450 mm lang. Wie groß ist der Widerstand gegen dessen Verschieben, wenn $f = 0{,}25$ ist?

Auflösung: Die gedrückte Fläche ist

$$7{,}5 \cdot 45 \sim 338 \text{ qcm}$$

Der Druck auf die Schieberfläche beträgt

$$P = 338 \cdot 3 \sim 1014 \text{ kg}$$

Somit ist der Widerstand gegen Verschieben des Schiebers

$$W = f \cdot P = 0{,}25 \cdot 1014$$

$$\mathbf{W \sim 255\ kg}$$

§ 50. Die fortschreitende Bewegung auf der schiefen Ebene ohne Rücksicht auf Reibung.

Ein Körper mit dem Gewichte G kg ist auf der schiefen Ebene in Bewegung. Fig. 161.

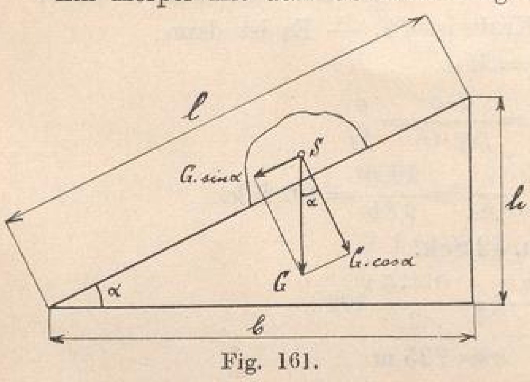

Fig. 161.

Die Komponente $G \sin \alpha$ erteilt dem Körper eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung findet sich laut Beschleunigungsgesetz mit

$$p = \frac{P}{m} = \frac{G \cdot \sin \alpha}{\frac{G}{g}} = g \cdot \sin \alpha$$

$$p = g \cdot \sin \alpha \quad . \quad . \quad \mathbf{(165)}$$

Wäre z. B. $\alpha = 30^0$, so würde $p = 0{,}5$ g folgen.

Es werde nun gefragt, mit welcher Geschwindigkeit v der Körper unten von der schiefen Ebene anlangt. Angenommen, die Zeit für das Durchlaufen des Weges l = Länge der schiefen Ebene sei t, dann wird, da die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers oben auf der schiefen Ebene gleich Null ist,

$$v = p \cdot t = g \sin \alpha \cdot t = g \cdot \frac{h}{l} \cdot t$$

Nun ist
$$l = \frac{1}{2} p t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \frac{h}{l} \cdot t^2$$

$$t = l \sqrt{\frac{2}{gh}}$$

$$v = g \frac{h}{l} \cdot l \sqrt{\frac{2}{gh}} \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(166)}$$

„Die Endgeschwindigkeit, welche ein Körper beim Herabgleiten von einer schiefen Ebene erlangt, ist so groß als die Geschwindigkeit, die er besitzt, wenn er die Höhe der schiefen Ebene frei herabgefallen wäre.“

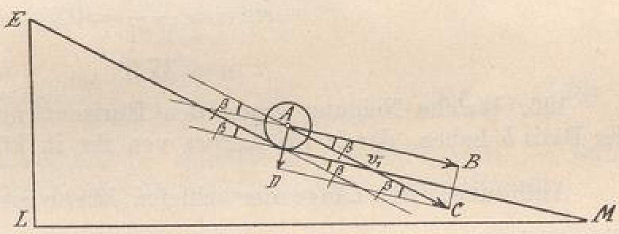

Fig. 162.

„Ob die schiefe Ebene hierbei nach einer Geraden oder Kurve gebildet ist, ist gleichgiltig.“

Beweis: In A, Fig. 162, lange der Körper mit der Geschwindigkeit $\overline{AC} = v_1$ an. Nun sind

$$\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \sin \beta = v_1 \cdot \sin \beta$$
$$\overline{AB} = v_1 \cos \beta$$

Der Geschwindigkeitsverlust in A ist daher

$$v_1 - v_1 \cos \beta = v_1 (1 - \cos \beta)$$

Derselbe ist ein Minimum, wenn $\cos \beta$ ein solches wird. Das ist für $\beta = 0$ der Fall.

Ist die schiefe Ebene aus lauter unendlich kleinen, schiefen Ebenen zusammengesetzt, d. h. nach einer stetig gekrümmten Kurve gebildet, dann trifft dies zu. Der Gesamtverlust an Geschwindigkeit ist 0, daher wie früher

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Die Dauer der Bewegung rechnet sich aus $l = \frac{p}{2} t^2$ mit, Fig. 163,

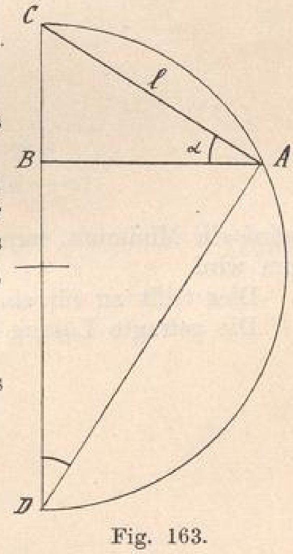

Fig. 163.

$$t = \sqrt{\frac{2l}{p}} = \sqrt{\frac{2l \cdot \overline{CD}}{g \cdot \overline{AC}}} = \sqrt{\frac{2l \cdot \overline{CD}}{gl}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \overline{CD}}{g}}$$

Daher ergibt sich $$\overline{CD} = \frac{g}{2} t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (167)$$

„Die Zeit, welche der Körper zum Herabfallen von der schiefen Ebene braucht, ist gerade so groß als würde er den Durchmesser eines Kreises frei herunterfallen, von dem die schiefe Ebene eine Sehne ist.“

„Die Höhe der schiefen Ebene und der Durchmesser des Kreises, von dem die schiefe Ebene eine Sehne ist, sind **isochrone** Wege (Wege in gleichen Zeiten).“

Beispiele.

195. Welche Neigung gegen den Horizont hat eine 12 m lange, schiefe Ebene, wenn von ihr ein Körper in 2 Sekunden heruntergleitet?

Auflösung:
$$12 = \frac{p}{2} t^2$$
$$12 = \frac{p}{2} \cdot 4$$
$$p = 6 = g \cdot \sin\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{6}{9{,}81} = 0{,}61$$
$$\alpha = \mathbf{37{,}5^0}$$

196. Welche Neigung gegen den Horizont muß eine schiefe Ebene mit der Basis b haben, damit ein Körper von ihr in kürzester Zeit heruntergleite?

Auflösung: Die Länge der schiefen Ebene ist $\frac{b}{\cos\alpha}$. — Es gilt nun die Weggleichung
$$\frac{b}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t^2$$
$$t = \sqrt{\frac{2b}{g} \cdot \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$
$$t = \sqrt{\frac{4b}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin 2\alpha}}$$
$$t = \sqrt{\frac{4b}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin 2\alpha}}$$

t wird ein Minimum, wenn der veränderlich große Nenner $\sqrt{\sin 2\alpha}$ ein Maximum wird.

Dies trifft zu für $\sin 2\alpha = 1$ oder $2\alpha = 90^0$.

Die gefragte Lösung lautet daher
$$\alpha = 45^0$$

§ 51. Die fortschreitende Bewegung auf der schiefen Ebene mit Rücksicht auf Reibung.

Beispiele.

197. Wie groß ist die Beschleunigung eines von einer gegen den Horizont unter Winkel α geneigten Ebene heruntergleitenden Körpers, wenn der Reibungskoeffizient f ist?

Auflösung: Die Beschleunigung ist der Quotient aus bewegender Kraft und bewegter Masse.

$$p = \frac{G \cdot \sin\alpha - f\, G \cos\alpha}{\frac{G}{g}}$$

$$p = g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

$$p = g\left(\sin\alpha - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right)$$

$$p = g \cdot \frac{\sin\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha}{\cos\varphi}$$

$$\boldsymbol{p = g \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(168)}$$

Wäre keine Reibung vorhanden, so wäre $f = 0$ und $\varphi = 0$. — Dann wird $p = g\sin\alpha$, welche Gleichung mit Gleichung (165) übereinstimmt.

198. Mit welcher Endgeschwindigkeit langt ein eine unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigte Ebene mit der Höhe h heruntergleitender Körper am Fuße derselben an, wenn der Reibungskoeffizient f ist?

$$v = g \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \cdot t$$

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\, g\, \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \cdot t^2$$

$$v = g\, \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \cdot \sqrt{\frac{2\,h}{g\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2\,g\,h \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha\cos\varphi}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(169)}$$

Wäre $\varphi = 0$, dann folgt $v = \sqrt{2\,g\,h}$, s. (166).

§ 52. Bewegung eines mathematischen Pendels.

Ein Pendel heißt im allgemeinen jeder um eine horizontale Achse schwingender Körper. Unter einem **mathematischen Pendel** versteht man einen an einem gewichtslos gedachten Faden aufgehängten, schwingenden, materiellen Punkt, Fig. 164.

Schwingung heißt die Bewegung des materiellen Punktes von der äußersten Lage rechts über die Mittellage bis zur äußersten Lage links. Die

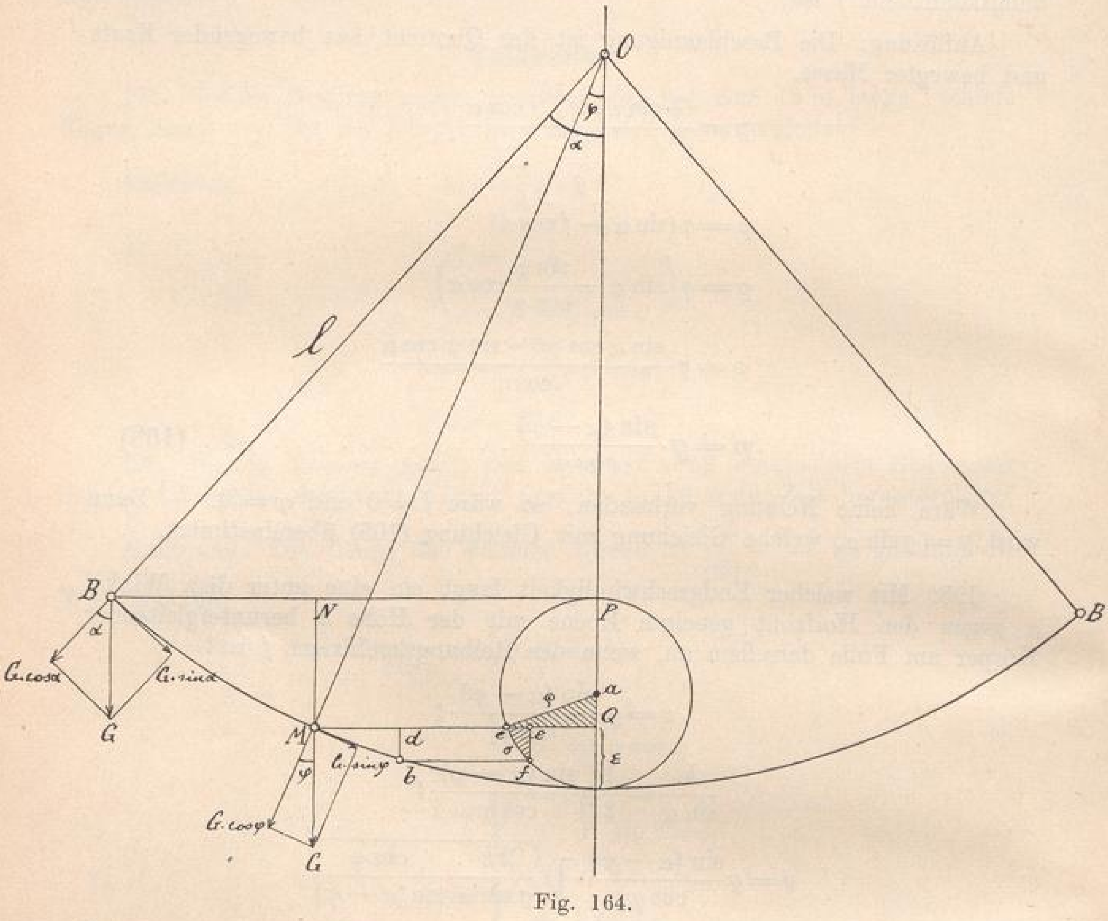

Fig. 164.

Zeit für eine Schwingung wird **Schwingungsdauer** genannt. Der jeweilige Ausschlagswinkel des Pendels aus der Mittellage wird mit **Elongation**, der größte Ausschlagswinkel mit **Amplitude** bezeichnet. Die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit heißt **Schwingungszahl.**

1 Schwingung dauert t Sek.
x Schwingungen dauern 1 „ .

Daher $x : 1 = 1 : t$ oder

$$x = \frac{1}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(170)}$$

„Schwingungszahl und Schwingungszeit sind reziproke Werte."

Die **Schwingungsintensität**, das Maß der Schwingung, ist abhängig von der Größe der jeweiligen Schwingungsgeschwindigkeit. Infolge der Schwere wirken in

B		M	
$G \cos \alpha$	$G \sin \alpha$	$G \cos \varphi$	$G \sin \varphi$
spannend	bewegend	spannend	bewegend

Die Beschleunigung in B ist $\frac{G}{g} \sin \alpha$, in M $\frac{G}{g} \sin \varphi$; da nun $\varphi < \alpha$ ist,

wird
$$\frac{G}{g} \sin \varphi < \frac{G}{g} \sin \alpha \qquad (171)$$

„Die Beschleunigung ist ein Maximum in den Amplituden, ein Minimum (0) in der Mittellage.“ Die Geschwindigkeit, welche das Bewegliche in M erlangt, ist so groß, als wäre es die Höhe $\overline{NM}$ frei herabgefallen.

$v = \sqrt{2g \cdot \overline{NM}}$; $\overline{NM} = \overline{OQ} - \overline{OP} = l(\cos \varphi - \cos \alpha)$, d. h.

$$v = \sqrt{2\,gl\,(\cos \varphi - \cos \alpha)} \qquad (172)$$

Für B ist $\varphi = 0$, folgt $v = 0$

„ A „ $\varphi = 0$, „ $v = \sqrt{2\,gl\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}$

„ B' „ $\varphi = -\alpha$, „ $v = 0$

„In B und B' sind die minimalen, in A ist die maximale Geschwindigkeit vorhanden.“

Vom Luftwiderstande ist in obigen Betrachtungen abgesehen worden. Unter Nichtberücksichtigung desselben werde im folgenden die Formel für die Schwingungsdauer abgeleitet.

In M ist
$$v = \sqrt{2\,g \cdot \overline{PQ}}$$

Die Zeit für den unendlich kleinen Weg $\overline{Mb}$ ist

$$\tau = \frac{\overline{Mb}}{\sqrt{2\,g \cdot \overline{PQ}}}$$

Da $\triangle Mbd \sim \triangle MOQ$, wird

$$\overline{Mb} : \overline{bd} = l : \overline{MQ} \text{ oder}$$
$$\overline{Mb} : \overline{bd} = l : \sqrt{\varepsilon(2l - \varepsilon)}$$

ε^2 kann wegen seiner Kleinheit gegen $2l\varepsilon$ vernachlässigt werden. Dann ergibt sich $\tau = \sqrt{\frac{\overline{Mb}}{2g \cdot \overline{PQ}}} = \frac{\overline{bd} \cdot l}{\sqrt{2l\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g \cdot \overline{PQ}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\overline{bd}}{\sqrt{\varepsilon \cdot \overline{PQ}}}$

Nun ist $\overline{cQ} = \sqrt{\overline{PQ} \cdot \varepsilon}$, daher $\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\overline{bd}}{\overline{cQ}}$;

ferner ist $\triangle cef \sim \triangle cQa$, so daß

$$\overline{fe} : \overline{cQ} = \sigma : \varrho$$
$$\overline{fe} = \overline{bd}$$
$$\frac{\overline{bd}}{\overline{cQ}} = \frac{\sigma}{\varrho}, \text{ also}$$
$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\sigma}{\varrho}$$

Die Summe aller unendlich kleinen Zeitteilchen τ ergibt die ganze Schwingungszeit

$$t = \Sigma(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \Sigma\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \Sigma(\sigma)_B^{B'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot 2\varrho\pi$$

Die Dauer der Schwingung von B bis B' ist daher

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(173)}$$

Aus letzter Formel lassen sich einige wertvolle Schlüsse ziehen.

a) Die Größe α kommt in der Gleichung für t nicht vor. „Die Schwingungsdauer ist unabhängig vom Elongationswinkel (allerdings solange derselbe sehr klein ist)". Pendel gleicher Länge sind **isochron.** —

b) Zwei Pendel mit den Längen l_1 und l_2 haben an demselben Ort der Erde die Schwingungszeiten

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \text{ und } t_2 = \pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

Demnach folgt

$$\left.\begin{array}{r} t_1^2 : t_2^2 = l_1 : l_2 \\ \text{und } n_1^2 : n_2^2 = l_2 : l_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(174)}$$

d. h. „Die Längen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten oder verkehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen."

c) Für Pendel an verschiedenen Orten der Erde müssen die Längen ungleich ausfallen, wenn die Schwingungszeiten gleich werden sollen. In der nördl. Breite 45^0 wird $l = \frac{g}{\pi^2} \sim 1$ m (0,99355), wenn das Pendel eine Schwingung in der Sekunde machen soll.

Beispiele.

199. Wie groß ist die Fallbeschleunigung an einem Orte der Erde, an dem ein 1 m langes Pendel genau 1 Schwingung in der Sekunde macht?

Auflösung: $\quad g = \pi^2 = \mathbf{9{,}8696\ m}$

200. Welches Verhältnis besteht zwischen der Schwingungszeit eines l Meter langen Pendels und der Fallzeit für die Höhe l?

Auflösung:

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$t_1 : t_2 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$\mathbf{t_1 : t_2 = \pi : \sqrt{2}}$$

§ 53. Bewegungsgesetze rotierender Körper.

„Unter **Winkelgeschwindigkeit** ω eines um eine feste Achse sich gleichförmig drehenden Körpers versteht man den Winkel, welchen jedes Teilchen dieses Körpers pro Zeiteinheit zurücklegt.“ Siehe § 6.

Statt im Winkelmaß kann ω auch im Bogenmaß (als Bogen mit dem Radius 1) ausgedrückt werden. Dann wird die Geschwindigkeit am Radius r, die **Bahngeschwindigkeit**, $v = r\omega$.

„Unter dem **Trägheitsmoment** eines starren Körpers in bezug auf eine bestimmte Drehachse versteht man die Summe der Produkte aus den Massenteilchen des Körpers und den Quadraten ihrer Abstände von derselben.“

Bei einer **gleichförmig drehenden Bewegung** eines starren Körpers existiert zwischen Energie und Trägheitsmoment desselben eine bestimmte Beziehung.

Die Massenteilchen m_1, m_2, m_3 .... haben die Bahngeschwindigkeiten

$$v_1 = r_1\,\omega$$
$$v_2 = r_2\,\omega$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Die lebendigen Kräfte der Massenteilchen sind dann

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1}{2} r_1^2 \omega^2$$
$$\frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2}{2} \cdot r_2^2 \omega^2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Demnach wird die totale lebendige Kraft des rotierenden Körpers

$$L = \Sigma\left(\frac{m}{2} r^2 \omega^2\right) = \frac{\omega^2}{2} \cdot \Sigma\,(m\,r^2)$$

$\Sigma\,(m\,r^2)$ ist das Trägheitsmoment des Körpers, so daß der Ausdruck für seine Energie lautet

$$L = \frac{\omega^2}{2} \cdot J \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (175)$$

Bei der **ungleichförmig drehenden Bewegung** ändert sich die Winkelgeschwindigkeit jeden Augenblick. Ein Teilchen m_1 eines sich ungleichförmig drehenden Körpers hatte anfangs die Bahngeschwindigkeit v_1 und nach der Zeit τ die Bahngeschwindigkeit v_1'. — Dann gilt

$$v_1 = r_1\,\omega_1$$
$$v_1' = r_1\,\omega_1'$$

Die Bahngeschwindigkeitsänderung ist dann

$$v_1 - v_1' = r_1\,(\omega_1 - \omega_1'),$$

daher die **Bahnbeschleunigung**

$$p = \frac{v_1 - v_1'}{\tau} = r_1\,\frac{\omega_1 - \omega_1'}{\tau}.$$

„Das Verhältnis aus der Winkelgeschwindigkeitsänderung $(\omega_1 - \omega_1')$ und der Zeit τ, in welcher diese erfolgt, heißt **Winkelbeschleunigung** ε.“

Daher wird $$p = r \cdot \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

Zwischen dem die **gleichförmig beschleunigte Drehung** veranlassenden Drehmomente und dem Trägheitsmomente des rotierenden Körpers läßt sich eine wertvolle Beziehung ableiten. Es sind nämlich die Bahnbeschleunigungen der Teilchen des Körpers

$$p_1 = r_1 \varepsilon$$
$$p_2 = r_2 \varepsilon$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Die auf die Teilchen wirkenden Drehkräfte

$$m_1 p_1 = m_1 r_1 \varepsilon$$
$$m_2 p_2 = m_2 r_2 \varepsilon$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

endlich die auf die Teilchen wirkenden Drehmomente

$$D_1 = m_1 p_1 r_1 = m_1 r_1^2 \varepsilon$$
$$D_2 = m_2 p_2 r_2 = m_2 r_2^2 \varepsilon.$$

Daher wird das Gesamtdrehmoment

$$D = \Sigma (mr^2 \cdot \varepsilon) = \varepsilon \cdot \Sigma (mr^2) \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{D = \varepsilon \cdot J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(177)}$$

Aus Formel (175) ist erklärlich, warum große Massen, z. B. Schwungradkränze, infolge ihrer großen Trägheitsmomente große Energien übertragen können, Formel (177) zeigt, daß ein großes Drehmoment an einem Körper eine große Winkelbeschleunigung hervorruft.

„Unter dem Zentrifugalmoment eines geometrischen Gebildes in bezug auf zwei zueinander beliebig geneigte Achsen versteht man die Summe der Produkte aus den Größen der Teilchen des Gebildes und der Koordinaten derselben."

$$\boldsymbol{L = \Sigma (f \cdot x \cdot y)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(178)}$$

„Ist das Gebilde ein symmetrisches, so ist dessen Zentrifugalmoment in bezug auf seine Hauptachsen gleich Null."

§ 54. Reduktion von Trägheitsmomenten.

Ist z. B. das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf irgend eine Achse bekannt, dann läßt sich leicht dasjenige in bezug auf eine andere, zu ersterer bestimmt liegende finden.

„Die Aufsuchung des Trägheitsmomentes in bezug auf eine bestimmte Achse aus einem in bezug auf eine andere Achse gegebenen Trägheitsmomente nennt man **Reduktion** des letzteren."

Es sei, Fig. 165, $\overline{MN}$ eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende, $\overline{mn}$ eine zu dieser im Abstande a parallele Achse.

Das Trägheitsmoment eines Massenteilchens A des Körpers in bezug auf die Achse $\overline{MN}$ ist

$$\triangle J_s = m \cdot \varrho^2,$$

in bezug auf die Achse $\overline{mn}$ dagegen

$$\triangle J_o = mr^2$$

Zieht man $\overline{AC}$ senkrecht zur Ebene E, welche durch die Achse $\overline{MN}$ gelegt ist, dann wird

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\alpha$$

Nun ist $\varrho\cos\alpha = h$, daher

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2ah$$

Beide Seiten der Gleichung mit m multipliziert, folgt

$$mr^2 = ma^2 + m\varrho^2 - 2ahm$$

Demnach gilt für den ganzen Körper

$$\Sigma(mr^2) = \Sigma(ma^2) + \Sigma(m\varrho^2) - \Sigma(2ahm) \text{ oder}$$

$$J_o = Ma^2 + J_s - 2a\cdot\Sigma(hm)$$

Der Ausdruck $\Sigma(hm)$ ist das statische Moment des Körpers in bezug auf eine Schwerachse und daher gleich Null. Es ist also

$$\boldsymbol{J_o = J_s + M\cdot a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(179)}$$

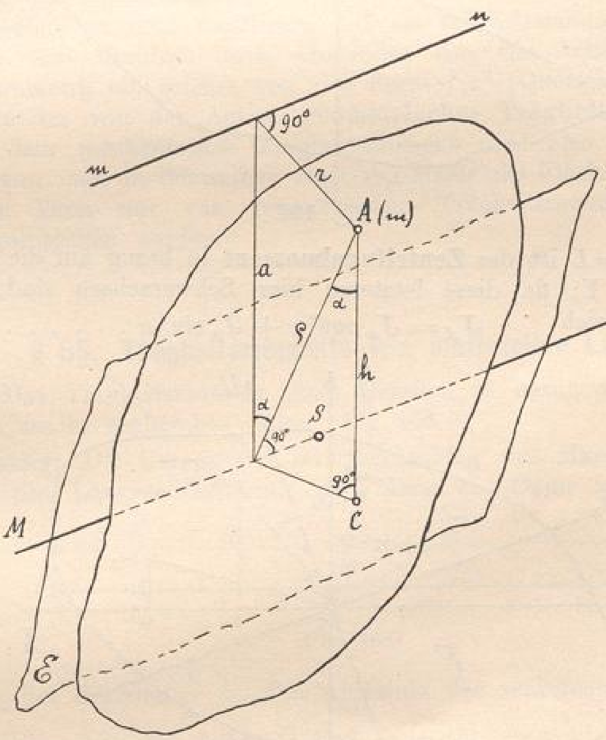

Fig. 165.

J_s ist immer kleiner als J_o, weil Ma^2 positiv ist. „Das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine Schwerachse ist somit das kleinstmögliche.“

Meist werden für Flächen die Trägheitsmomente in bezug auf deren Symmetrieachse gesucht. Oft aber braucht man das Trägheitsmoment einer symmetrischen Fläche in bezug auf eine beliebige Schwerachse. In Fig. 166 ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse A

$$J_A = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + \ldots\ldots$$

Nun ist $z_1 = \overline{m_1 b} - \overline{ab} = y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha$

$$z_1^2 = y_1^2 \cos^2\alpha - 2\,x_1\,y_1 \sin\alpha\cos\alpha + x_1^2 \sin^2\alpha \quad \text{oder}$$

$$z_1^2 = y_1^2 \cos^2\alpha + x_1^2 \sin^2\alpha - x_1\,y_1 \sin 2\,\alpha; \quad \text{daher}$$

$$J_A = m_1\,(y_1^2 \cos^2\alpha + x_1^2 \sin^2\alpha - \sin 2\,\alpha \cdot x_1\,y_1) +$$

$$+ m_2\,(y_2^2 \cos^2\alpha + x_2^2 \sin^2\alpha - \sin 2\,\alpha \cdot x_2\,y_2) + \ldots$$

$$J_A = \sin^2\alpha \cdot \Sigma\,(m\,x^2) + \cos^2\alpha \cdot \Sigma\,(m\,y^2) - \sin 2\,\alpha \cdot \Sigma\,(m\,x\,y).$$

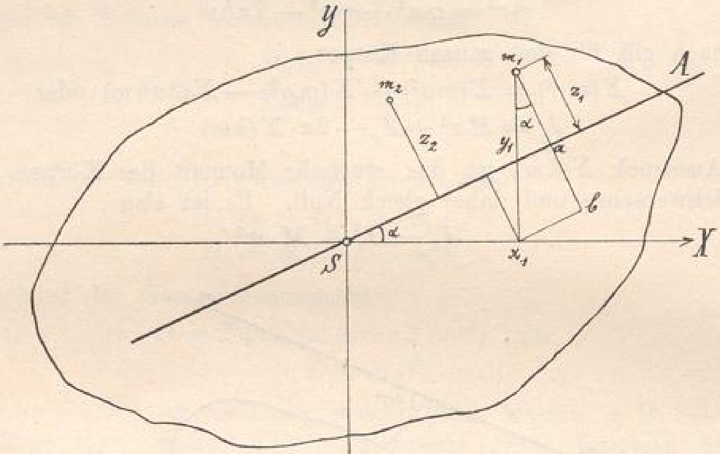

Fig. 166.

$\Sigma\,(m\,x\,y) = L$ ist das **Zentrifugalmoment** in bezug auf die Koordinatenachsen X und Y; da diese letzteren hier Schwerachsen sind, ist $L = 0$. Daher schreibt sich

$$\boldsymbol{J_A = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(180)}$$

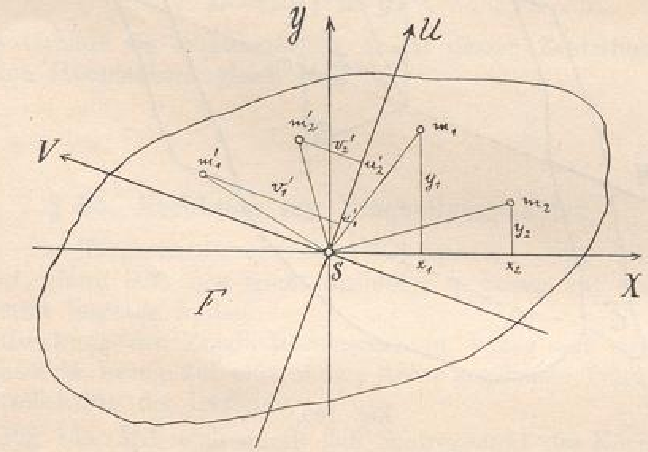

Fig. 167.

„Alle bisher genannten Trägheitsmomente von Flächen heißen **äquatoriale.** Die Achsen, in bezug auf welche die Trägheitsmomente genommen sind, liegen in den Flächen."

„**Polares Trägheitsmoment** eines Querschnittes indes ist dasjenige, welches in bezug auf eine zu diesem senkrecht stehende Achse genommen wird. Der Schnittpunkt der Achse mit der Fläche heißt **Pol.**"

Es soll nun das polare Trägheitsmoment der Fläche F, Fig. 167, in bezug auf den Pol S (Schwerpunkt) gefunden und durch die beiden äquatorialen Trägheitsmomente J_x und J_y ausgedrückt werden. Nun sind:

$$J_x = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_y = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_p = m_1 (x_1^2 + y_1^2) + m_2 (x_2^2 + y_2^2) + \ldots\ldots \quad \text{oder}$$

$$J_p = m_1 (u_1^2 + v_1^2) + m_2 (u_2^2 + v_2^2) + \ldots\ldots$$

Somit ist einerseits $J_p = \Sigma (m x^2) + \Sigma (m y^2)$ und

andererseits $J_p = \Sigma (m u^2) + \Sigma (m v^2)$, also

$$\boldsymbol{J_p = J_x + J_y = J_u + J_v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(181)}$$

„Das polare Trägheitsmoment eines Querschnittes ist gleich der Summe zweier äquatorialer, welche in bezug auf durch den Pol gehende, beliebige, aber senkrecht aufeinander stehende Achsen genommen sind.“

„Ist der Querschnitt regulär, so ist das polare Trägheitsmoment doppelt so groß wie das äquatoriale.“

„Schließlich sei noch angeführt, daß ein Trägheitsmoment von der Form mr^2 (Masse mal Quadrat ihres Abstandes von der Achse) **mechanisches Trägheitsmoment**, ein solches von der Form $f \cdot r^2$ (Querschnitt mal Quadrat seines Abstandes von der Achse) **geometrisches Trägheitsmoment** heißt.“

„Aus dem mechanischen Trägheitsmoment wird also das geometrische erhalten, wenn man in demselben statt der Masse die Fläche einführt. Selbstverständlich kann nur von geometrischen Trägheitsmomenten von Querschnitten gesprochen werden.“

§ 55. Trägheitsmomente von materiellen Linien.

201. Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Endpunkte zu ihr senkrechte Achse. Fig. 168.

Auflösung: Die Gerade $\overline{OA}$ sei gleichmäßig mit Masse belegt gedacht und zwar pro Längeneinheit mit der Masse δ. Dann ist die Masse des

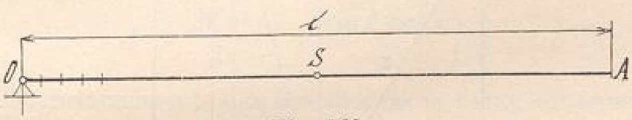

Fig. 168.

n-ten Teils der Geraden $\frac{l}{n} \cdot \delta$. Die Abstände der einzelnen, aufeinander folgenden Teilchen von der Achse O sind $(n = \infty)$

$$\frac{l}{n},\ 2\frac{l}{n},\ 3\frac{l}{n},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n \cdot \frac{l}{n}$$

Demnach wird das Trägheitsmoment der Geraden in bezug auf die Achse O

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \left(\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(2\frac{l}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(n \frac{l}{n}\right)^2$$

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2)$$

In Aufgabe 112 wurde $(1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2)_{n=\infty} = \frac{n^3}{3}$ gefunden. Daher wird

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot \frac{n^3}{3} \quad \text{oder}$$

$$J_O = \frac{1}{3}(l \cdot \delta) \cdot l^2$$

Da $l \cdot \delta = m$, die Masse der Geraden ist, folgt

$$\boldsymbol{J_O = \frac{1}{3} m l^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(182)}$$

„Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Endpunkte auf ihr senkrechte Achse ist ebenso groß, als wenn der dritte Teil ihrer Masse am freien Ende konzentriert wäre."

202. Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Mittelpunkte auf ihr senkrechte Achse.

Auflösung: Dasselbe heißt J_s — Laut Reduktionsformel (179) wird

$$J_s = J_o - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4}.$$

$$\boldsymbol{J_s = \frac{ml^2}{12} = \frac{1}{4} J_O} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(183)}$$

„Das Trägheitsmoment ist $^1/_4$ des vorigen."

203. Wie lautet die Formel für das Trägheitsmoment eines Kreisbogens in bezug auf die in seinem Mittelpunkte auf seine Mittellinie senkrecht stehende Achse? Fig. 169.

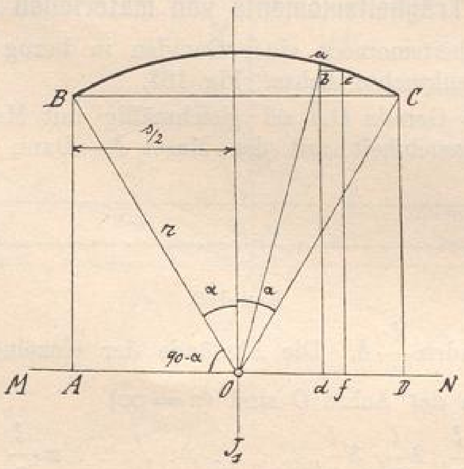

Fig. 169.

Auflösung: Der Kreisbogen BC habe den Radius r. — Winkel BOC sei gleich 2α. — Ein unendlich kleiner Teil von BC, nämlich $\overline{ac}$, hat das Trägheitsmoment

$$\delta \cdot \overline{ac} \cdot \overline{ad}^2,$$

wenn δ die Masse pro Längeneinheit des Bogens bedeutet. Das Trägheitsmoment des ganzen Bogens wird dann

$$J = \Sigma(\delta \cdot \overline{ac} \cdot \overline{ad}^2)$$

Da $\triangle\, abc \sim \triangle\, Oad$, folgt

$$\overline{ac} : \overline{bc} = \overline{Oa} : \overline{ad}$$

$$\overline{ac} = \frac{\overline{bc} \cdot \overline{Oa}}{\overline{ad}} = \frac{\overline{bc} \cdot r}{\overline{ad}}$$

Demnach wird $J = \Sigma\left(\delta \cdot \frac{\overline{bc} \cdot r}{\overline{ad}} \cdot \overline{ad}^2\right) = r \cdot \delta \cdot \Sigma\,(\overline{ad} \cdot \overline{bc})$

Nun stellt $\overline{ad} \cdot \overline{bc}$ die Fläche $acdf$ vor, da man letztere ihrer Kleinheit wegen als ein Rechteck betrachten kann. $\Sigma\,(\overline{ad} \cdot \overline{bc})$ ist dann gleich Fläche $ABCD$.

$$\Sigma\,(\overline{ad} \cdot \overline{bc}) = \frac{\widehat{BC} \cdot r}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot r \cdot \sin\,(90 - \alpha)$$

$$= \frac{2r \cdot \widehat{\alpha} \cdot r}{2} + \frac{1}{2}\, rs \cdot \cos \alpha$$

$$= r^2 \cdot \widehat{\alpha} + \frac{1}{2}\, r \cos \alpha \cdot 2r \cdot \sin \alpha$$

$$= r^2 \cdot \widehat{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$J = r\delta \cdot r^2 \cdot \widehat{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$J = r\widehat{\alpha} \cdot \delta \cdot r^2 \left(1 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$M = 2r\widehat{\alpha} \cdot \delta$$

$$r \cdot \widehat{\alpha} \cdot \delta = \frac{M}{2}, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{J = \frac{Mr^2}{2}\left(1 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\widehat{\alpha}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(184)}$$

204. Das Trägheitsmoment eines Kreisbogens in bezug auf seine Symmetrieachse. Fig. 169.

Auflösung: Das polare Trägheitsmoment des Kreisbogens ist $J_p = Mr^2$, daher wird

$$J_1 = Mr^2 - \frac{Mr^2}{2}\left(1 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$\boldsymbol{J_1 = \frac{Mr^2}{2}\left(1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\widehat{\alpha}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(185)}$$

§ 56. Trägheitsmomente von ebenen Flächen.

205. Das Trägheitsmoment eines Rechteckes in bezug auf die Grundlinie als Achse. Fig. 170.

Auflösung: Man denke sich das Rechteck in unendlich viele Streifen, welche senkrecht zur Grundlinie stehen, zerlegt. Ein solcher kann dann als materielle Linie aufgefaßt werden. Ist die Masse desselben m, so hat letztere in bezug auf die Grundlinie des Rechteckes das Trägheitsmoment $\frac{m h^2}{3}$ — Demnach ist dasjenige des ganzen Rechteckes

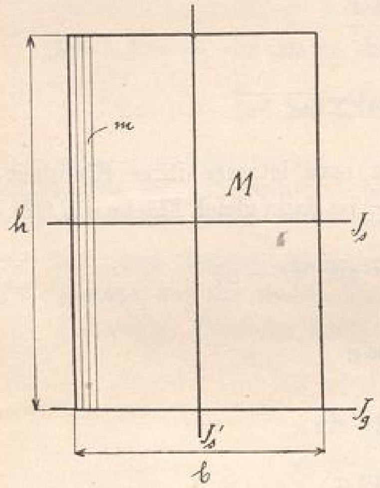

Fig. 170.

$$J_g = \Sigma\left(\frac{m h^2}{3}\right) = \frac{h^2}{3} \cdot \Sigma(m), \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{J_g = \frac{M}{3} h^2} \quad . \; . \; . \quad \textbf{(186)}$$

Setzt man statt M die Fläche des Rechteckes $b \cdot h$ ein, so ergibt sich das geometrische Trägheitsmoment

$$\boldsymbol{J_g = \frac{b h^3}{3}} \quad . \; . \; . \; . \quad \textbf{(187)}$$

206. Das Trägheitsmoment des Rechteckes in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse. Fig. 170.

Auflösung: Laut Reduktionsformel (179) wird

$$J_s = J_g - M\frac{h^2}{4} = \frac{M}{3} h^2 - \frac{M}{4} h^2, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{J_s = \frac{M}{12} h^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(188)}$$

Wird statt M die Fläche des Rechteckes $b \cdot h$ eingesetzt, so ergibt sich das geometrische Trägheitsmoment

$$\boldsymbol{J_s = \frac{b h^3}{12}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(189)}$$

207. Polares Trägheitsmoment eines Rechteckes in bezug auf seinen Schwerpunkt als Pol. Fig. 170.

Auflösung: Laut (181) ist

$$J_p = J_s + J_{s'} = \frac{M}{12} h^2 + \frac{M}{12} b^2, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{J_p = \frac{M}{12}(b^2 + h^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(190)}$$

Das geometrische, polare Trägheitsmoment wird

$$\boldsymbol{J_p = \frac{1}{12}(b^3 h + b h^3)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(191)}$$

208. Das Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse. Fig. 171.

Auflösung: Da die Dreiecksfläche ABC gleich ist der halben Fläche des Parallelogrammes $ABCD$, welches mit ihm gleiche Basis und gleiche Höhe

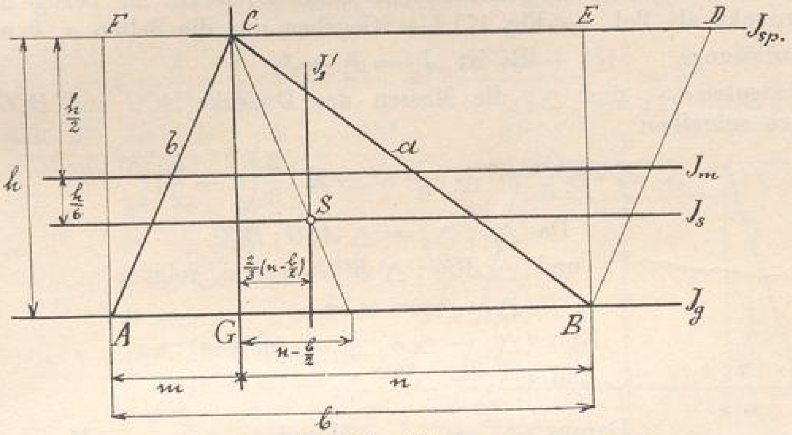

Fig. 171.

hat, so ist das Trägheitsmoment des Dreieckes in bezug auf eine zur Basis parallele, die Höhe halbierende Achse

$$J_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{2M}{12} h^2 = \frac{M}{12} h^2$$

Demnach in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse

$$J_s = J_m - M\left(\frac{h}{6}\right)^2 = \frac{M}{12} h^2 - \frac{M}{36} h^2$$

$$\boldsymbol{J_s = \frac{M}{18} h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(192)}$$

Das geometrische Trägheitsmoment wird

$$\boldsymbol{J_s = \frac{b h^3}{36}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(193)}$$

209. Das Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf die Grundlinie als Achse. Fig. 171.

Auflösung: $J_g = J_s + M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{M}{18} h^2 + \frac{M}{9} h^2 = \frac{6}{36} M h^2$, somit

$$\boldsymbol{J_g = \frac{M}{6} h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(194)}$$

Das geometrische Trägheitsmoment ist

$$\boldsymbol{J_g = \frac{b h^3}{12}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(195)}$$

210. Das Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf eine durch die Spitze parallel zur Grundlinie gelegte Achse. Fig. 171.

Auflösung:

$$J_{sp} = \frac{M}{18} h^2 + M \cdot \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{M}{18} h^2 + \frac{4}{9} M h^2, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{J_{sp} = \frac{M}{2} h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(196)}$$

Das geometrische Trägheitsmoment ist

$$J_{sp} = \frac{b\,h^3}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (197)$$

211. Das polare Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf den Schwerpunkt als Pol. — Fig. 171. — Gegeben nur die Seiten a, b und c.

Auflösung: Es ist $J_p = J_s + J_{s'}$

Bedeuten $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die Massen der Dreiecke ACG und BCG, dann läßt sich schreiben

$$J_{s'} = \frac{\triangle_1}{6}\,m^2 + \frac{\triangle_2}{6}\,n^2 - M\left[\frac{2}{3}\left(n - \frac{b}{2}\right)\right]^2$$

$$\text{Da } \triangle_1 : \triangle_2 = \triangle\, ACG : BCG$$

$$\text{und } \triangle\, ACG : \triangle\, BCG = m : n, \text{ folgt}$$

$$\triangle_1 : \triangle_2 = m : n$$

$$\text{Nun } (\triangle_1 + \triangle_2) : \triangle_1 = (m+n) : n$$

$$\text{und } (\triangle_1 + \triangle_2) : \triangle_2 = (m+n) : n$$

$$\text{Daraus } \triangle_1 = \frac{m}{m+n}\,M \text{ und } \triangle_2 = \frac{n}{m+n}\cdot M$$

Demnach ergibt sich durch Substitution von $\triangle_1$ und $\triangle_2$

$$J_{s'} = \frac{m^3}{6\,(m+n)}\cdot M + \frac{n^3}{6\,(m+n)}\cdot M - \frac{M}{9}\,(2n-b)^2 = \frac{M}{6}\,(m^2 - mn + n^2) - \frac{M}{9}\,(n-m)^2$$

$$J_p = \frac{M}{18}\,h^2 + \frac{M}{6}\,(m^2 - mn + n^2) - \frac{M}{9}\,(n^2 - mn + m^2)$$

$$= \frac{M}{18}\,(h^2 + m^2 + n^2 + m\cdot n)$$

$$J_p = \frac{M}{36}\,[(h^2 + m^2) + (h^2 + n^2) + (m^2 + mn + n^2)]$$

$$\boldsymbol{J_p = \frac{M}{36}\,(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (198)$$

Das geometrische, polare Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt als Pol ist dann

$$\boldsymbol{J_p = \frac{F}{36}\,(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

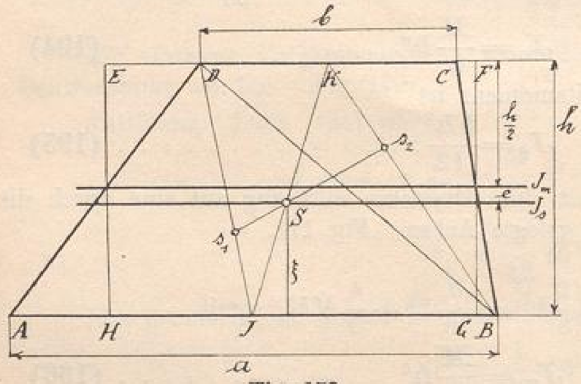

Fig. 172.

212. Geometrisches Trägheitsmoment des Trapezes in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse. Fig. 172.

Auflösung: Das Trägheitsmoment des Trapezes in bezug auf die Achse J_m ist so groß wie dasjenige des flächengleichen Rechteckes, also

$$J_m = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{h^3}{12}$$

Dasselbe soll nun auf die Schwerachse reduziert werden. Zunächst ist hierzu ξ nötig.

$$\frac{bh}{2}\cdot\frac{2}{3}h+\frac{ah}{2}\cdot\frac{h}{3}=\frac{a+b}{2}\cdot h\cdot\xi$$

$$\xi=\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$$

$$e=\frac{h}{2}-\xi=\frac{h}{2}-\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}=\frac{h}{6}\left[3-\frac{2(a+2b)}{a+b}\right]=\frac{h}{6}\cdot\frac{a-b}{a+b}$$

$$J_s=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{h^3}{12}-\frac{a+b}{2}\cdot h\cdot\left(\frac{h}{6}\cdot\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

$$J_s=\frac{a+b}{24}h^3-\frac{h^3}{72}\cdot\frac{(a-b)^2}{a+b}$$

$$J_s=\frac{h^3}{72}\cdot\frac{3(a+b)^2-(a-b)^2}{a+b}$$

$$J_s=\frac{h^3}{72}\cdot\frac{3a^2+6ab+3b^2-a^2+2ab-b^2}{a+b}$$

$$J_s=\frac{h^3}{72(a+b)}\cdot(2a^2+8ab+2b^2)$$

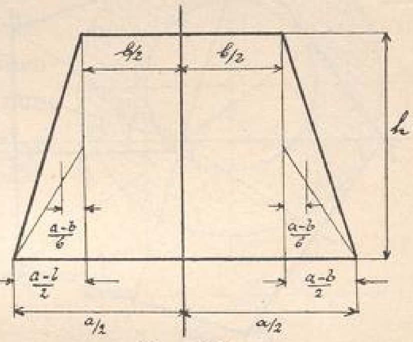

Fig. 173.

$$\boldsymbol{J_s=\frac{h^3}{36}\cdot\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(200)}$$

213. Geometrisches Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Trapezes in bezug auf die die Mittelpunkte der Parallelseiten verbindende Achse. Fig. 173.

Auflösung:

$$J=\frac{hb^3}{12}+2\left[h\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^3}{36}+\frac{h}{2}\cdot\frac{a-b}{2}\left(\frac{b}{2}+\frac{a-b}{6}\right)^2\right]$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+2\left[\frac{h(a-b)^3}{8\cdot 36}+\frac{h}{4}(a-b)\left(\frac{a+2b}{6}\right)^2\right]$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot 36}[(a-b)^2+2(a+2b)^2]$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot 36}(a^2-2ab+b^2+2a^2+8ab+8b^2)$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot 36}(3a^2+6ab+9b^2)$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot 12}\cdot(a^2+2ab+3b^2)$$

$$J=\frac{h}{48}(4b^3+a^3-a^2b+2a^2b-2ab^2+3ab^2-3b^3)$$

$$J=\frac{h}{48}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$J=\frac{h}{48}[a^2(a+b)+b^2(a+b)]$$

$$\boldsymbol{J=\frac{h}{48}(a^2+b^2)\cdot(a+b)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(201)}$$

214. Polares Trägheitsmoment eines regulären Polygons in bezug auf dessen Schwerpunkt als Pol. Fig. 174.

Auflösung: Das reguläre Polygon habe n Seiten und die Masse M. — Ein Dreieck SAB hat die Masse $\frac{M}{n}$. — Das Trägheitsmoment dieses Dreieckes in bezug auf die Achse $\overline{SF}$ ist

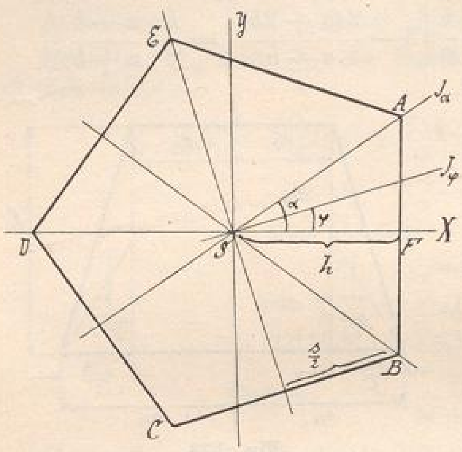

Fig. 174.

$$\triangle J_x = 2\frac{M}{2n} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{M}{24n} \cdot s^2$$

In bezug auf die zu $\overline{SF}$ senkrechte Achse ist dasselbe

$$\triangle J_y = \frac{M}{n} \cdot \frac{1}{2} h^2 = \frac{M}{2n} \cdot h^2$$

Daher ist das polare Trägheitsmoment dieses Dreieckes in bezug auf die Spitze als Pol

$$\triangle J_p = \frac{M}{24n} \cdot s^2 + \frac{M}{2n} \cdot h^2 = \frac{M}{n} \cdot \left(\frac{s^2}{24} + \frac{h^2}{2}\right)$$

$$\triangle J_p = \frac{M}{2n} \cdot \left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)$$

Alle Dreiecke haben nun in bezug auf S dasselbe polare Trägheitsmoment, daher gilt für das ganze Polygon

$$\boldsymbol{J_p = \frac{M}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(202)}$$

Das geometrische, polare Trägheitsmoment des Polygons wird

$$\boldsymbol{J_p = \frac{F}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(203)}$$

Für den Kreis wird $s = 0$ und $h = \frac{d}{2}$, daher

$$\bigcirc J_p = \frac{M}{2}\left(\frac{d^2}{4} + 0\right), \text{ somit}$$

$$\bigcirc \boldsymbol{J_p = \frac{M}{8} d^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(204)}$$

Wird statt M die Fläche $\frac{\pi}{4} d^2$ gesetzt, so ergibt sich das geometrische, polare Trägheitsmoment des Kreises mit

$$\bigcirc \boldsymbol{J_p = \frac{\pi}{32} d^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(205)}$$

Für den Kreisring, Fig. 175, werden, wenn M die Masse des äußeren und m diejenige des inneren Kreises ist:

$${}_{\text{mech}}J_p = \frac{M}{8} D^2 - \frac{m}{8} d^2 \text{ oder}$$

$${}_{\textbf{mech}}\boldsymbol{J_p = \frac{1}{8}(M D^2 - m d^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(206)}$$

$$_{\text{geom}}J_p = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}D^4 - \frac{\pi}{4}d^4\right) \text{ oder}$$

$$_{\text{geom}}\boldsymbol{J_p} = \frac{\pi}{32}(\boldsymbol{D^4 - d^4}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(207)}$$

215. Das äquatoriale Trägheitsmoment eines regulären Polygons in bezug auf eine Schwerachse. Fig. 175.

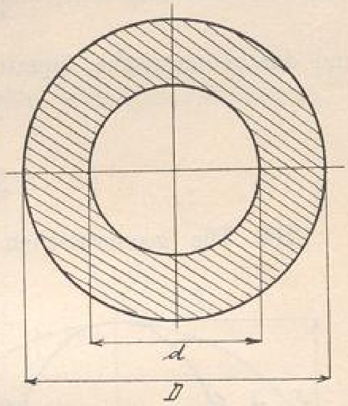

Fig. 175.

Auflösung: Das Trägheitsmoment des Polygons in bezug auf die Achse $\overline{SA}$ ist ebenso groß wie in bezug auf die Achse $\overline{SF}$, weil dieselbe ebenfalls durch den Schwerpunkt und einen Eckpunkt des Polygons hindurchgeht. Ist nun $\overline{SA}$ gegen die Achse $\overline{SF}$ unter dem Winkel α geneigt und heißt das Trägheitsmoment des Polygons in bezug auf sie J_α, so ist $J_\alpha = J_x$.

Somit wird laut Formel (180)

$$J_\alpha = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha = J_x \text{ oder}$$
$$J_x \cdot (1 - \cos^2\alpha) = J_y \cdot \sin^2\alpha, \text{ d. h.}$$
$$J_\alpha = J_x = J_y$$

Das Trägheitsmoment des Polygons in bezug auf jede durch Schwerpunkt und Eckpunkt gehende Achse wäre demnach konstant.

Für eine unter dem Winkel φ gegen die Achse $\overline{SF}$ geneigte Achse ergibt sich

$$J_\varphi = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi$$

Da $J_x = J_y$ ist, folgt

$$J_\varphi = J_x(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = J_x, \text{ d. h.}$$
$$\boldsymbol{J_x = J_y = J_\alpha = J_\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(208)}$$

„Das Trägheitsmoment eines regulären Polygons ist für jede Schwerachse gleich."

Da die Summe zweier äquatorialen Trägheitsmomente in bezug auf zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen das polare Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf den Schnittpunkt dieser Achsen als Pol ist, folgt

$$\frac{M}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right) = J_x + J_y = 2J_x, \text{ daher}$$

$$\boldsymbol{J_x = J_y = \frac{M}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(209)}$$

Das geometrische, äquatoriale Trägheitsmoment des Polygons ist dann

$$\boldsymbol{J_x = J_y = \frac{F}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(210)}$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist das mechanische, äquatoriale Trägheitsmoment wegen $s = 0$ und $h = \frac{d}{2}$

$$\boldsymbol{J = \frac{M}{16}d^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(211)}$$

und das geometrische, äquatoriale

$$J = \frac{\pi}{64} d^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (212)$$

Für den ringförmigen Querschnitt ergibt sich das mechanische, äquatoriale Trägheitsmoment mit

$$J = \frac{M}{16} D^2 - \frac{m}{16} d^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (213)$$

und das geometrische, äquatoriale mit

$$J = \frac{\pi}{64} D^4 - \frac{\pi}{64} d^2 \text{ oder mit}$$

$$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (214)$$

216. Die geometrischen Trägheitsmomente einer Ellipse in bezug auf ihre Achsen zu suchen. Fig. 176.

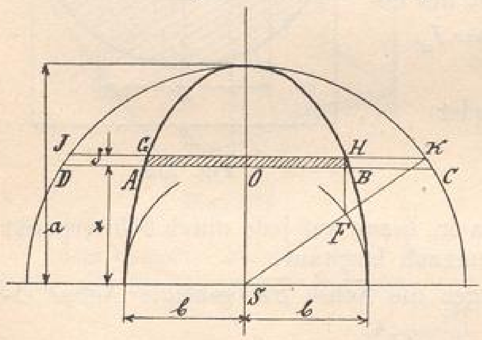

Fig. 176.

Auflösung: In bezug auf die kleine Achse ist das Trägheitsmoment des Flächenstreifens $ABGH$

$$\triangle J = \overline{AB} \cdot \delta \cdot x^2$$

Wegen $\overline{BO} : \overline{CO} = \overline{FS} : \overline{CS}$ oder

$$\overline{BO} : \overline{CO} = b : a \text{ ist}$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{OB} = \frac{b}{a} \cdot \overline{CO}$$

$$\triangle J = \frac{b}{a} \cdot \overline{CO} \cdot \delta \cdot x^2$$

Das Trägheitsmoment der Ellipse in bezug auf die kleine Achse ist demnach

$$J = 2 \cdot \Sigma \left(\frac{b}{a} \cdot \overline{CO} \cdot \delta \cdot x^2 \right)$$

$$J = \frac{b}{a} \cdot \Sigma (2 \cdot \overline{CO} \cdot \delta \cdot x^2)$$

$2 \cdot \overline{CO} \cdot \delta$ ist der Inhalt des dem Kreise angehörenden Flächenstreifens $DCJK$. — Daher wird

$$J = \frac{b}{a} \cdot \Sigma (DCJK \cdot x^2)$$

$$J = \frac{b}{a} \cdot J_{\circ} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{4} a^4$$

$$J = \frac{\pi}{4} a^3 b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (215)$$

Ebenso findet man in bezug auf die große Achse

$$J_1 = \frac{\pi}{4} a \cdot b^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (216)$$

§ 57. Graphische Ermittelung der Trägheitsmomente von ebenen Flächen nach dem Verfahren von Mohr.

Die gegebene Fläche wird parallel zur Achse $\overline{MN}$, in bezug auf welche das Trägheitsmoment gesucht werden soll, in eine große Zahl von Streifen zerlegt, Fig. 177.

Hierauf werden die Inhalte der Streifen $\overline{01}$, $\overline{12}$, . . ., die als Kräfte betrachtet werden können, auf einer zur Trägheitsachse parallelen Geraden auf-

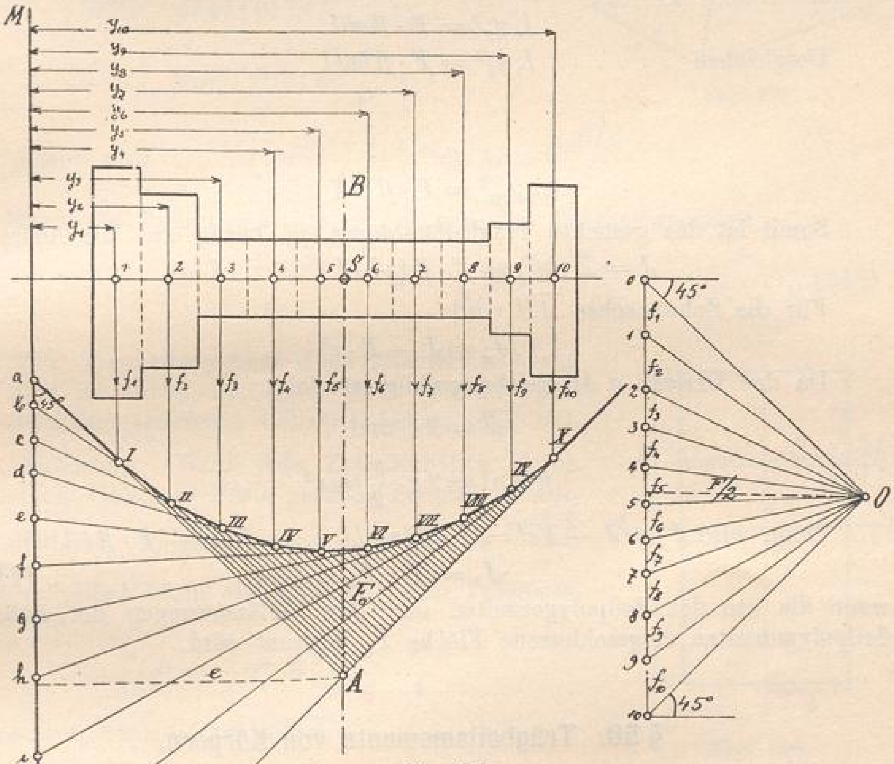

Fig. 177.

getragen. Zu dem Kräftezug $\overline{01}$, $\overline{12}$, . . . wird nun das Kräftepolygon so verzeichnet, daß die äußersten Strahlen des letzteren mit der Symmetrieachse der gegebenen Fläche je einen Winkel von 45⁰ bilden. Nach Konstruktion des Seilpolygons I II . . . . X A I findet man mit $\overline{AB}$ die Schwerachse der gegebenen Fläche.

Die Poldistanz ist laut Konstruktion gleich $^1/_2$ von $\overline{0,10}$, d. h. $\frac{F}{2}$ —

Werden die einzelnen Seilpolygonseiten bis zur Achse $\overline{MN}$ verlängert, so entstehen ein neuer Kräftezug und ein Kräftepolygon mit dem Pole A und der Poldistanz e.

Das Trägheitsmoment des ersten Flächenstreifens f_1 in bezug auf $\overline{MN}$ ist $f_1 y_1^2$ —

Da $\triangle\, 01\, O \sim ab\, I$, folgt $y_1 : \frac{F}{2} = \overline{ab} : f_1$, so daß sich ergibt

$$f_1 y_1 = \overline{ab} \cdot \frac{F}{2} \text{ und}$$

$$f_1 y_1^2 = \overline{ab} \cdot \frac{F}{2} \cdot y_1$$

$\overline{ab} \cdot y_1$ ist die doppelte Fläche abI. Demnach wird

$$f_1 y_1^2 = F \cdot fl\, abI$$

Desgleichen ...... $f_2 y_2^2 = F \cdot fl\, bcII$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f_{10} y_{10}^2 = F \cdot fl\, klX$$

Somit ist das gesuchte Trägheitsmoment in bezug auf die Achse $\overline{MN}$

$$J = \Sigma (fy^2) = F \cdot fl\, (aI\, II\; \ldots\; X\, la)$$

Für die Schwerachse $\overline{AB}$ wird

$$J_s = J - F \cdot e^2$$

Da das Dreieck $a\,Al$ gleichschenklig ist, folgt

$$\overline{al} = 2\,e \text{ und}$$

$$fl\, A\, al = 2\,e \cdot \frac{e}{2} = e^2$$

Dann wird $J_s = J - Fe^2 = F \cdot fl\, (aI\, II\; \ldots\; Xla) - F \cdot fl\, (A\, al)$

$$\boldsymbol{J_s = F \cdot F_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(217)}$$

wenn die von den Seilpolygonseiten und den Verlängerungen der äußersten Seilpolygonseiten eingeschlossene Fläche F_0 genannt wird.

§ 58. Trägheitsmomente von Körpern.

217. Das Trägheitsmoment eines Kreiszylinders in bezug auf seine Längsachse. Fig. 178.

Auflösung: Der Zylinder werde in unendlich dünne, konzentrische Schichten zerlegt. Das Trägheitsmoment einer solchen in der Entfernung ϱ von der Achse ist dann

$$\triangle J = \left[(2\,\pi\,\varrho \cdot \triangle\,\varrho)\, l \cdot \frac{\gamma}{g}\right] \cdot \varrho^2$$

Somit ist das Gesamtträgheitsmoment

$$J = 2\pi\, l\, \frac{\gamma}{g} \cdot \Sigma\, (\varrho^3 \cdot \triangle\,\varrho)$$

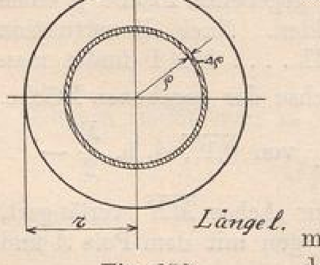

Fig. 178.

Der Ausdruck $\Sigma\, (\varrho^3 \cdot \triangle\,\varrho)$ ist leicht und folgendermaßen zu ermitteln. Eine quadratische Pyramide mit der Seite r werde im Abstande ϱ von der Spitze parallel zur Basis geschnitten, Fig. 179. Ein gleicher Schnitt werde in der Höhe $\triangle \varrho$ über letzterem geführt. Dann entsteht ein Körperchen mit quadratischer Basis, deren Seite ϱ ist, die Höhe desselben ist $\triangle \varrho$.

Die Summe der statischen Momente aller solchen unendlich kleinen Körperchen in bezug auf eine durch die Spitze der Pyramide parallel zur Basis liegenden Achse ist dann gleich dem statischen Momente der Pyramide selbst in bezug auf diese Achse, also

$$\Sigma[(\varrho^2 \cdot \triangle \varrho) \cdot \varrho] = r^2 \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{3}{4} r$$

$$\Sigma(\varrho^3 \cdot \triangle \varrho) = \frac{r^4}{4}$$

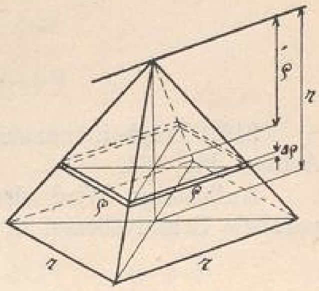

Fig. 179.

Somit wird . . . $J = \frac{2\pi l \gamma}{g} \cdot \frac{r^4}{4}$; da $M = \frac{\pi r^2 l \gamma}{g}$ die Masse des Zylinders ist, wird das gesuchte Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{2} M r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (218)$$

218. Trägheitsmoment eines Zylinders in bezug auf eine im Mittelpunkte der Höhe liegende und auf derselben senkrecht stehende Achse. Fig. 180.

Auflösung: Wird jede Zylinderhälfte durch unendlich viele, zur Basis parallele Schnitte geteilt, so entstehen dünne Scheiben vom Inhalte $\frac{\pi r^2 \cdot l}{n}$. Jede derselben kann als Kreis mit dem Trägheitsmomente

$$\frac{m}{16} d^2 = \frac{m}{4} r^2 = \frac{\pi r^2 l \gamma}{n \cdot g} \cdot \frac{r^2}{4}$$

betrachtet werden [laut (211)].

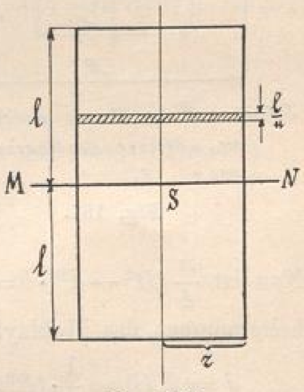

Fig. 180.

Demnach wird

$$J_s = 2\left\{\left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right] + \left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right] + \left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(\frac{2l}{n}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right] + \cdots\cdots + \left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(n \frac{l}{n}\right)^2 + \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right]\right\}$$

$$J_s = 2 \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left\{n \frac{r^2}{4} + \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2]\right\}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 \Big/_{n=\infty} = \frac{n^3}{3} \text{(s. § 27, Beisp. 112)}$$

$$J_s = \frac{2\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(n \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{n^3}{3}\right)$$

$$\text{Nun } M = \frac{\pi r^2 \cdot 2l \cdot \gamma}{g}, \text{ daher}$$

$$J_s = \frac{M}{n} \cdot \left(n \frac{r^2}{4} + \frac{l^2 n}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{J_s = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(219)}$$

219. Trägheitsmoment eines Hohlzylinders in bezug auf seine Höhe als Achse. Fig. 181.

Auflösung: Wird der Hohlzylinder durch unendlich viele, zur Basis parallele Schnittebenen in Kreisringe zerlegt, so ist laut (206) das Trägheitsmoment eines solchen

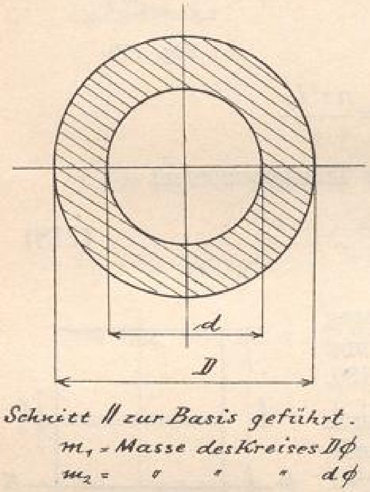

Fig. 181.

$$i = \frac{1}{8}(m_1 D^2 - m_2 d^2),$$

wenn m_1 und m_2 die Massen der ganzen und der inneren Kreisfläche bedeuten. Ist die Masse pro Flächeneinheit δ, so wird

$$i = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} D^2 \cdot \delta \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \delta \cdot d^2\right)$$

$$i = \frac{1}{8} \cdot \delta \cdot \frac{\pi}{4}(D^4 - d^4)$$

$$i = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\,\delta \cdot (D^2 + d^2)$$

$$i = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta \cdot 4\,(R^2 + r^2)$$

$$i = \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta$$

Nun ist $\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta = m$, die Masse des Kreisringes. Es wird das Trägheitsmoment des Hohlzylinders dann

$$J = \Sigma(i) = \frac{1}{2} \cdot (R^2 + r^2) \cdot \Sigma\left[\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta\right] = \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \cdot \Sigma(m)$$

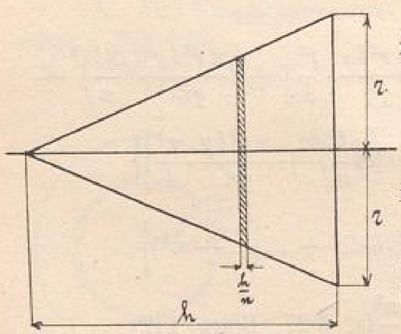

Fig. 182.

Ist M die Masse des Hohlzylinders, so ist endlich

$$\boldsymbol{J = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2)} \quad . \ \mathbf{(220)}$$

220. Trägheitsmoment eines Kreiskegels in bezug auf die Höhe als Achse. Fig. 182.

Auflösung: Der Kegel werde durch unendlich viele, zur Basis parallele Schnitte in Scheiben zerlegt. Jede solche kann als ein Kreis betrachtet werden. Die Inhalte der einzelnen Scheiben sind

$$\left(\frac{r}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}, \ \left(\frac{2r}{n}\right)^2 \pi \cdot \frac{h}{n}, \ \left(\frac{3r}{n}\right)^2 \cdot \pi \frac{h}{n}, \ \ldots \ \left(\frac{nr}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}$$

Die Trägheitsmomente derselben sind

$$\left(\frac{r}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{r}{n}\right)^2, \quad \left(\frac{2r}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2r}{n}\right)^2 \quad \ldots .$$

Demnach wird das Trägheitsmoment des ganzen Kegels

$$J = \frac{\pi r^4 h \gamma}{2 n^5 \cdot g} \cdot (1^4 + 2^4 + \ldots . + n^4)$$

Die Summe in der Klammer kann erst bestimmt werden, wenn $1^3 + 2^3 + + \ldots + n^3$ gefunden ist.

Es gilt

$$\begin{array}{lllllll}
 & (n+1)^4 = n^4 & +4n^3 & +6n^2 & +4n & +1 \\
\hline
n = 0 \ldots\ldots\ldots & 1^4 = 0 & +0 & +0 & +0 & +1 \\
n = 1 \ldots\ldots\ldots & 2^4 = 1^4 & +4 \cdot 1^3 & +6 \cdot 1^2 & +6 \cdot 1 & +1 \\
n = 2 \ldots\ldots\ldots & 3^4 = 2^4 & +4 \cdot 2^3 & +6 \cdot 2^2 & +6 \cdot 2 & +1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n \ldots (n-1) \ldots\ldots & n^4 = (n-1)^4 & +4(n-1)^3 & +6(n-1)^2 & +4(n-1) & +1 \\
n \ldots n \ldots\ldots & (n+1)^4 = n^4 & +4n^3 & +6n^2 & +4n & +1 \\
\hline
\end{array}$$

$$1^4 + \ldots . + n^4 \, (n+1)^4 = 1^4 + \ldots + n^4 + 4(1^3 + \ldots + n^3) + 6(1^2 + \ldots + n^2) + $$
$$+ 4(1 + \ldots + n) + (n+1)$$

$$(n+1)^4 = 4(1^3 + \ldots + n^3) + 6 \cdot \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + 4\frac{n}{2}(n+1) + (n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{n}{4}(n+1)(2n+1) - \frac{n}{2}(n+1) - \frac{n+1}{4}$$

$$= \frac{n+1}{4}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1)$$

$$= \frac{n+1}{4}(n^3 + n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Nun ebenso

$$\begin{array}{lllllll}
 & (n+1)^5 = n^5 & +5n^4 & +10n^3 & +10n^2 & +5n & +1 \\
\hline
n = 0 \ldots\ldots & 1^5 = 0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +1 \\
n = 1 \ldots\ldots & 2^5 = 1^5 & +5 \cdot 1^4 & +10 \cdot 1^3 & +10 \cdot 1^2 & +5 \cdot 1 & +1 \\
n = 2 \ldots\ldots & 3^5 = 2^5 & +5 \cdot 2^4 & +10 \cdot 2^3 & +10 \cdot 2^2 & +5 \cdot 2 & +1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n \ldots (n-1) \ldots & n^5 = (n-1)^5 & +5(n-1)^4 & +10(n-1)^3 & +10(n-1)^2 & +5(n-1) & +1 \\
n \ldots n \ldots & (n+1)^5 = n^5 & +5n^4 & +10n^3 & +10n^2 & +5n & +1 \\
\hline
\end{array}$$

$$1^5 + \ldots + (n+1)^5 = 1^5 + \ldots + n^5 + 5(1^4 + \ldots + n^4) + 10(1^3 + \ldots + n^3) +$$
$$+ 10(1^2 + \ldots + n^2) + 5(1 + \ldots + n) + (n+1)$$

$$(n+1)^5 = 5(1^4 + \ldots + n^4) + 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 10\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) +$$
$$+ 5\frac{n}{2}(n+1) + (n+1)$$

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{2n^2(n+1)^2}{4}-2\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-$$
$$-\frac{n}{2}(n+1)+\frac{n+1}{5}$$
$$=\frac{n+1}{30}\left[6(n+1)^4-15n^2(n+1)-10n(2n+1)-15n-6\right]$$
$$=\frac{n+1}{30}(6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-15n^2-20n^2-10n-15n-6)$$
$$=\frac{n+1}{30}(6n^4+9n^3+n^2-n)=\frac{6n^5+9n^4+n^3-n^2+6n^4+9n^3+n^2-n}{30}$$
$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

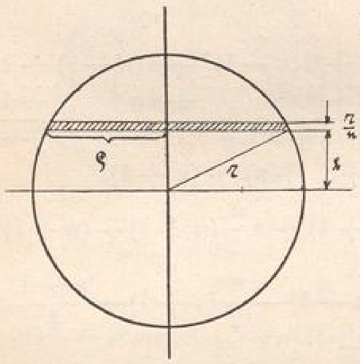

Fig. 183.

Daher wird

$$J=\frac{\pi r^4 h\gamma}{2n^5\cdot g}\cdot\left(\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\right)$$
$$=\frac{\pi r^4 h\gamma}{2g}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{30}\right)$$
$$J=\frac{\pi r^4 h\gamma}{10g} \quad \text{für } n=\infty$$
$$M=\frac{\pi r^2 h\gamma}{3g};\quad \frac{J}{M}=\frac{3}{10}r^2$$
$$\boldsymbol{J=\frac{3}{10}Mr^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(221)}$$

221. Das Trägheitsmoment einer Kugel in bezug auf eine Schwerachse zu finden. Fig. 183.

Auflösung: Jede Halbkugel werde durch unendlich viele, parallele Schnittebenen senkrecht zur Trägheitsachse in Kreisscheiben zerlegt. Das polare Trägheitsmoment einer solchen ist dann

$$\triangle J=\varrho^2\pi\cdot\frac{r}{n}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{1}{2}\varrho^2=(r^2-x^2)\cdot\pi\cdot\frac{r\gamma}{ng}\cdot\frac{1}{2}(r^2-x^2)$$

Das Trägheitsmoment der Halbkugel wird daher

$$J=\frac{\pi r\gamma}{2ng}\left\{\left[r^2-\left(\frac{r}{n}\right)^2\right]^2+\left[r^2-\left(\frac{2r}{n}\right)^2\right]^2+\left[r^2-\left(\frac{3r}{n}\right)^2\right]^2+\ldots\left[r^2-\left(\frac{nr}{n}\right)^2\right]^2\right\}$$
$$J=\frac{\pi r\gamma}{2ng}\left[nr^4-2r^2\cdot\left(\frac{r}{n}\right)^2\cdot(1^2+\ldots+n^2)+\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot(1^4+\ldots+n^4)\right]$$
$$J=\frac{\pi r\gamma}{2ng}\cdot\left[nr^4+\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\left(\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\right)-\frac{2r^4}{n^2}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right]$$
$$\underset{n=\infty}{J}=\frac{\pi r\gamma}{2g}\cdot\left[r^4+\frac{r^4}{5}-\frac{2r^4}{3}\right]=\frac{\pi r^5\gamma}{2g}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)$$
$$J=\frac{8}{15}\cdot\frac{\pi r^5\gamma}{2g}=\frac{4}{15}\frac{\pi r^5\gamma}{g}$$

Für die ganze Kugel ist daher

$$J = \frac{8}{15} \cdot \frac{\pi r^5 \gamma}{g}$$

$$M = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi r^3 \gamma}{g}$$

$$\frac{J}{M} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} r^2 = \frac{2}{5} r^2$$

$$\boldsymbol{J = \frac{2}{5} M r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(222)}$$

§ 59. Beispiele über die gleichförmig rotierende Bewegung starrer Körper um eine feste Achse.

222. Auf einer Welle mit dem Radius r sitzt eine Scheibe mit dem Radius R. Wie viele Touren macht diese Scheibe, bis die Bewegung durch den Reibungswiderstand in den Lagern der Welle aufgehoben ist, wenn im Momente der Betrachtung die Umfangsgeschwindigkeit der letzteren c beträgt und der Reibungskoeffizient φ ist? Die Wellenmasse ist nicht zu berücksichtigen.

Auflösung: Die lebendige Kraft der Scheibe ist $\frac{\omega^2}{2} \cdot J$, die Arbeit des Reibungswiderstandes an den beiden Zapfen bis zum Eintreten des Ruhezustandes $\varphi G \cdot x$, wenn bis dahin ein Punkt des Zapfenumfanges den Weg x beschreibt. Es muß demnach sein

$$\frac{\omega^2}{2} \cdot J = \varphi \cdot G \cdot x$$

$$\frac{c^2}{2 r^2} \cdot \frac{G}{2 g} R^2 = \varphi G x$$

$$\frac{c^2}{4 r^2} \cdot \frac{G}{g} \cdot R^2 = \varphi G x$$

$$x = \frac{c^2 \cdot R^2}{4 \varphi g r^2} = 2 r \pi n,$$

wenn n die verlangte Tourenzahl ist

$$n = \frac{c^2 \cdot R^2}{4 \varphi g r^2 \cdot 2 r \pi}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{c^2 \cdot R^2}{8 \varphi g \cdot \pi \cdot r^3}}$$

223. Ein starrer Körper dreht sich n mal in der Minute um eine feste Achse. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit?

Auflösung:
$$\omega = \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot n}{60}$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(223)}$$

224. Auf einer Welle sitzt eine Schnurrolle und ein Arm. Am Ende des letzteren befindet sich eine Bleikugel mit einem Halbmesser $r = 0{,}482$ m. Welche Winkelgeschwindigkeit, Tourenzahl und Umlaufzeit hat die Kugel, wenn die Schnur mit einer Kraft von 20 kg . . . 5 m abgezogen wird? Das spezifische Gewicht des Blei beträgt 11,3 kg/cdm. Fig. 184.

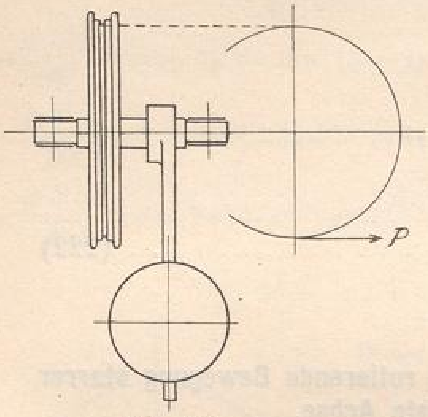

Fig. 184.

Auflösung: Der Kugel wird durch das Ziehen an der Schnur ein Arbeitsvermögen

$$L = 20 \cdot 5 = 100 \text{ kgm}$$

mitgeteilt. Daher gilt

$$100 = \frac{\omega^2}{2} \cdot J$$

$$J = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot r^2$$

$$J = \frac{8}{15} \pi \cdot \frac{11300}{9{,}81} \cdot 0{,}482^5$$

$$J \sim 50$$

$$\frac{\omega^2}{2} = 2; \qquad \omega^2 = 4$$

$$\omega = 2$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \qquad n = \frac{30}{\pi} \cdot \omega = \frac{60}{\pi}$$

$$\boldsymbol{n = 19{,}1}$$

$$\omega \cdot t = 2\pi$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ Sek.}$$

Umlaufzeit $= \pi$ Sek.

225. Ein Eisenanker, Fig. 185, hat 80 mm Durchmesser und ist 5,5 kg schwer. Die Wicklung um ihn ist 10 mm stark und 2 kg schwer. Im Momente der Stromabstellung hat der Anker $n = 1500$ Touren. Wie lange rotiert er noch, wenn der Zapfendurchmesser $d = 15$ mm und der Zapfenreibungskoeffizient $\varphi = 0{,}03$ sind? (Die Bürsten sind abgehoben.)

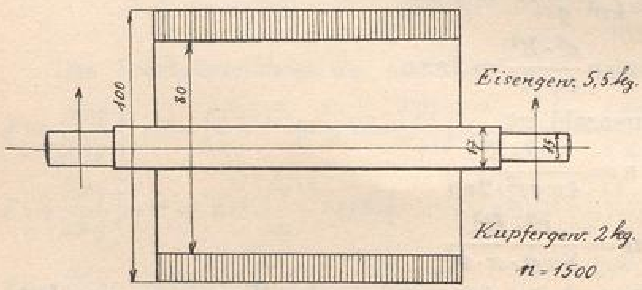

Fig. 185.

Auflösung: Die lebendige Kraft des Ankers und der Wicklung, welche als Hohlzylinder anzusehen ist, wird durch die Widerstände an dem Zapfen vernichtet. Es gilt dann

$$\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot r^2 + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{M}{2} (R^2 + r^2) = \varphi \cdot G \cdot x$$

In dieser Gleichung sind $m = \frac{5,5}{9,81}$, $M = \frac{2}{9,81}$ und x der Weg, welchen ein Punkt eines Zapfenumfangs beschreibt, bis Ruhe eintritt.

Es folgt dann weiter

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \cdot \left[\frac{5,5}{2 \cdot 9,81} \cdot 0,04^2 + \frac{2}{2 \cdot 9,81} \cdot (0,05^2 + 0,04^2)\right] = 0,03 \cdot 7,5 \cdot x$$

$$x = \frac{\pi^2 \cdot 1500^2 \cdot \left[\frac{5,5}{2 \cdot 9,81} \cdot 0,0016 + \frac{1}{9,81} \cdot 0,0041\right]}{2 \cdot 900 \cdot 0,03 \cdot 7,5}$$

π^2 kann gegen 9,81 gekürzt werden, so daß sich ergibt

$$x = \frac{1500^2 \cdot [5,5 \cdot 0,0016 + 2 \cdot 0,0041]}{4 \cdot 900 \cdot 0,03 \cdot 7,5}$$

$$x = \frac{22\,500 \cdot 0,017}{36 \cdot 0,03 \cdot 7,5}$$

$$x \sim 47 \text{ m}$$

47 m ist der Weg einer gleichförmig verzögerten Bewegung

$$47 = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{c}{2} \cdot t$$

$$47 = 0,5 \cdot \frac{0,015 \cdot \pi \cdot 1500}{60} \cdot t = 0,59\, t$$

$$\boldsymbol{t \sim 80 \text{ Sek.} \sim 1 \text{ Min. } 20 \text{ Sek.}}$$

§ 60. Beispiele über die beschleunigt rotierende Bewegung starrer Körper.

226. Ein horizontal und zentrisch gelagerter, voller, homogener Zylinder mit $r = 40$ cm Durchmesser und $G = 2000$ kg Gewicht wird durch eine Umfangskraft $P = 50$ kg angetrieben. Wie lange dauert es, bis er $n = 120$ Touren macht? $g \sim 10$ m.

α) Ohne Rücksicht auf die Zapfenreibung.

β) Mit Rücksicht auf dieselbe. — Zapfenreibungskoeffizient $\varphi = 0,1$. — Zapfendurchmesser $d = 60$ mm.

Auflösung ad a): $D = \varepsilon \cdot J$

$$\varepsilon = \frac{50 \cdot 0,2}{\frac{2000}{10 \cdot 2} \cdot 0,04} = \frac{10}{4} = 2,5$$

Die Bahnbeschleunigung ist $p = r \cdot \varepsilon = 0,2 \cdot 2,5 = 0,5$

Dann $v = \frac{2 r \pi n}{60} = \frac{0,4 \pi n}{60} = \frac{0,4 \pi \cdot 120}{60}$

$$v \sim 2,5 \text{ m}$$

$$2,5 = p \cdot t$$

$$t = \frac{2,5}{0,5}$$

$$\boldsymbol{t \sim 5 \text{ Sek.}}$$

ad b): $D = 50 \cdot 0{,}2 - \varphi \cdot 2000 \cdot 0{,}03 = 4$

$$\varepsilon = \frac{4}{\frac{2000}{2 \cdot 10} \cdot 0{,}04} = \frac{4}{4} = 1$$

$$p = r \cdot \varepsilon = 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2$$

$$v = \frac{2\,r\,\pi\,n}{60} \sim 2{,}5 \text{ m}$$

$$2{,}5 = p \cdot t$$

$$t = \frac{2{,}5}{0{,}2}$$

$$\boldsymbol{t \sim 12{,}5} \textbf{ Sek.}$$

227. Um einen Kreiszylinder vom Halbmesser r, der sich um eine horizontale Achse reibungsfrei drehen kann, ist ein Faden geschlungen, der an seinem freien Ende ein Gewicht $G = mg$ trägt. Welche Fadenspannung, Winkelbeschleunigung entstehen, welche Endgeschwindigkeit hat das Gewicht, wenn es die Höhe h gefallen ist, und welche Zeit ist hierzu nötig? Der Zylinder habe das Trägheitsmoment J. — Fig. 186.

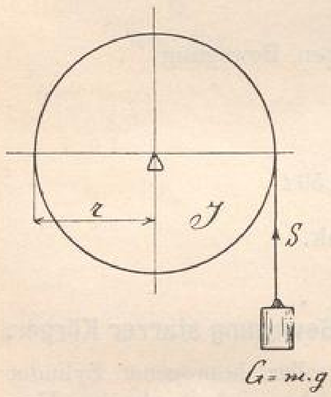

Fig. 186.

Auflösung: Das Gewicht G ruft im Faden die Spannung S hervor. Letztere bewirkt, da sie konstant ist, eine gleichförmig beschleunigte, rotierende Bewegung des Zylinders. Die Winkelbeschleunigung desselben ε wird daher aus

$$S \cdot r = \varepsilon \cdot J$$

$$\varepsilon = \frac{S \cdot r}{J}$$

Die Kraft $(G - S)$ beschleunigt die Masse m, so daß deren Beschleunigung

$$p = \frac{G - S}{m} = r \cdot \varepsilon$$

wird. Somit ist

$$\varepsilon = \frac{G - S}{m\,r} = \frac{S \cdot r}{J}$$

$$(G - S) \cdot J = m\,S \cdot r^2$$

$$G \cdot J - S \cdot J = m\,S \cdot r^2$$

$$S\,(m\,r^2 + J) = G \cdot J$$

$$\boldsymbol{S = \frac{G \cdot J}{m\,r^2 + J}}$$

$$\varepsilon = \frac{S \cdot r}{J} = \frac{G \cdot J}{m\,r^2 + J} \cdot \frac{r}{J}, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{G \cdot r}{m\,r^2 + J}}$$

Laut Satz von der Energie in § 49 ist weiter

$$A = G \cdot h = J \frac{\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$G \cdot h = J \frac{v^2}{2 r^2} + m \frac{v^2}{2}$$

$$G \cdot h = \frac{v^2}{2 r^2} (J + m r^2)$$

$$\boldsymbol{v = r \cdot \sqrt{\frac{2 G h}{J + m r^2}}}$$

$$p = r \cdot \varepsilon = r \cdot \frac{G \cdot r}{m r^2 + J} = \frac{G \cdot r^2}{J + m r^2} \quad \text{und} \quad v = p \cdot t$$

$$t = \frac{v}{p} = \frac{r \cdot \sqrt{\frac{2 G \cdot h}{J + m r^2}}}{\frac{G \cdot r^2}{J + m r^2}}$$

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{2 G \cdot h (J + m r^2)}}{G \cdot r^2}$$

$$t = \frac{\sqrt{2 G h (J + m r^2)}}{G \cdot r}$$

$$\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2 h (J + m r^2)}{G \cdot r}}}$$

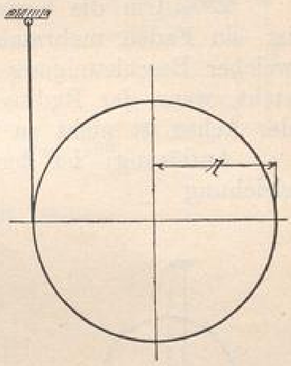

Fig. 187.

228. Wie groß müßte G sein, damit die Fallbeschleunigung $p = \frac{g}{2}$ werde?

Auflösung:

$$p = \frac{G \cdot r^2}{J + m r^2} = \frac{G \cdot r^2}{J + \frac{G}{g} \cdot r^2} = \frac{g}{2}$$

$$2 G \cdot r^2 = J \cdot g + \frac{G}{g} r^2 \cdot g$$

$$G r^2 = J g$$

$$\boldsymbol{G = \frac{J \cdot g}{r^2}}$$

229. Um einen Zylinder ist ein Faden mehrmals gewickelt und dessen freies Ende aufgehängt. Mit welcher Beschleunigung fällt der Zylinder und wie groß ist die Spannung im Faden? Fig. 187.

Auflösung: Die Energie des Zylinders nach Fallen um die Höhe h ist

$$m g h = \frac{m v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4} m v^2$$

$$m g h = \frac{3}{4} m v^2$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2}{3} g\right) h}}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{2}{3} g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(224)}$$

d. h. der Zylinder fällt mit einer Beschleunigung, welche gleich $^2/_3$ der Erdbeschleunigung ist. Ursache dafür ist der Drehungszwang des Zylinders.

$$\text{Nun ist} \quad \varepsilon = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} = \frac{M}{J} = \frac{S \cdot r}{\frac{m r^2}{2}}$$

$$\text{woraus } S = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} \cdot \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \text{ folgt.}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{G}{3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (225)$$

d. h. die Fadenspannung ist gleich dem dritten Teil des Zylindergewichtes.

230. Um die horizontale Achse eines Zylinders mit dem Gewichte $G\,kg$ ist ein Faden mehrmals gewickelt und dessen freies Ende aufgehängt. Mit welcher Beschleunigung p fällt der Zylinder und welche Fadenspannung entsteht, wenn der Radius der Achse ϱ und der des Zylinders r ist? Die Masse der Achse ist nicht zu berücksichtigen. — Fig. 188.

Auflösung: Ist der Zylinder die Höhe h gefallen, so lautet die Arbeitsgleichung

$$G \cdot h = \frac{m v^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cdot J$$

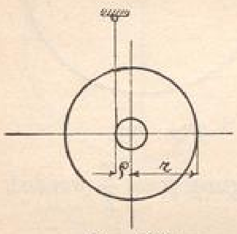

Fig. 188.

$$G \cdot h = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{\varrho^2} \cdot \frac{G}{2g} r^2$$

$$g h = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{v^2}{\varrho^2} \cdot r^2 = v^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2}{\varrho^2}\right)$$

$$g h = v^2 \frac{r^2 + 2\varrho^2}{4\varrho^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{4\varrho^2 \cdot g h}{r^2 + 2\varrho^2}}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2\left(\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2} g\right) h}}$$

Die Beschleunigung, mit welcher der Zylinder fällt, wird also

$$\boldsymbol{p = \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2} \cdot g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (226)$$

Wäre z. B. $r = 4\varrho$, so würde folgen $p = \frac{2\varrho^2}{18\varrho^2} \cdot g = \frac{1}{9} g$; der Zylinder würde dann neunmal so langsam fallen, als wenn er frei fiele.

Die Winkelbeschleunigung des Zylinders wird dann

$$\varepsilon = \frac{p}{\varrho} = \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2} \cdot g = \frac{D}{J}$$

$$\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2} \cdot g = \frac{S \cdot \varrho}{\frac{m r^2}{2}}$$

$$S = \frac{m r^2 \cdot \varrho}{r^2 + 2\varrho^2} \cdot g$$

Da $mg = G$ ist, wird somit

$$S = G \cdot \frac{r^2}{r^2 + 2\varrho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (227)$$

Für $r = 4\varrho$ wird $S = \frac{8}{9} G$, d. h. größer als im vorigen Falle.

231. Um einen Zylinder ist ein Faden gewickelt und dessen ablaufendes Ende am höchsten Punkte einer h Meter hohen und mit dem Horizonte den Winkel α bildenden schiefen Ebene befestigt. Mit welcher Beschleunigung rollt der Zylinder die schiefe Ebene herunter und wie groß ist die entstehende Fadenspannung? Fig. 189.

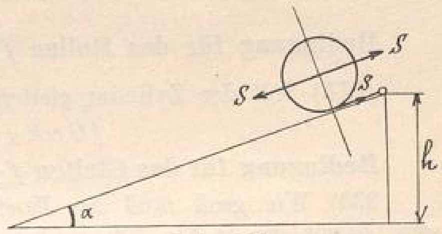

Fig. 189.

Auflösung: Man denke sich im Zylindermittel zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte S angebracht. Die nach abwärts wirkende gibt mit der Fadenspannung S das den Zylinder nach abwärts rollende Kräftepaar, die nach aufwärts wirkende verringert die Wirkung von $G \sin \alpha$. — Laut Beschleunigungsgesetz gilt dann

$$G \sin \alpha - S = \frac{G}{g} \cdot r\,\varepsilon,$$

$$\text{hierzu } S \cdot r = \varepsilon \cdot J$$

Aus letzterer Gleichung ergibt sich

$$S = \frac{\varepsilon \cdot J}{r}$$

Wird dieser Wert in die obere Gleichung substituiert, so erhält man

$$G \sin \alpha - \frac{\varepsilon \cdot J}{r} = \frac{G}{g} \cdot r\,\varepsilon$$

$$G \sin \alpha = \varepsilon \left(\frac{G}{g} \cdot r + \frac{J}{r} \right)$$

$$G \sin \alpha = \varepsilon \cdot G \left(\frac{r}{g} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} r^2 \right)$$

$$\sin \alpha = \varepsilon \left(\frac{r}{g} + \frac{r}{2g} \right)$$

$$g \sin \alpha = \varepsilon \cdot \frac{3}{2} r$$

$$r \cdot \varepsilon = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

$$\boldsymbol{p = \frac{2}{3} g \sin \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (228)$$

$$S = \frac{\frac{2}{3} g \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} r^2}{r^2}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{G}{3} \sin \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (229)$$

232. Wie lauten die Bedingungen dafür, daß ein Zylinder von einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene a) herunterrolle, b) heruntergleite, wenn der Koeffizient der gleitenden Reibung f ist?

Auflösungen: *Ad a)* Genau so wie in der vorhergehenden Aufgabe die Fadenspannung S die drehende Bewegung des Zylinders zustande gebracht hat, wird hier das Rollen desselben durch die Reibung zwischen ihm und der schiefen Ebene bewirkt, wenn die Beziehung besteht,

$$f\, G \cos\alpha \geqq \frac{G}{3} \sin\alpha$$

Bedingung für das Rollen $f \geqq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha$ . . . . **(230)**

Ad b) Soll der Zylinder gleiten, so muß die Beziehung lauten

$$f\, G \cos\alpha \leqq G \sin\alpha$$

Bedingung für das Gleiten $f \leqq \operatorname{tg} \alpha$ . . . . **(230 a)**

233) Wie groß muß der Koeffizient der gleitenden Reibung mindestens sein, damit der in Fig. 190 gezeichnete Zylinder mit seinen beiden Endzapfen auf 2 unter Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebenen herabrolle?

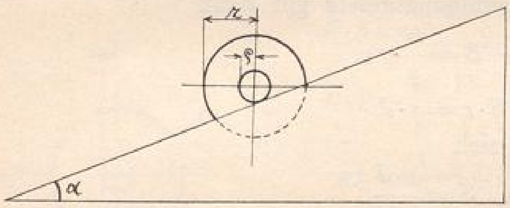

Fig. 190.

Auflösung: Man denke sich um die Zapfen je einen Faden gewickelt und deren freie Enden befestigt. Die in beiden letzteren entstehenden Spannungen seien zusammen S. — Dann gelten wieder die Gleichungen

$$G \cdot \sin\alpha - S = \frac{G}{g} \cdot \varrho\, \varepsilon$$

$$\text{und } S \cdot \varrho = \varepsilon \cdot J$$

Es handelt sich um die Bestimmung von S.

$$\varepsilon = \frac{S \cdot \varrho}{J}$$

$$G \cdot \sin\alpha - S = \frac{G}{g} \cdot \varrho \cdot \frac{S \cdot \varrho}{J}$$

$$G \cdot \sin\alpha - S = \frac{G}{g} \cdot \varrho^2 \cdot \frac{S}{\frac{G}{2g} \cdot r^2}$$

$$G \sin\alpha = S + S \cdot \frac{2\varrho^2}{r^2} = S\left(1 + \frac{2\varrho^2}{r^2}\right)$$

$$G \sin\alpha = S \cdot \frac{r^2 + 2\varrho^2}{r^2}$$

$$S = \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{r^2 + 2\varrho^2} \cdot G$$

Die Bedingung für das Rollen ist nun

$$\frac{r^2 \sin\alpha}{r^2 + 2\varrho^2} \cdot G \geqq f \cdot G \cos\alpha$$

$$f \leqq \frac{r^2}{r^2 + 2\varrho^2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

234. Mit welcher Beschleunigung rollt eine Kugel unter dem Einfluß der Reibung von einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene herunter und unter welcher Bedingung findet dies statt?

Auflösung: Die Reibung kann wieder ersetzt werden durch die Fadenspannung S, so daß sich die Gleichungen schreiben lassen,

$$G \sin \alpha - S = \frac{G}{g} \cdot r \varepsilon$$

$$S \cdot r = \varepsilon \cdot J$$

$$S = \frac{\varepsilon \cdot J}{r}$$

$$G \sin \alpha - \frac{\varepsilon \cdot J}{r} = \frac{G}{g} \cdot r \varepsilon$$

$$G \sin \alpha - \frac{\varepsilon}{r} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{G}{g} \cdot r^2 = \frac{G}{g} r \varepsilon$$

$$g \sin \alpha = \frac{2}{5} r \varepsilon + r \varepsilon = \frac{14}{10} r \varepsilon = \frac{7}{5} r \varepsilon$$

$$p = r \varepsilon = \frac{5}{7} g \sin \alpha \quad \text{(231)}$$

Die Fadenspannung muß ebenfalls gesucht werden, da ihre Größe zur Beantwortung der andern Frage nötig ist.

$$S = \frac{\varepsilon \cdot J}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{g \sin \alpha}{r} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{G}{g} r^2$$

$$S = \frac{2}{7} G \sin \alpha \quad \text{(232)}$$

Die Bedingung dafür, daß ein Rollen der Kugel stattfinde, ist daher

$$\frac{2}{7} G \sin \alpha = f \cdot G \cos \alpha,$$

woraus sich ergibt

$$f = \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha \quad \text{(233)}$$

Auf Grund der in diesem § gezeigten Beispiele können nun schwierigere Aufgaben über gleichzeitig erfolgende gleitende und rollende Bewegung einfacher und zusammengesetzter Körper leicht durchgeführt werden.

§ 61. Bewegung eines physischen Pendels.

Jeder um eine feste Achse schwingender Körper heißt ein **physisches oder zusammengesetztes Pendel**, Fig. 191.

Das Moment des Pendelgewichtes Mg in bezug auf seinen Drehpunkt O ist

$$Mg \cdot s \cdot \sin \delta,$$

wenn s die Entfernung des Schwerpunktes vom Aufhängepunkte und δ die jeweilige Elongation bedeuten.

Die Winkelbeschleunigung eines rotierenden Körpers ist nun laut (177) das Verhältnis aus Drehmoment und dessen Trägheitsmoment, also hier beim physischen Pendel

$$\varepsilon_1 = \frac{M g s \cdot \sin \delta}{J_o}$$

Ein mathematisches Pendel mit der Länge $\overline{OK} = l$ schwinge ebenfalls um O; seine Winkelbeschleunigung ist

$$\varepsilon_2 = \frac{mg \cdot l \cdot \sin \delta}{ml^2}$$

Soll nun das physische Pendel genau so schwingen wie das mathematische, dann muß sein

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \text{ oder}$$

$$\frac{Mg \cdot s \cdot \sin \delta}{J_o} = \frac{mgl \cdot \sin \delta}{ml^2}, \text{ d. h.}$$

$$l = \frac{J_o}{Ms} = \frac{\textbf{Trägheitsmoment}}{\textbf{Statisches Moment}} \quad \ldots \quad \mathbf{(234)}$$

„Jene Länge eines physischen Pendels, bei welcher dasselbe dieselbe Schwingungsdauer besitzt wie ein mathematisches, heißt **reduzierte Länge des physischen Pendels.**“

Hier ist also l die reduzierte Länge. —

„Jener Punkt eines physischen Pendels, welcher um die reduzierte Pendel-

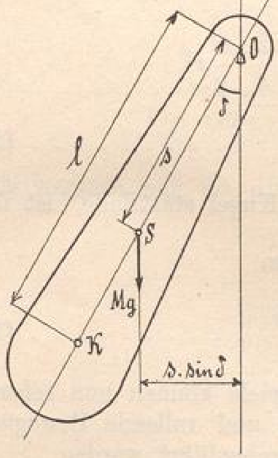

Fig. 191.

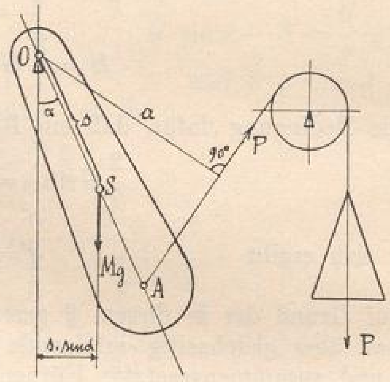

Fig. 192.

länge von der Schwingungsachse absteht, heißt der **Schwingungsmittelpunkt des physischen Pendels.**“

Somit wird die **Schwingungsdauer eines physischen Pendels**

$$t = \pi \sqrt{\frac{J_o}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{\textbf{Reduzierte Länge}}{g}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(235)}$$

Mittels letzterer Gleichung kann man das Trägheitsmoment von Körpern experimentell wie folgt ermitteln.

Man bringe die Schwingungsachse O an, Fig. 192, und befestige in irgend einem Punkte A des Körpers einen Faden. Der letztere wird nun über eine

Rolle geführt und an seinem freien Ende eine Wagschale angehängt. Wird in diese ein Gewicht P gelegt, so stellt sich die Achse des Körpers unter Winkel α gegen die Vertikale ein, und es folgt

$$G \cdot s \cdot \sin\alpha = P \cdot a$$

$$G \cdot s = \frac{P \cdot a}{\sin\alpha}$$

Das statische Moment des Körpers ist also bestimmt. Selbstredend muß die Lage des Schwerpunktes des letzteren gegeben sein.

Da $\quad t^2 = \pi^2 \cdot \frac{J_o}{Mgs}$ ist, wird

$$J_o = \frac{t^2}{\pi^2} \cdot Mgs \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{J_o = \frac{t^2}{\pi^2} \cdot \frac{P \cdot a}{\sin\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(236)}$$

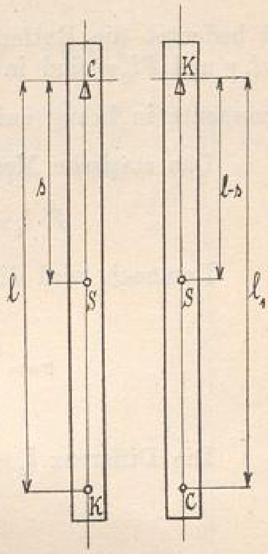

Fig. 193.

In Fig. 193 ist ein physisches Pendel mit dem Aufhängepunkt C und dem Schwingungsmittelpunkt K dargestellt. Dann gilt

$$l = \frac{J_C}{M \cdot s} = \frac{J_S + M s^2}{M \cdot s} = \frac{J_S}{M \cdot s} + s$$

Wird nun das Pendel in K aufgehängt, so werden $\overline{KS} = (l - s)$ und das statische Moment $M\,(l - s)$. Die reduzierte Pendellänge ergibt sich jetzt mit

$$l_1 = \frac{J_K}{M\,(l-s)} = \frac{J_S + M\,(l-s)^2}{M\,(l-s)} = \frac{J_S}{M\,(l-s)} + (l-s)$$

Aus obiger Beziehung für l folgt

$$l - s = \frac{J_S}{M \cdot s}, \text{ daher wird}$$

$$l_1 = \frac{J_S + M \cdot \left(\frac{J_S}{M \cdot s}\right)^2}{M \cdot \frac{J_S}{M \cdot s}} = s + \frac{J_S}{M \cdot s}, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{l_1 = l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(237)}$$

Die reduzierte Pendellänge ist dieselbe wie früher, also schwingt das Pendel in beiden Fällen gleich.

„Ein Pendel, bei welchem man Schwingungsmittelpunkt und Aufhängepunkt vertauschen kann, ohne daß sich die Schwingungsdauer ändert, heißt ein **Reversionspendel.**“

Fig. 194.

Beispiele.

235. Wo ist die Schwingungsachse eines 0,3 m langen, homogenen, prismatischen Stabes mit dem Querschnitte F anzubringen, damit seine Schwingungszeit eine halbe Sekunde betrage? Fig. 194.

Auflösung: Die Schwingungsachse sei C und der Stab hat dann in bezug auf C das Trägheitsmoment

$$Mk^2 = \frac{1}{3}(Fl_1\gamma)\cdot l_1{}^2 + \frac{1}{3}(Fl_2\gamma)\,l_2{}^2 = \frac{1}{3}F\gamma\,(l_1{}^3 + l_2{}^3)$$

k bedeutet die Entfernung des Schwerpunktes des Stabes von C; die Massen $kl_1\gamma$ und $Fl_2\gamma$ sind in A und B konzentriert gedacht, so daß ihre Trägheitsmomente in bezug auf $C \ldots \frac{1}{3}F\cdot l_1\gamma\cdot l_1{}^2$ und $\frac{1}{3}F\cdot l_2\gamma\cdot l_2{}^2$ werden.

Das statische Moment des Stabes ist

$$F\cdot l_1\gamma\cdot\frac{l_1}{2} - F\cdot l_2\cdot\gamma\cdot\frac{l_2}{2} = \frac{1}{2}F\cdot\gamma\,(l_1{}^2 - l_2{}^2)$$

Demnach wird die reduzierte Pendellänge

$$r = \frac{\frac{1}{3}\cdot F\gamma\,(l_1{}^3 + l_2{}^3)}{\frac{1}{2}F\gamma\,(l_1{}^2 - l_2{}^2)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{l_1{}^2 - l_1 l_2 + l_2{}^2}{l_1 - l_2}$$

Die Differenz $l_1 - l_2$ sei gleich d.

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= l \\ l_1 - l_2 &= d \\ \hline l_1 &= \frac{l+d}{2} \\ l_2 &= \frac{l-d}{2} \end{aligned}$$

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{l+d}{2}\right)^2 - \frac{l^2-d^2}{4} + \left(\frac{l-d}{2}\right)^2}{d} = \frac{2}{3}\cdot\frac{l^2 + 2ld + d^2 - l^2 + d^2 + l^2 - 2ld + d^2}{4d}$$

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{l^2 + 3d^2}{4d}$$

$$r = \frac{l^2 + 3d^2}{6d}$$

$$\frac{1}{2} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$\frac{1}{4} = \pi^2\frac{r}{g}$$

$$r = \frac{1}{4}\cdot\frac{g}{\pi^2} = 0{,}248 \text{ m}$$

$$0{,}248 = \frac{l^2 + 3d^2}{6d}$$

$$0{,}248 = \frac{0{,}09 + 3d^2}{6d}; \qquad 1{,}488d = 0{,}09 + 3d^2$$

$$d^2 - 0{,}496d + 0{,}03 = 0$$

$$d = 0{,}248 \pm \sqrt{0{,}248^2 - 0{,}03}$$

$$d = 0{,}248 \pm 0{,}177$$

Das Pluszeichen hat keinen Sinn, denn es würde $d > l$ sein; daher brauchbare Lösung $d = 0{,}071$ m

$$l_1 = \frac{l+d}{2} = \frac{0{,}03 + 0{,}071}{2} = \frac{0{,}371}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{l_1 = 0{,}186 \text{ m}}$$

$$l_2 = \frac{l-d}{2} = \frac{0{,}03 - 0{,}071}{2} = \frac{0{,}229}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{l_2 = 0{,}114 \text{ m}}$$

236. An einer $l = 0{,}4$ m langen und $G = 0{,}05$ kg schweren Stange ist eine Kugel mit dem Radius $r_1 = 0{,}04$ m und einem Gewichte $K = 2$ kg befestigt. Wie groß ist die Schwingungsdauer dieses Pendels, wenn es um das freie Ende der Stange schwingt? Fig. 195.

Auflösung:

$$r = \frac{\frac{1}{3} G l^2 + K\left[\frac{2}{5} r_1^2 + (l + r_1)^2\right]}{\frac{1}{2} G l + K (l + r_1)}$$

$$r = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}16 + 2\left[0{,}44^2 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}04^2\right]}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}44}$$

$$r = 0{,}4394 \text{ m}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$t = 1{,}003 \cdot \sqrt{0{,}4394}$$

$$\mathbf{t = 0{,}665 \text{ Sek.}}$$

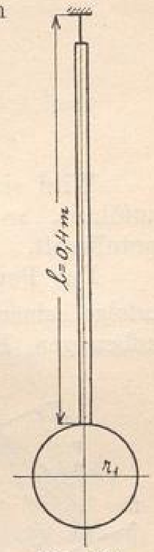

Fig. 195.

237. Wie groß ist die Schwingungsdauer einer rechteckigen Scheibe $a'b'c'd'$ mit der Höhe $\overline{a'b'}$ und Breite $\overline{a'c'}$, ferner der Masse m, wenn der Drehpunkt im Mittel der Seite $\overline{a'c'}$ liegt? Fig. 196.

Auflösung:

$$J_1 = \frac{m}{12} b^2, \quad J_2 = \frac{m}{12} h^2$$

$$J_p = \frac{m}{12} d^2$$

$$J = J_p + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{m}{12} d^2 + m\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Statisches Moment}}$$

$$r = \frac{\frac{m}{12} d^2 + m \frac{h^2}{4}}{m \cdot \frac{h}{2}} = \frac{m d^2 + 3 m h^2}{6 m h}$$

$$r = \frac{d^2 + 3 h^2}{6 h}$$

$$\mathbf{t = \pi \sqrt{\frac{d^2 + 3 h^2}{6 g h}}}$$

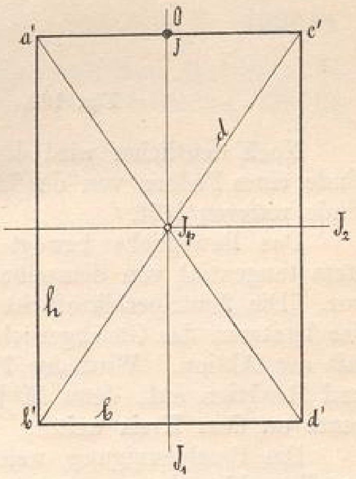

Fig. 196.

238. Durch eine Kugel mit dem Radius ϱ ist in der Entfernung d vom Mittelpunkt eine Achse gesteckt. Wie groß ist die Schwingungsdauer dieser Kugel?

Auflösung:

$$t = \pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} m \varrho^2 + m d^2}{m g d}}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{d^2 + \frac{2}{5} \varrho^2}{g d}}$$

§ 62. Zentrifugalkraft.

Wird ein Körper gezwungen, eine gleichförmige Bewegung im Kreise auszuführen, so ist dieselbe die Wirkung einer Kraft, der sogenannten **Zentripetalkraft.**

Das Bewegliche M hat das Bestreben, sich im Momente der Betrachtung infolge seiner Trägheit mit der Geschwindigkeit v in der Richtung $\overline{ME}$ fortzubewegen, Fig. 197, wird aber durch die Kraft C nach innen gezogen.

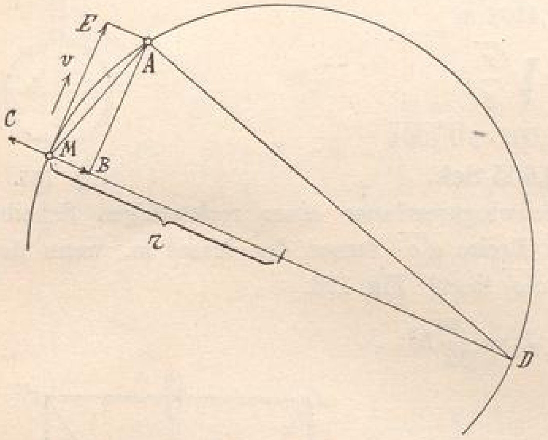

Fig. 197.

„Die Bewegung MA im Kreise kann also als Resultierende der Seitenbewegungen $\overline{ME}$ und $\overline{MB}$ aufgefaßt werden.“

„Soll aber Gleichgewicht bestehen, so muß der nach innen gerichteten Kraft C eine entgegengesetzt gleichgroße C nach außen entgegenwirken. Letztere heißt **Flieh- oder Zentrifugalkraft.**“

„Die Zentripetalkraft bringt die Ablenkung des Beweglichen von der Geraden, die Zentrifugalkraft den Gleichgewichtszustand des Beweglichen hervor.“

Noch deutlicher wird die Erklärung, wenn man das Bewegliche an das Ende eines Fadens von der Länge r anbringt und dasselbe um dessen anderes Ende rotieren läßt.

Das Bewegliche bewegt sich nun zwangsweise im Kreise, möchte sich stets tangential von demselben entfernen und bringt die Fadenspannung hervor. Die Zentripetalkraft ist also eine Aktion. Die Zentrifugalkraft, welche der letzteren das Gleichgewicht hält, ist eine Reaktion, denn sie verschwindet mit der Aktion. Wird der Faden irgendwo durchschnitten, so hören Aktion und Reaktion auf, denn M bewegt sich vermöge der Trägheit in der Tangente an dem Kreis weiter.

Die Beschleunigung, welche C dem Beweglichen erteilt, wird p, **Zentripetalbeschleunigung,** genannt.

In der unendlich kleinen Zeit τ wird der Weg von M nach innen

$$\overline{MB} = \frac{p}{2}\tau^2$$

Der Weg $\overline{ME}$ in der Zeit τ ist

$$\overline{ME} = v \cdot \tau$$

Statt des Bogens MA kann die Sehne $\overline{MA}$ gesetzt werden, und man erhält

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BA}^2$$

$$\overline{MA}^2 = \left(\frac{p}{2}\tau^2\right)^2 + (v \cdot \tau)^2$$

$\overline{MA}$ ist die Seite des rechtwinkligen Dreieckes MAD, so daß folgt

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MD}, \text{ somit}$$

$$\left(\frac{p}{2}\tau^2\right)^2 + (v \cdot \tau)^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$$

$$\frac{p^2}{4}\tau^4 + v^2 \cdot \tau^2 = \frac{p}{2}\tau^2 \cdot 2r$$

Da τ unendlich klein ist, kann das Glied $\frac{p^2}{4} \cdot \tau^4$ vernachlässigt werden und ergibt sich

$$v^2 \cdot \tau^2 = p \cdot \tau^2 \cdot r \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{v^2}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(238)}$$

„Die Größe der Zentrifugalbeschleunigung ist also das Verhältnis aus dem Quadrate der Geschwindigkeit im Kreise und dem Radius desselben."

Die Zentripetal-, bzw. Zentrifugalkraft, selbst wird

$$\boldsymbol{C = \frac{mv^2}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(239\,a)}$$

Da $v = r\omega$ ist, läßt sich auch schreiben

$$\boldsymbol{C = mr\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(239\,b)}$$

„Die Größe der Fliehkraft ist direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit im Kreise und direkt proportional der Entfernung des Beweglichen vom Zentrum."

Wird die Umlaufszeit T eingeführt, so ist wegen

$$v \cdot T = 2r\pi$$

$$v = \frac{2r\pi}{T} \text{ und}$$

$$C = \frac{m \cdot \frac{4r^2\pi^2}{T^2}}{r} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{C = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(239\,c)}$$

Beispiele.

239. Welche Geschwindigkeit muß ein 6 kg schwerer Körper besitzen, damit er von einer ihn anziehenden Kraft $P = 30$ kg den Abstand $r = 2$ m behält?

Auflösung: $$P = M \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{30 \cdot 9{,}81 \cdot 2}{6}} = \sqrt{98{,}1}$$

$$\boldsymbol{v = 9{,}91} \textbf{ m}$$

240. Wie groß muß laut Fig. 198 der Achsabstand x sein, damit die Drehungsachse nicht beansprucht werde?

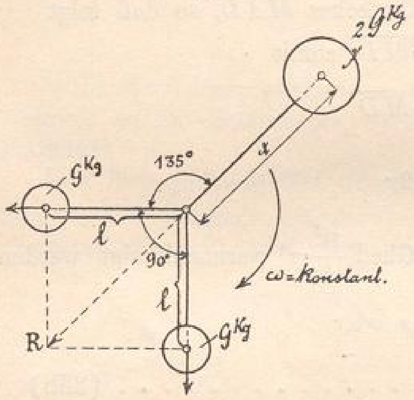

Fig. 198.

Auflösung: Die Resultierende der Zentrifugalkräfte der Kugeln im Achsabstande l muß gleich sein der Zentrifugalkraft im Achsabstande x.

$$\sqrt{\left(\frac{G}{g} l \omega^2\right)^2 + \left(\frac{G}{g} l \omega^2\right)^2} = \frac{2G}{g} \cdot x \cdot \omega^2$$

$$\frac{G}{g} l \omega^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{2G}{g} x \omega^2$$

$$l\sqrt{2} = 2x$$

$$x = \frac{l}{2}\sqrt{2}$$

241. Wie groß muß die Neigung eines Reiters in einer kreisförmigen Reitbahn von 10 m Durchmesser bei einer Geschwindigkeit von $v = 4$ m sein?

Auflösung: Die Resultierende aus dem Gewichte des Reiters und aus der Fliehkraft muß in die Achsrichtung des Reiters fallen. Heißt der Winkel, den Reitergewicht und Resultierende bilden, α, dann ergibt sich

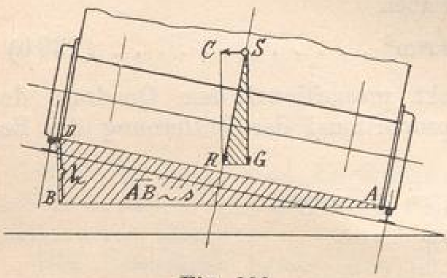

Fig. 199.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C}{G} = \frac{M \cdot \frac{v^2}{r}}{G} = \frac{M v^2}{r \cdot M g}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{g r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{9{,}81 \cdot 5} = 0{,}326$$

$$\boldsymbol{\alpha \sim 18^0}$$

242. Um wieviel muß in der Krümmung mit dem Radius r die äußere Schiene eines Geleises über die innere erhöht werden, wenn an dieser Stelle höchstens mit der Geschwindigkeit v m/sek. gefahren werden darf und auf keinerlei Widerstände Rücksicht genommen wird? Fig. 199.

Auflösung: Das Gewicht des Wagens und die nach außen gerichtete Fliehkraft setzen sich zu einer Resultierenden R zusammen, welche senkrecht zur Tangentialebene an die Schienenköpfe liegen muß. Aus der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke ergibt sich, da statt der Spurweite $\overline{AD}$ annähernd deren Horizontalprojektion $\overline{AB}$ gesetzt werden kann,

$$h : s = C : G$$

$$h : s = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} : G$$

$$\boldsymbol{h = \frac{v^2 \cdot s}{g\,r}}$$

243. Um wievielmal müßte sich die Erde schneller drehen, damit ihre Anziehungskraft am Äquator durch die Fliehkraft aufgehoben werde? Erdradius $r = 6\,370\,000$ m, Umlaufszeit der Erde $23^h\ 56'\ 4'' = 86\,154''$.

Auflösung: Die gesuchte Geschwindigkeit heiße v_1. — Dann gilt

$$\frac{m\,v_1^{\,2}}{r} = G$$

$$v_1^{\,2} = g\,r$$

$$v_1 = \sqrt{g\,r}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit am Äquator ist

$$v = \frac{2\,r\,\pi}{86\,154}$$

Demnach wird $\dfrac{v_1}{v} = \dfrac{g\,r}{\dfrac{2\,r\,\pi}{86\,154}} = \dfrac{86\,154}{2\,\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{g}{r}}$

$$\sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{6\,370\,000}} = \sqrt{0{,}000\,001\,54}$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{86\,154}{2\,\pi} \cdot 0{,}001\,24$$

$$\boldsymbol{v_1 \sim 17\,v},$$

d. h. die Erde müßte sich 17mal schneller drehen.

244. Wie groß sind Umfangsgeschwindigkeit v und Umlaufszeit t des in Fig. 200 gezeichneten **Kegel- oder Zentrifugalpendels** mit der Länge l (l beschreibt einen Kegelmantel), wenn seine Elongation α ist? Wie groß ist ferner die Tourenzahl des Kegelpendels?

Auflösung: Das Gewicht G zerlegt sich in 2 Komponenten; die eine $\overline{SB}$ spannt den Faden, die andere $\overline{SA} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha$ hält der Fliehkraft C das Gleichgewicht. Die Bedingung für letzteres lautet daher

$$G \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{g\,r \cdot \operatorname{tg} \alpha}} \quad . \; . \; . \; \textbf{(240)}$$

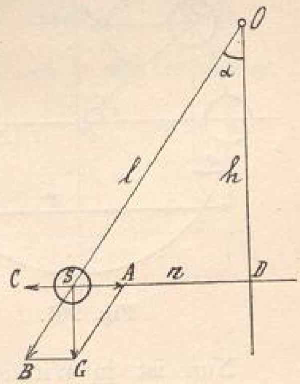

Fig. 200.

r kann ausgedrückt werden durch $l \cdot \sin\alpha$

$$2 r \pi = \sqrt{g r \operatorname{tg} \alpha} \cdot t$$

$$t = \frac{2 r \pi}{\sqrt{g r \cdot \operatorname{tg} \alpha}} = \frac{2 \pi \cdot \sqrt{r}}{g \cdot \sqrt{\frac{r}{h}}}$$

$$t = \frac{2 \pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (241)$$

$h = l \cos\alpha$ heißt **Pendelhöhe.** Wird dieselbe 4mal so groß, so dauert ein Umlauf des Kegelpendels 2mal so lange.

$$v^2 = g r \cdot \operatorname{tg} \alpha = g \cdot r \cdot \frac{r}{h} = \frac{\pi r^2 n^2}{30^2}$$

$$n = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{h}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (242)$$

§ 63. Beschleunigungsdruck.

Um die hin und her gehenden Teile einer Dampfmaschine (Kolben, Kolbenstange, Kreuzkopf usw.) in Bewegung zu setzen, bzw. zu beschleunigen, ist eine gewisse Kraft nötig, welche dem totalen Dampfdruck entnommen wird, so daß nur jener Druck arbeitsleistend ins Gestänge geleitet wird, der nach Abzug dieses sogenannten **Beschleunigungsdruckes** vom Dampfdruck übrigbleibt. Da in der zweiten Hälfte des Kolbenhubes der Zwang der Kurbelbewegung die Massen verzögert, werden letztere jene Arbeit, die sie früher ansammelten, jetzt an die Kurbel abgeben, und zum bestehenden Dampfdrucke addiert sich noch der Druck der verzögerten Massen.

So wird bei jedem Kolbenhube wohl die ganze Arbeit des Dampfes auf die Kurbel übertragen, indes nicht im Maße der Wirkung auf den Kolben, sondern nach einem durch die bewegten Massen beeinflußten Gesetze.

a) Die Schubstange sei unendlich lang.

Man denke sich alle hin und her gehenden Teile einer Dampfmaschine im Kurbelzapfen vereinigt und mit der Kurbel rotierend, Fig. 201. — Diese ideale Masse würde infolge der Trägheit sich in jedem Augenblicke in der Tangente vom Kreise entfernen wollen, wenn sie nicht durch einen radial einwärts gerichteten Widerstand, die Zentripetalkraft F, daran gehindert werden würde. In der Zeit, während die Kurbel von der Totlage aus den Winkel α durchläuft, gelangt die Masse von A nach B; sie hat dann im Sinne der Horizontalen den Weg $s = R(1 - \cos\alpha)$ zurückgelegt. Ihre Geschwindigkeit in tangentialer Richtung ist v, in horizontaler $c = v \cdot \sin\alpha$.

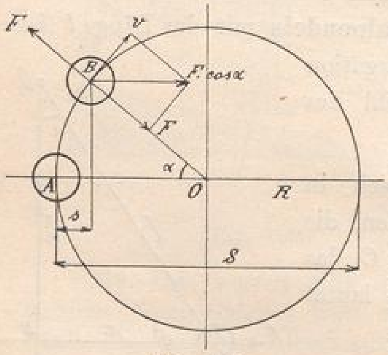

Fig. 201.

Nun ist in Wirklichkeit die Masse nicht im Kurbelzapfen angehäuft, sondern in Kolben, Kolbenstange, Kreuzkopf usw. verteilt. Da diese Massen nun nicht vom Kurbelzapfen mitgeschleppt werden, sondern im Gegenteil einen Druck auf ihn übertragen sollen, muß ein Teil des Dampfdruckes, der auf der arbeitenden Kolbenseite wirkt, zur Beschleunigung der hin und her gehenden Massen verwendet werden, vermöge welcher er die Kurbel treibend folgt; d. h. während der Zeit, in der die Kurbel den Winkel a durcheilt, hat der Kolben den Weg $s = R(1 - \cos a)$ durch den Dampfdruck geführt zu werden und muß bis dahin die Geschwindigkeit $c = v \cdot \sin a$ erlangt haben.

Wenn aber zwei Massen durch zwei Kräfte in gleichen Zeiten, von gleichen Anfangsgeschwindigkeiten O aus, nach gleichen Gesetzen bewegt werden, so sind die bewegenden Kräfte selbst einander gleich. Es ist somit der Beschleunigungsdruck $$Q = F \cdot \cos a$$

Ist $\frac{P}{g}$ die Masse der hin und her gehenden Teile, so ist

$$F = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{P}{g} \cdot \left(\frac{2 R \pi n}{60}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} = \frac{P}{g} \cdot \left(\frac{S n}{30}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4 R} = \frac{P}{g} c^2 \cdot \frac{\pi^2}{2 S}$$

$$F = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{c^2}{S}$$

und somit
$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{g} \cdot P \cdot \frac{c^2}{S} \cos \alpha \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{Q = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{c^2}{S} \cos \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(243a)}$$

dagegen pro Flächeneinheit des Kolbens

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{P}{f} \cdot \frac{c^2}{S} \cos \alpha \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{q = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{f} \cdot \frac{c^2}{S} \cdot \cos \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(243b)}$$

wenn der Querschnitt des Kolbens f qcm beträgt.

Hiermit ist die Abhängigkeit des Druckes q von α gezeigt.

Es soll nun der Zusammenhang zwischen q und dem zugehörigen Kolbenweg gesucht werden.

Allgemein ist $s = R(1 - \cos \alpha)$, d. h.

$$\cos \alpha = \frac{R - s}{R} = 1 - \frac{s}{R}, \text{ also}$$

$$\boldsymbol{q = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{s}{R}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(244)}$$

Werden die Größen von s als Abszissen und die von q als Ordinaten und zwar wegen späterer Kombination des Beschleunigungsdruck-Diagrammes mit dem Indikatordiagramm die positiven nach abwärts und die negativen nach aufwärts aufgetragen, so ist die Kurve der Beschleunigungsdrücke eine Gerade, Fig. 202.

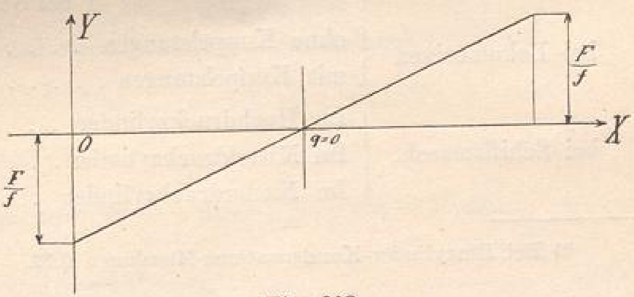

Fig. 202.

$$\text{Für } s = 0 \ldots . q = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{0}{R}\right) = \frac{F}{f}$$

$$\text{für } s = \frac{S}{2} \ldots . q = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{\frac{S}{2}}{\frac{S}{2}}\right) = 0$$

$$\text{für } s = S \ldots . q = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{S}{\frac{S}{2}}\right) = \frac{F}{f}(1 - 2) = -\frac{F}{f}$$

Die Fläche, welche zwischen Beschleunigungsdruckkurve und der Achse $\overline{OX}$ liegt, stellt die Arbeit des Beschleunigungsdruckes dar.

b) Die Schubstange sei endlich lang.

Bei endlich langer Schubstange ist die Kolbenbeschleunigung laut (26)

$$p = \frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right)$$

Daher wird der Beschleunigungsdruck

$$Q = M\frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right),$$

wenn $M = \frac{P}{g}$ die Masse aller hin und her gehenden Teile bedeutet. Nun ist $\frac{M v^2}{R} = F$ — F war aber gleich $\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{P}{g}\cdot\frac{c^2}{S} \sim \frac{1}{2}\cdot P\cdot\frac{c^2}{S}\cdot$ Somit wird der Beschleunigungsdruck pro 1 qcm Kolbenfläche

$$q = \frac{F}{f}\left(\cos \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{f}\cdot\frac{c^2}{S}\left(\cos\alpha \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right) \qquad (245)$$

$\frac{P}{f}$, das auf 1 qcm entfallende Gewicht der hin und her gehenden Teile einer Dampfmaschine, wird nach Radinger

bei Stabilmasch.	Im Hochdruckzyl.	bei $S \overline{\gtrless} 0{,}7$ m . . .	0,28 kg*)
		bei $S \overline{\gtrless} 0{,}7$ m . . .	0,4 kg
	Im Niederdruckzyl.	bei $S \overline{\lessgtr} 0{,}9$ m . . .	0,2 kg
		bei $S > 0{,}9$ m . . .	0,22 kg
bei Lokomotiven	ohne Kuppelstangen		0,33 kg
	mit Kuppelstangen		0,45 ÷ 0,55 kg
bei Schiffsmasch.	Im Hochdruckzylinder		0,45 kg
	Im Mitteldruckzylinder		0,20 kg
	Im Niederdruckzylinder		0,15 kg

*) Bei Einzylinder-Kondensations-Maschinen 0,33.

Beispiel.

245. Die Konstruktion der Beschleunigungsdruckkurve bei Vorhandensein einer endlich langen Schubstange und bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ anzugeben. Spezielle Durchführung für eine Maschine, deren Zylinder 450 mm Durchmesser und 600 mm Hub besitzt, und deren Tourenzahl $n = 200$ ist. Fig. 203.

Auflösung: Für $\alpha = 0$ wird

$$q_{\alpha=0} = q_1 = \frac{F}{f}\left(\cos o^0 + \frac{1}{5}\cos o^0\right) = \frac{F}{f}\left(1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$\boldsymbol{q_1 = \frac{6}{5} \cdot \frac{F}{f}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(246)}$$

„Der Beschleunigungsdruck am Anfange des Kolbenhinganges ist bei endlich langer Schubstange $\frac{6}{5}$ desjenigen bei unendlich langer.“

$\frac{1}{5} \cdot \frac{F}{f}$ werde gleich m gesetzt.

Die Konstruktion des Punktes I ist aus Fig. 203 ersichtlich. Speziell wird

$$c = \frac{n\,S}{30} = \frac{200 \cdot 0{,}6}{30} = 4 \text{ m}$$

$$\frac{F}{f} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}28 \cdot \frac{16}{0{,}6} = 0{,}93 \cdot 4 = 3{,}72 \text{ kg/qcm}$$

$$q_1 = \frac{6}{5} \cdot \frac{F}{f} = 4{,}46 \text{ kg/qcm}$$

Für $\alpha = 180^0 = \pi$ ergibt sich

$$q_{\alpha=\pi} = q_2 = \frac{F}{f}\left(\cos\pi + \frac{1}{5}\cos 2\pi\right) = \frac{F}{f}\left(-1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$\boldsymbol{q_2 = -\frac{4}{5} \cdot \frac{F}{f}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(247)}$$

„Zu Beginn des Kolbenrückganges ist der Beschleunigungsdruck bei endlich langer Schubstange $\frac{4}{5}$ desjenigen bei unendlich langer.“

Behufs Konstruktion des Punktes II siehe Fig. 203.

Speziell ist $$q_2 = -\frac{4}{5} \cdot 3{,}72$$

$$\boldsymbol{q_2 = -2{,}97 \text{ kg/qcm}}$$

Für $\alpha = 45^0$ wird bei unendlich langer Schubstange

$$q'_{\alpha=45^0} = q_3' = \frac{F}{f}\cos 45^0$$

und bei endlich langer

$$q_{\alpha=45^0} = q_3 = \frac{F}{f}\left(\cos 45^0 + \frac{1}{5}\cos 90^0\right) \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{q_3 = \frac{F}{f}\cos 45^0 = q_3'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(248)}$$

d. h. „Die Beschleunigungsdrücke beim Kurbeldrehungswinkel $\alpha = 45^0$ sind für unendlich große und endlich große Schubstange einander gleich.“

Wird $\alpha = 135^0$, dann gilt für unendlich lange Schubstange

$$q_{\alpha = 135^0} = q_4' = \frac{F}{f} \cos 135^0 = -\frac{F}{f} \cos 45^0$$

und bei endlich langer

$$q_{\alpha = 135^0} = q_4 = \frac{F}{f} (\cos 135^0 + \frac{1}{5} \cos 270^0)$$

$$\mathbf{q_4 = -\frac{F}{f} \cdot \cos 45^0 = q_4'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(249)}$$

d. h. „Beim Kurbeldrehungswinkel 135^0 sind ebenfalls die Beschleunigungsdrücke für unendlich große und endlich große Schubstange einander gleich.“

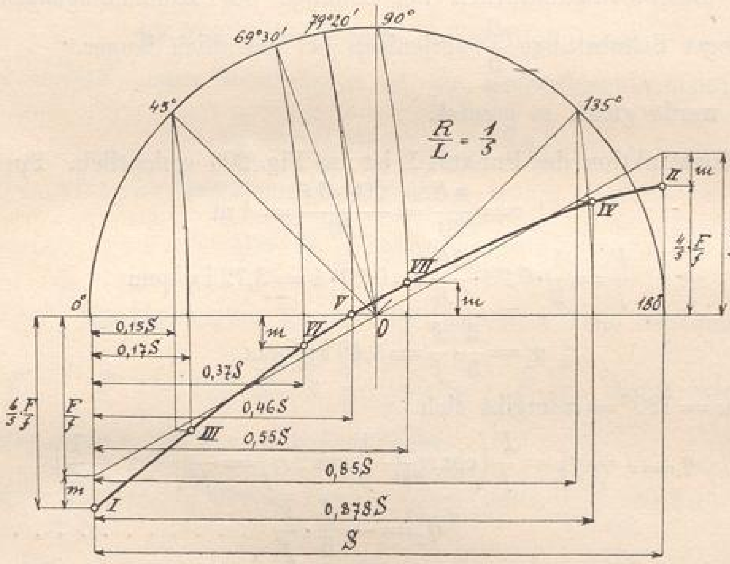

Fig. 203.

Speziell ergeben sich für q_3 und q_4

$$q_3 = 3{,}72 \cdot \cos 45^0$$

$$\mathbf{q_3 = 2{,}64\ kg/qcm}$$

$$q_4 = -3{,}72 \cos 45^0$$

$$\mathbf{q_4 = -2{,}64\ kg/qcm}$$

Die Konstruktionen für die Punkte III und IV sind aus Fig. 203 zu ersehen.

Es werde weiter gefragt, wann der Beschleunigungsdruck Null wird.

$$q = \frac{F}{f} (\cos \alpha + \frac{1}{5} \cos 2\,\alpha) \text{ wird Null, wenn}$$

der Klammerausdruck Null ist. Der hierzu entsprechende Wert von α ist laut Beispiel 33

$$\alpha = 79^0\,20'$$

$$\mathbf{q_{\alpha = 79^0 20'} = q_5 = 0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(250)}$$

In Fig. 203 ist die Konstruktion des Punktes V gezeigt.

Der Beschleunigungsdruck kann auch $m = \frac{1}{5} \cdot \frac{F}{f}$ werden. Hierfür lautet die Bedingung

$$q_6 = \frac{F}{f} (\cos \alpha + \frac{1}{5} \cdot \cos 2 \alpha) = \frac{1}{5} \cdot \frac{F}{f}$$

$$\cos \alpha + \frac{1}{5} \cdot \cos 2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$5 \cos \alpha + \cos 2 \alpha = 1$$

$$5 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \frac{5}{2} \cos \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha \sim 69^0 30'$$

$$q_{\alpha = 69^0 30'} = q_6 = \frac{1}{5} \cdot \frac{F}{f} = m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (251)$$

Die Ordinate des Punktes VI, Fig. 203, ist q_6.

Ein weiterer charakteristischer Punkt der Beschleunigungsdruckkurve, nämlich VII, Fig. 203, wird erhalten, wenn man q für $\alpha = 90^0$ als Ordinate aufträgt. Für diesen Wert von α wird

$$q_{\alpha = 90^0} = q_7 = \frac{F}{f} (\cos 90 + \frac{1}{5} \cos 180) = \frac{F}{f} \left(0 - \frac{1}{5}\right)$$

$$q_{\alpha = 90^0} = q_7 = -\frac{1}{5} \cdot \frac{F}{f} = -m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (252)$$

für $\alpha =$	0^0	45^0	$69^0 30'$	$79^0 20'$	90^0	135^0	180^0
ist $s \big\vert_{L = \infty} =$	0	0,15 S	—	—	0,5 S	0,85 S	S
ist $s \big\vert_{L = 5 R} =$	0	0,17 S	0,37 S	0,46 S	0,55 S	0,878 S	S

§ 64. Schwungradberechnung.

Bedeutet p den auf den Kolben wirkenden Dampfdruck und q den Beschleunigungsdruck, so wird der Differenzdruck $(p - q)$ Arbeit am Kurbelzapfen leisten.

a) Bei unendlich langer Schubstange.

Die arbeitsleistende Komponente von $(p - q)$ ist $t = (p - q) \sin \alpha$, Fig. 204, wenn α der Kurbeldrehungswinkel, der diesem Drucke entspricht, ist.

Nun ist $\triangle MNE \sim \triangle MmO$, so daß sich ergibt

$$(p - q) : t = R : \overline{Mm}$$

$$(p - q) : t = R : \overline{OC}$$

$$(p - q) : t = \overline{AO} : \overline{OC}$$

Wird $\overline{AD} = (p - q)$ gemacht und in D eine Senkrechte auf $\overline{AO}$ errichtet, so ist

$$DF = t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (253)$$

t heißt der **Tangentialdruck am Kurbelzapfen.**

b) Bei endlich langer Schubstange.

In Fig. 205 ist gezeigt, wie sich der arbeitsleistende Druck am Kreuzkopf in eine in die Schubstange fallende Komponente $\frac{p-q}{\cos\omega}$ und in die senkrecht

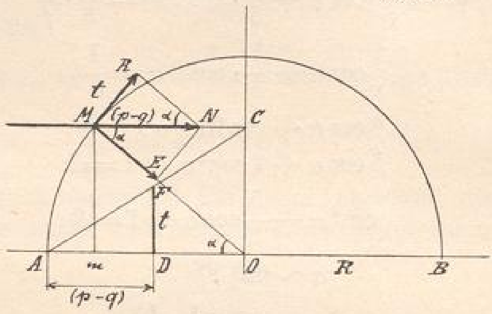

Fig. 204.

zur Führungsbahn des Kreuzkopfes gerichtete K zerlegt, ferner wie $\frac{p-q}{\cos\omega}$ am Kurbelzapfen in eine radiale Komponente und in den Tangentialdruck t zerlegt wird.

Verlängert man $\overline{OM}$ und trägt man $\overline{MS} = (p-q)$ auf, so ist $\overline{ST}$ (nach Riedler) der Tangentialdruck. Diese Konstruktion ist einfach, da keine Kräftezerlegungen am Kreuzkopf und am Kurbelzapfen ihr vorhergehen müssen.

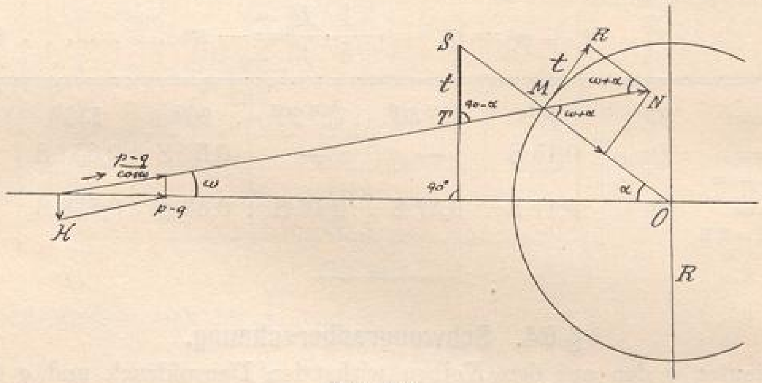

Fig. 205.

Nun soll die Richtigkeit dieser Konstruktion bewiesen werden.

Aus dem Dreiecke MNR folgt die Beziehung

$$\frac{p-q}{\cos\omega} : t = \sin 90^0 : \sin(\alpha+\omega)$$

$$\frac{p-q}{t} = \frac{\cos\omega}{\sin(\alpha+\omega)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Aus dem Dreiecke MST ergibt sich

$$\frac{p-q}{x} = \frac{\sin(90-\omega)}{\sin(\alpha+\omega)} \text{ oder}$$

$$\frac{p-q}{x} = \frac{\cos\omega}{\sin(\alpha+\omega)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Durch Vergleichung von (a) und (b) erhält man

$$x = t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (254),$$

was zu beweisen war.

Radinger hat die Konstruktion des Beschleunigungsdruckes folgendermaßen durchgeführt.

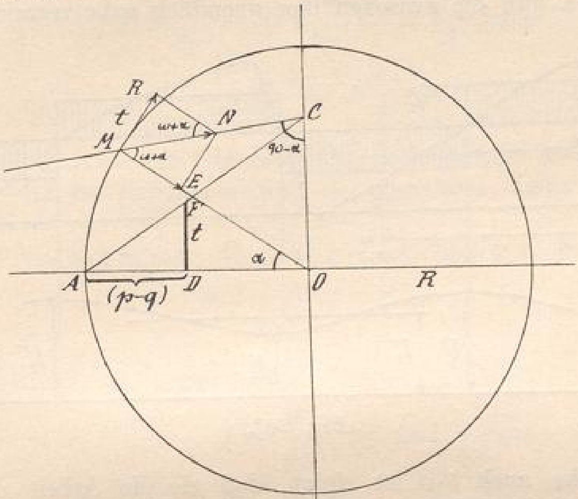

Fig. 206.

Die Schubstangenrichtung wird, Fig. 206, bis C verlängert, dann wird $\overline{AC}$ gezogen, $\overline{AD} = (p - q)$ aufgetragen und in D eine Senkrechte auf $\overline{AO}$ errichtet. $\overline{DF}$ ist dann gleich t.

Beweis: Aus Dreieck MNR folgt

$$\frac{t}{\frac{p-q}{\cos \omega}} = \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin 90^0}$$

$$\frac{t}{p-q} = \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\cos \omega}$$

Aus Dreieck MOC wird

$$\overline{OC} : R = \sin(\alpha + \omega) : \sin(90 - \omega)$$

$$\overline{OC} : R = \sin(\alpha + \omega) : \cos \omega$$

$$\text{Daher} \quad \frac{\overline{OC}}{R} = \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\cos \omega} = \frac{t}{p-q}$$

$$\text{Da} \quad \frac{\overline{OC}}{R} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AO}} \text{ ist, folgt}$$

$$\frac{t}{p-q} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AO}}, \text{ also}$$

$$t = \overline{DF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 255)$$

Trägt man den Kurbelkreisumfang auf einer Geraden ab und in den einzelnen Punkten desselben die zugehörigen, wechselnd großen Tangentialdrücke, Fig. 207, so ergibt der geometrische Ort der letzteren die Linie der Tangentialdrücke. Diese Darstellung heißt das **Tangentialdruckdiagramm.**

Nach dem Kurbelzapfenwege s sei der Tangentialdruck t. — Während der in der folgenden, unendlich kleinen Zeit τ und während des ihr entsprechenden Weges σ ändert sich t nicht. Die Arbeit am Kurbelzapfen ist dann $t \cdot \sigma$. — Da nun die zwischen den unendlich nahe verzeichneten Drücken

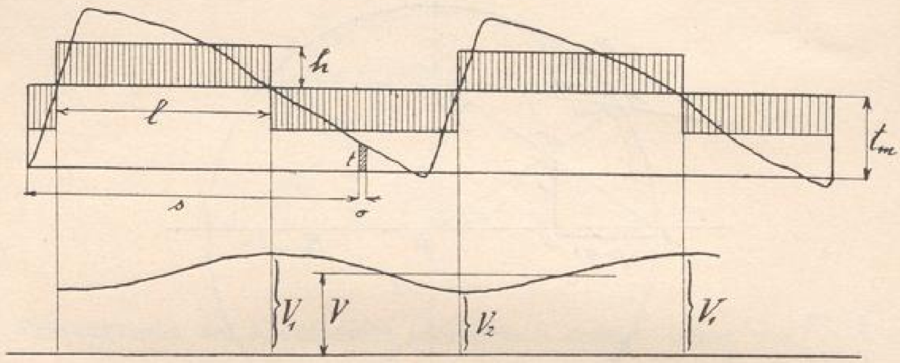

Fig. 207.

schraffierte Fläche auch $t \cdot \sigma$ ist, folgt, daß sie die Arbeit des Tangentialdruckes t während des Weges σ darstellt.

Denkt man sich nun die ganze Fläche des Tangentialdruckdiagrammes durch Addition lauter solcher unendlich kleiner Flächen $t \cdot \sigma$ zustande gekommen, so läßt sich sagen:

„Die Fläche des Tangentialdruckdiagrammes gibt die von den Tangentialdrücken am Kurbelzapfen geleistete Arbeit an."

Verwandelt man die Fläche des Tangentialdruckdiagrammes in ein inhaltsgleiches Rechteck mit derselben Basis, dann stellt die Höhe desselben den mittleren Tangentialdruck am Kurbelzapfen dar.

Die größeren Drücke t leisten eine größere als die mittlere nötige Arbeit. Solange dies geschieht, nimmt der Schwungradkranz mehr Arbeit auf und seine Umfangsgeschwindigkeit V wächst. Wird der Tangentialdruck dagegen kleiner als der mittlere nötige, dann wird die Umfangsgeschwindigkeit V des Schwungradkranzes abnehmen.

Das Schwungrad macht also keine genau gleichförmige Bewegung.

Bei unendlich langer Schubstange folgen sich vollständig gleiche Mehr- und Minderarbeitsbeträge, d. h. die die mittlere Tangentialdrucklinie überschneidenden und unterschneidenden Flächen sind einander gleich. Bei endlich langer Schubstange verschiebt sich aber diese Gleichheit und muß eine volle Kurbelumdrehung in Betracht gezogen werden, da dann die überschneidenden Flächen zusammen der Summe der unterschneidenden gleich sind.

Die größte der über- oder unterschneidenden Flächen $l \cdot h$ werde folgender Betrachtung zugrunde gelegt.

$l^{\text{Meter}} \cdot h^{\text{kg}} = a^{\text{kgm}}$ stellt die über die nötige mittlere Arbeit am Kurbelzapfen geleistete Mehrarbeit pro 1 qcm Kolbenfläche vor. Demnach ist die totale Mehrarbeit

$$A = f \cdot a = h \cdot l \cdot a$$

Während der Aufnahme dieser Arbeit hat sich die Energie des Schwungradkranzes um

$$A = \frac{G}{2g} V_1^2 - \frac{G}{2g} V_2^2 = \frac{G}{2g} (V_1^2 - V_2^2)$$

vergrößert. Nun ist auch

$$A = \frac{G}{2g} (V_1 + V_2) \cdot (V_1 - V_2) \text{ oder}$$

$$A = \frac{G}{g} \cdot \frac{V_1 + V_2}{2} \cdot \frac{V_1 - V_2}{V} \cdot V$$

„Das Verhältnis aus der Differenz aus größter und kleinster Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades und der mittleren heißt der **Ungleichförmigkeitsgrad** δ."

Ist z. B. $V_1 = 20{,}1$ m/sek., $V_2 = 19{,}9$ m/sek. und $V = 20$ m/sek., so wird

$$\delta = \frac{20{,}1 - 19{,}9}{20} \sim 0{,}01$$

Da $\frac{V_1 + V_2}{2} = V$ ist, ergibt sich

$$A = \frac{G}{g} \cdot \delta \cdot V^2 \text{ und daraus}$$

$$G = A \cdot \frac{g}{\delta \cdot V^2}$$

Da auch die Schwungradarme arbeitsübertragend wirken, genügt es zu nehmen

$$\mathbf{G = 0{,}9\, A \cdot \frac{g}{\delta \cdot V^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(256)}$$

§ 65. Stoß fester Körper.

Stoß heißt das Aufeinandertreffen und die Wechselwirkung zweier Körper. **Stoßlinie** oder **Stoßrichtung** ist die Normale zur gemeinschaftlichen Tangentialebene im Berührungspunkte beider Körper. Fig. 208.

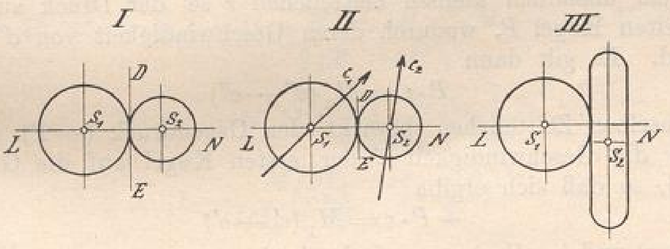

Fig. 208.

Man unterscheidet:

a) nach Lage der Stoßlinie:

α) **zentrischen (zentralen) Stoß**, wenn diese durch den Schwerpunkt beider Körper hindurchgeht (I),

β) **exzentrischen Stoß**, wenn dies nicht der Fall ist (III);

b) nach Lage von Stoß- und Bewegungsrichtung:

α) **gerader Stoß,** wenn beide Richtungen zusammenfallen (I),

β) **schiefer Stoß** (II), wenn dies nicht zutrifft;

c) nach der Dauer der Stoßperioden.

In der ersten Stoßperiode werden die Körper an den Berührungsstellen eingedrückt, in der zweiten dehnen sie sich wieder aus und zwar ganz, teilweise oder gar nicht.

α) Ist die zweite Periode das vollkommene Spiegelbild der ersten, so ist der Stoß **vollkommen elastisch.**

β) Wenn die Körper die Deformationen durch den Stoß teilweise beibehalten, so heißt der Stoß **unvollkommen elastisch.**

γ) Behalten die Körper die Deformationen durch den Stoß ganz, so heißt derselbe **vollkommen unelastisch.**

1. Der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße.

Zwei Kugeln, Fig. 209, bewegen sich nach derselben Richtung und zwar mit ungleich großen Geschwindigkeiten. Ist diejenige der ersten Kugel größer als die der zweiten, so holt jene diese ein, und es findet Stoß statt. Die erste Kugel drückt auf die zweite, die einen ebenso großen Gegendruck erzeugt. Druck und Gegendruck wachsen vom Anfange an. Der Druck der ersten Kugel beschleunigt die zweite Kugel, und umgekehrt verzögert der Gegendruck der zweiten Kugel die Bewegung der ersten. Die Geschwindigkeiten nach dem Stoße seien v_1 und v_2.

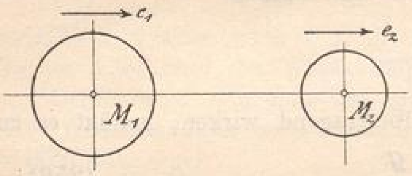

Fig. 209.

Um die Kräftewirkung während der ersten Stoßperiode zu untersuchen, zerlege man dieselbe in unendlich viele Zeitteilchen, innerhalb welcher Drücke und Gegendrücke je von konstanter Größe gedacht werden dürfen.

Die Änderung der Bewegungsgröße einer Masse M bei Vergrößerung ihrer Geschwindigkeit von c auf v in der Zeit t ist

$$P \cdot t = M\,(v - c)$$

In einem unendlich kleinen Zeitteilchen τ sei der Druck auf die Masse M_2 der zweiten Kugel P, wodurch deren Geschwindigkeit von c'' auf v'' gesteigert wird. Es gilt dann

$$P \cdot \tau = M_2\,(v'' - c'')$$

In demselben Zeitteilchen bewirkt der Gegendruck $(-P)$ der zweiten Kugel, daß die Geschwindigkeit c' der ersten Kugel auf die Größe v' verringert wird, so daß sich ergibt

$$-P \cdot \tau = M_1\,(v' - c')$$

Da $(P \cdot \tau)$ und $(-P \cdot \tau)$ numerisch gleich, nur entgegengesetzt bezeichnet sind, so ist festgestellt, daß in jedem Zeitteilchen des Stoßes der eine Körper so viel an Bewegungsgröße gewinnt als der andere an solcher verliert. Was aber von einem Zeitteilchen gilt, gilt auch für alle anderen, so daß insgesamt wird

$$\text{Gewinn}\ [M_2\,(v_2 - c_2)] = \text{Verlust}\ [-M_1\,(v_1 - c_1)]\ \text{oder}$$

$$\boldsymbol{M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(257)}$$

„Die Summe der Bewegungsgrößen vor dem Stoße ist gleich der Summe derselben nach diesem, gleichgiltig, ob die Körper vollkommen oder unvollkommen elastisch oder vollkommen unelastisch sind.“

2. Der vollkommen unelastische Stoß.

Sind beide Körper vollkommen unelastisch, so spielt sich der Stoßvorgang nur in der ersten Periode ab, denn hierauf findet keine Wiederausdehnung mehr statt. Beide Körper verhalten sich nach dem Stoße wie ein einziger Körper, welcher sich mit der Geschwindigkeit $v_2 = v_1 = v$ weiterbewegt. Aus $v(M_1 + M_2) = M_1 c_1 + M_2 c_2$ folgt

$$\boldsymbol{v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(258)}$$

3. Verlust an Arbeitsvermögen beim vollkommen unelastischen Stoß.

Das Arbeitsvermögen beider Kugeln vor dem Stoße ist

$$\frac{M_1 c_1^2}{2} + \frac{M_2 c_2^2}{2},$$

dagegen nach dem Stoße

$$(M_1 + M_2)\frac{v^2}{2}$$

Somit ist der Verlust an Arbeitsvermögen

$$L = M_1 \frac{c_1^2 - v^2}{2} + M_2 \frac{c_2^2 - v^2}{2}$$

$$L = \frac{M_1}{2}\left[c_1^2 - \left(\frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}\right)^2\right] + \frac{M_2}{2}\cdot\left[\left(\frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}\right)^2 - c_2^2\right]$$

$$L = \frac{M_1}{2}\cdot\frac{M_1^2 c_1^2 + 2 M_1 M_2 c_1^2 + M_2^2 c_1^2 - M_1^2 c_1^2 - 2 M_1 M_2 c_1 c_2 - M_2^2 c_2^2}{(M_1 + M_2)^2} +$$

$$+ \frac{M_2}{2}\cdot\frac{M_1^2 c_1^2 + 2 M_1 M_2 c_1 c_2 + M_2^2 c_2^2 - M_1^2 c_2^2 - 2 M_1 M_2 c_2^2 - M_2^2 c_2^2}{(M_1 + M_2)^2}$$

$$L = \frac{c_1^2 (M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2) - 2 c_1 c_2 (M_1^2 M_2 + M_1 M_2^2) + c_2^2 (M_1^2 M_2 + M_1 M_2^2)}{2(M_1 + M_2)^2}$$

$$L = \frac{c_1^2 \cdot M_1 M_2 (M_1 + M_2) - 2 c_1 c_2 M_1 M_2 (M_1 + M_2) + c_2^2 \cdot M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{2(M_1 + M_2)^2}$$

$$L = M_1 M_2 \cdot \frac{c_1^2 - 2 c_1 c_2 + c_2^2}{2(M_1 + M_2)}$$

$$\boldsymbol{L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\cdot\frac{(c_1 - c_2)^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(259)}$$

$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$, das Produkt durch die Summe der zusammenstoßenden Massen heißt das harmonische Mittel der Massen.

„Der Verlust an Energie ist also gleich der Energie, welche das harmonische Mittel der Massen besitzen würde, wenn es sich mit der Differenz der Anfangsgeschwindigkeiten der zum Stoße kommenden Massen bewegen würde.“

Führt man statt der Massen deren Gewichte ein, so lautet die Formel für den Energieverlust

$$L = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(259a)}$$

4. Vollkommen elastischer Stoß.

Die Energie der Massen ist hier vor und nach dem Stoße gleich. Demnach wird

$$\frac{M_1}{2} c_1^2 + \frac{M_2}{2} c_2^2 = \frac{M_1}{2} v_1^2 + \frac{M_2}{2} v_2^2$$

Hierzu

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2$$

Aus den beiden Gleichungen lassen sich v_1 und v_2 finden.

Aus erster Gleichung folgt

$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2)$$

Aus der zweiten

$$M_1 (c_1 - v_1) = M_2 (v_2 - c_2)$$

somit

$$c_1 + v_1 = v_2 + c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(260)}$$

$$v_2 = c_1 + v_1 - c_2$$

Dieser Wert in die Gleichung $M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2$ eingeführt, ergibt

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 c_1 + M_2 v_1 - M_2 c_2$$

$$v_1 (M_1 + M_2) = M_1 c_1 + 2 M_2 c_2 - M_2 c_1$$

$$v_1 (M_1 + M_2) = c_1 (M_1 + M_2) + 2 M_2 c_2 - 2 M_2 c_1$$

$$v_1 = c_1 - 2 \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(261a)}$$

ebenso

$$v_2 = c_2 + 2 \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(261b)}$$

Haben die zum Stoße kommenden Kugeln gleiche Massen, d. h. ist $M_1 = M_2 = M$, dann wird

$$v_1 = c_1 - 2 \frac{M (c_1 - c_2)}{2 M} = c_1 - c_1 + c_2$$

$$v_1 = c_2,$$

d. h. die erste Kugel nimmt die Geschwindigkeit der zweiten an.

Ebenso folgt

$$v_2 = c_2 + 2 \frac{M (c_1 - c_2)}{2 M} = c_2 + c_1 - c_2$$

$$v_2 = c_1,$$

d. h. die zweite Kugel hat nach dem Stoße die Geschwindigkeit der ersten.

„Stoßen gleich große, vollkommen elastische Massen zusammen, so tauschen sie ihre Geschwindigkeit aus.“

Ist die erste Masse eine feste, elastische Wand, so kann man sie (M_1) als ∞ ansehen. Ihre Geschwindigkeit c_1 ist Null. Daher wird die Geschwindigkeit

$$v_2 = c_2 + 2 \frac{c_1 - c_2}{1 + \frac{M_2}{M_1}} = c_2 - 2 c_2$$

$$v_2 = - c_2,$$

d. h. „die auf eine elastische Wand treffende Kugel wird mit der Geschwindigkeit zurückgehen, mit welcher sie auf die Wand auftrifft.“

5. Unvollkommen elastischer Stoß.

Es gibt keinen Körper, der entweder vollkommen elastisch oder vollkommen unelastisch ist. Jeder Körper ist mehr oder weniger elastisch.

Die folgenden Untersuchungen ergeben daher allgemein giltige Resultate, in denen die vorangegangenen als spezielle enthalten sind.

Es war beim vollkommen unelastischen Stoß

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

Demnach beträgt die Geschwindigkeitsänderung

$$c_1 - v = c_1 - \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_1 - M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

$$c_1 - v = \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

und $v - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2 - M_1 c_2 - M_2 c_2}{M_1 + M_2}$

$$v - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

Dagegen war beim vollkommen elastischen Stoß

$$c_1 - v_1 = c_1 - c_1 + 2\frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = 2\frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

$$v_2 - c_2 = 2\frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} - c_2 = 2 \cdot \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

„Die Geschwindigkeitsänderungen beim vollkommen elastischen Stoß sind doppelt so groß als beim vollkommen unelastischen.“

Die Geschwindigkeitsänderungen beim unvollkommen elastischen Stoß werden daher etwas weniger als zweimal so groß sein als die beim vollkommen unelastischen Stoß, etwa $(1 + \varkappa)$ mal, wenn $\varkappa < 1$ ist.

Es ergeben sich dann

$$c_1 - v_1 = (1 + \varkappa)\frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

$$v_2 - c_2 = (1 + \varkappa)\frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

$$\boldsymbol{v_1 = c_1 - (1 + \varkappa)\frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(262 a)}$$

$$\boldsymbol{v_2 = c_2 + (1 + \varkappa)\frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(262 b)}$$

Ein interessantes Resultat ergibt sich, wenn man die Differenz $(v_1 - v_2)$ bildet.

$$v_1 - v_2 = c_1 - c_2 - (1 + \varkappa)\frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} - (1 + \varkappa)\frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

$$= c_1 - c_2 - (1 + \varkappa)\frac{c_1 (M_1 + M_2) - c_2 (M_1 + M_2)}{M_1 + M_2}$$

$$\boldsymbol{v_1 - v_2 = -\varkappa (c_1 - c_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(263)}$$

$\varkappa$ heißt **Stoßkoeffizient** und kann empirisch ermittelt werden.

6. Ermittlung des Stoßkoeffizienten.

$$\varkappa = \frac{v_2 - v_1}{c_1 - c_2}$$

Wenn man alle Geschwindigkeiten kennt, ist $\varkappa$ bestimmt.

Man läßt eine Kugel die Höhe H frei gegen eine horizontale Wand aus gleichem Material fallen. Die Kugel wird von der letzteren dann die Höhe h nach aufwärts geschleudert.

Hierbei sind $M_2 = \infty$, $c_2 = 0$, $c_1 = \sqrt{2gH}$, $v_1 = -\sqrt{2gh}$, $v_2 = 0$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{h}{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (264)$$

Auf Grund von nach dieser Methode gemachten Versuchen wurde gefunden

für Stahl, Kork und Wolle . . . $\varkappa = 0{,}56$

„ Elfenbein . . . . $\varkappa = \frac{8}{9} = 0{,}89$

„ Glas . . . . $\varkappa = \frac{15}{16} = 0{,}94$

Mit der Höhe H darf aber über eine gewisse Grenze nicht hinausgegangen werden, da sonst entstehende Deformationen durch den Stoß nicht verschwinden.

7. Arbeitsverlust beim unvollkommen elastischen Stoß.

$$L = \frac{M_1 c_1^2}{2} + \frac{M_2 c_2^2}{2} - \left(\frac{M_1}{2} v_1^2 + \frac{M_2}{2} v_2^2\right)$$

$$= \frac{M_1}{2}(c_1 + v_1)(c_1 - v_1) + \frac{M_2}{2}(c_2 + v_2)\cdot(c_2 - v_2)$$

Nun gilt für alle Arten des Stoßes $M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2$

somit $\frac{M_2}{2}(c_2 - v_2) = \frac{M_1}{2}(v_1 - c_1)$, daher wird

$$L = \frac{M_1}{2}(c_1 + v_1)(c_1 - v_1) + \frac{M_1}{2}(v_1 - c_1)(c_2 + v_2) .$$

$$= \frac{M_1}{2}(c_1 - v_1)(c_1 + v_1 - c_2 - v_2) = \frac{M_1}{2}(c_1 - v_1)(c_1 - c_2 + v_1 - v_2)$$

Ferner war $\quad v_1 = c_1 - (1 + \varkappa)\frac{M_2(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$, d. h.

$$c_1 - v_1 = (1 + \varkappa)\frac{M_2(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

und $v_1 - v_2 = -\varkappa(c_1 - c_2)$, folglich

$$L = \frac{M_1}{2} \cdot (1 + \varkappa) \cdot \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \cdot (c_1 - c_2 + v_1 - v_2)$$

$$= \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)} \cdot (1 + \varkappa) \cdot [c_1 - c_2 - \varkappa (c_1 - c_2)] \cdot (c_1 - c_2)$$

$$= \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)} \cdot (1 + \varkappa) \cdot (1 - \varkappa) \cdot (c_1 - c_2)^2$$

$$\boldsymbol{L = \frac{1 - \varkappa^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot (c_1 - c_2)^2} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(265 a)}$$

$$\boldsymbol{L = \frac{1 - \varkappa^2}{2} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot (c_1 - c_2)^2} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(265 b)}$$

Spezialisierung:

a) für den vollkommen elastischen Stoß ist $\varkappa = 1$,
daher $L = 0$;

b) für den vollkommen unelastischen Stoß ist $\varkappa = 0$,
daher $L = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot (c_1 - c_2)^2$.

L wird um so größer, je größer $(c_1 - c_2)$ und je kleiner $\varkappa$ ist.

8. Der schiefe Zentralstoß.

Die vertikalen Komponenten der Geschwindigkeiten c_1 und c_2 werden durch den Stoß nicht beeinflußt, wohl aber die horizontalen, Fig. 210. Man

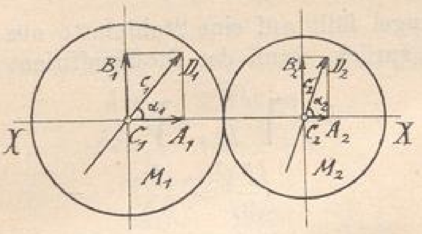

Fig. 210.

erhält die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, indem man die geänderten Horizontalgeschwindigkeiten mit den Vertikalgeschwindigkeiten zusammensetzt. Vor dem Stoße sind die ersteren

$$\overline{C_1 A_1} = c_1 \cdot \cos \alpha_1 \text{ und}$$
$$\overline{C_2 A_2} = c_2 \cdot \cos \alpha_2$$

nach dem Stoße

$$v_1 = c_1 \cos \alpha_1 - \frac{(1 + \varkappa) M_2}{M_1 + M_2} (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cdot \cos \alpha_2)$$

$$v_2 = c_2 \cdot \cos \alpha_2 + \frac{(1 + \varkappa) M_1}{M_1 + M_2} (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2)$$

Da $\overline{C_1 B_1} = c_1 \sin \alpha_1$ und $\overline{C_2 B_2} = c_2 \cdot \sin \alpha_2$ sind, folgt

$$\boldsymbol{w_1 = \sqrt{v_1^2 + (c_1 \cdot \sin \alpha_1)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(266 a)}$$

$$\boldsymbol{w_2 = \sqrt{v_2^2 + (c_2 \cdot \sin \alpha_2)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(266 b)}$$

Die Winkel, unter welchen w_1 und w_2 zur Achse $\overline{XX}$ geneigt sind, bestimmen sich aus

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{c_1 \cdot \sin \alpha_1}{v_1} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (267\,a)$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{c_2 \cdot \sin \alpha_2}{v_2} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (267\,b)$$

Beispiele.

246. Ein Körper trifft mit der Geschwindigkeit c in geradem, unvollkommen elastischem Stoße einen ruhenden von gleicher Masse. Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, wenn der Stoßkoeffizient $\varkappa$ ist?

Auflösung:

$$v_1 = c - (1 + \varkappa) \cdot \frac{M \cdot c}{2M}$$

$$v_1 = c - \frac{c}{2}(1 + \varkappa)$$

$$v_1 = c - \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\varkappa = \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\varkappa$$

$$\mathbf{v_1 = \frac{c}{2}(1 - \varkappa)}$$

$$v_2 = 0 + (1 + \varkappa) \cdot \frac{Mc}{2M}$$

$$\mathbf{v_2 = \frac{c}{2}(1 + \varkappa)}$$

247. Eine Stahlkugel fällt auf eine Stahlplatte aus einer Höhe von 0,5 m. Wie hoch springt sie zurück, wenn der Stoßkoeffizient $\varkappa = \frac{5}{9}$ ist?

Auflösung:

$$k = \sqrt{\frac{h}{H}} = \sqrt{\frac{h}{0,5}}$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{h}{0,5}$$

$$h = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot 0,5 = \frac{12,5}{81} \text{ Meter}$$

$$\mathbf{h \sim 154,5 \text{ mm}}$$

248. Unter welchen Umständen wird die Stoßwirkung beim Schmieden des Eisens eine große?

Auflösung: Der Verlust beim Stoße

$$L = \frac{1 - \varkappa^2}{2} \cdot \frac{G_1\, G_2}{g_1 + g_2}(c_1 - c_2)^2,$$

welcher zur Deformation des Eisens nötig ist, wird um so kleiner, je kleiner c_2 und je kleiner x sind, ferner, da auch geschrieben werden kann

$$L = \frac{1 - \varkappa^2}{2} \cdot \frac{G_1}{\frac{G_1}{G_2} + 1}(c_1 - c_2)^2$$

je größer G_2 wird. Man erreicht dies dadurch, daß man die Unterlage (Chabotte) außerordentlich groß macht (sie auf einem großen Fundament befestigt, mit welchem sie zusammen als unendlich groß gegenüber G_1 angesehen werden kann), daß man ihr ferner die Geschwindigkeit $c_2 = 0$ gibt und endlich dadurch, daß man Bär und Chabotte aus Stahl herstellt.

249. Welche Geschwindigkeit muß ein 2 kg schwerer Körper haben, um im unelastischen Stoße einem 5 kg schweren, 8 m/sek. Geschwindigkeit besitzenden Körper eine Geschwindigkeitsvergrößerung von 3 m zu erteilen?

Auflösung:
$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{2 c_1 + 5 \cdot 8}{7} = 11$$
$$2 c_1 = 77 - 40 = 37$$
$$\mathbf{c_1 = 18{,}5\ m}$$

250. Eine 3 kg schwere Kugel stößt schief mit 3 m Geschwindigkeit auf eine 12 kg schwere, ruhende Kugel. Der Winkel der Stoßrichtung der ersten Kugel mit der Zentrale ist 60°. — Mit welchen Geschwindigkeiten w_1 und w_2 und unter welchen Winkeln β_1 und β_2 zur Zentrale gehen die beiden Kugeln nach dem Stoße weiter, wenn derselbe als vollkommen unelastisch angesehen wird?

Auflösung:
$$c_1 \sin \alpha_1 = 3 \cdot \sin 60^0 = 0{,}866 \cdot 3 = 2{,}598\ \text{m}$$
$$c_1 \cos \alpha_1 = 3 \cdot \cos 60^0 = 1{,}5\ \text{m}$$
$$c_2 \sin \alpha_2 = 0$$
$$c_2 \cos \alpha_2 = 0$$
$$v_1 = \frac{M_1 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha_1 + M_2 \cdot 0}{M_1 + M_2} = \frac{3 \cdot 1{,}5}{15} = 0{,}3\ \text{m}$$
$$v_2 = v_1 = v$$
$$w_1 = \sqrt{0{,}09 + 2{,}598^2} = \sqrt{0{,}09 + 6{,}7} = \sqrt{6{,}79}$$
$$\mathbf{w_1 \sim 2{,}615\ m}$$
$$w_2 = \sqrt{0{,}09 + 0}$$
$$\mathbf{w_2 = 0{,}3\ m}$$
$$\operatorname{tg} \beta_1 = c_1 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{2{,}598}{0{,}3} = 0{,}866$$
$$\mathbf{\beta_1 = 83^0\, 25'}$$
$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{c_2 \sin \alpha_2}{v_2} = \frac{0}{v_2} = 0$$
$$\mathbf{\beta_2 = 0}$$

§ 66. Das technische und das absolute Maßsystem.

Geometrische, mechanische, magnetische und elektrische Einzelheiten werden bezogen

a) im **technischen Maßsystem** auf Meter (*M*), auf die Kilogrammmasse (*K*) und auf die Sekunde (*Sek*),

b) im **absoluten Maßsystem** auf Zentimeter (*cm*), auf die Grammmasse (*g*) und auf die Sekunde (*sek*).

Das technische Maßsystem heißt auch **$M \cdot K \cdot Sek$-System**, das absolute auch **$cm \cdot g \cdot sek$-System.** Letzteres ist nach den Vorschlägen von Gauß und Weber am 21. September 1881 auf dem Pariser Kongreß festgelegt worden.

Mittels der Einheiten eines Maßsystems läßt sich leicht die Homogenität von Formeln überprüfen.

1. **Geschwindigkeit.** Sie ist das Verhältnis aus einer Länge (Weg) und einer Zeit. Daher ist die

$$\textbf{Einheit der Geschw.} \left\{ \begin{array}{ll} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \;.\;. & M \cdot Sek^{-1} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \;.\;. & cm \cdot sek^{-1} \end{array} \right\} \quad (268)$$

1a. **Winkelgeschwindigkeit** ist der Quotient aus einer Bahngeschwindigkeit und dem Radius (Länge), an welchem sie vorhanden ist. Somit wird die

$$\begin{array}{c} \textbf{Einheit der} \\ \textbf{Winkelgeschw.} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \;.\;.\;.\;.\;. & Sek^{-1} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \;.\;.\;.\;.\;. & Sek^{-1} \end{array} \right\} \quad (269)$$

2. **Beschleunigung** ist Geschwindigkeit durch Zeit. Es ist somit die

$$\textbf{Einheit der Beschl.} \left\{ \begin{array}{ll} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \;.\;.\;. & M \cdot Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \;.\;. & cm \cdot sek^{-2} \end{array} \right\} \quad (270)$$

2a. **Winkelbeschleunigung** ist die Beschleunigung am Bogen vom Radius 1, daher gleich der letzteren dividiert durch eine Länge. Somit ist die

$$\begin{array}{c} \textbf{Einheit der} \\ \textbf{Winkelbeschl.} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \;.\;.\;.\;.\;. & Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \;.\;.\;.\;.\;. & sek^{-2} \end{array} \right\} \quad (271)$$

3. **Kraft** ist das Produkt aus Masse und Beschleunigung. Daher

$$\textbf{Einheit der Kraft} \left\{ \begin{array}{ll} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \;. & M \cdot K \cdot Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \;. & cm \cdot g \cdot sek^{-2} \end{array} \right\} \quad (272)$$

Einheit im $cm \cdot g \cdot sek$-System ist also jene Kraft, die der g-Masse die Beschleunigung von $1\, cm \cdot sek^{-2}$ erteilt.

$$\mathbf{1\, cm \cdot g \cdot sek^{-2}} \textbf{ heißt 1 Dyn} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \mathbf{(272a)}$$

Wie viele Dyn. hat nun 1 kg Kraft?

$$1\, kg \text{ (Kraft)} = 1000 \cdot g \text{ (Massen) mal } 9{,}81\; M \cdot Sek^{-2} \text{ (Beschl.)}$$
$$= 1000\, g \cdot 981\, cm \cdot sek^{-2} = 9.81 \cdot 10^5 \cdot cm \cdot g \cdot sek^{-2}$$

$$\mathbf{1\, kg} \textbf{ (Kraft)} = \mathbf{9{,}81 \cdot 10^5} \textbf{ Dyn.} \sim \textbf{1000000 Dyn} \;.\;. \quad \mathbf{(272b)}$$

4. **Druck** ist das Verhältnis aus einer Kraft (Gewicht) und der Fläche, welche beansprucht wird. Es wird demnach die

$$\begin{array}{c} \textbf{Einheit des} \\ \textbf{Druckes} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \;.\;.\;. & M^{-1} \cdot K \cdot Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \;.\;.\;. & cm^{-1} \cdot g \cdot sek^{-2} \end{array} \right\} \quad (273)$$

5. **Arbeit** ist Kraft mal Weg. Es folgt also die

$$\begin{array}{c} \textbf{Einheit der} \\ \textbf{Arbeit} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \;.\;.\;.\;. & M^2 \cdot K \cdot Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \;.\;.\;.\;. & cm^2 \cdot g \cdot sek^{-2} \end{array} \right\} \quad (274)$$

$1\, cm^2 \cdot g \cdot sek^{-2} = (1\, cm \cdot g \cdot sek^{-2}) \cdot (1\, cm) = 1 \text{ Dyn} \cdot 1\, cm$, also die Arbeit von 1 Dyn auf dem Wege von 1 cm

$$\mathbf{1\, cm^2 \cdot g \cdot sek^{-2}} \textbf{ heißt } \mathbf{1\, Erg} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \mathbf{(274a)}$$

$$\mathbf{10^7\, Erg} \textbf{ heißen 1 Joule} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \mathbf{(274b)}$$

Wie viele Erg, bzw. Joule hat 1 mkg?

$$1\ mkg = 1\ kg \cdot 1\ m = 9{,}81 \cdot 10^5\ \text{Dyn} \cdot 10^2\ cm, \text{ d. h.}$$

$$\mathbf{1\ \mathit{mkg} = 9{,}81 \cdot 10^7\ Erg = 9{,}81\ Joule} \quad \ldots\ldots \quad (274\,c)$$

Wie viele Erg entsprechen 1 Grammkalorie, wenn letztere 0,425 mkg äquivalent ist?

$$1\ \text{Grammkalorie} = 0{,}425 \cdot 9{,}81 \cdot 10^7\ \text{Erg, d. h.}$$

$$\mathbf{1\ Grammkalorie = 41{,}7 \cdot 10^6\ Erg} \quad \ldots\ldots \quad (274\,d)$$

6. **Leistung** ist Arbeit pro Zeiteinheit. Demnach ist die

$$\textbf{Einheit der Leistung} \left\{ \begin{array}{l} \text{im } \boldsymbol{M \cdot K \cdot Sek}\text{-System} \ldots \boldsymbol{M^2 \cdot K \cdot Sek^{-3}} \\ \text{im } \boldsymbol{cm \cdot g \cdot sek}\text{-System} \ldots \boldsymbol{cm^2 \cdot g \cdot sek^{-3}} \end{array} \right\} (275)$$

$$\mathbf{75\ \boldsymbol{M^2 \cdot K \cdot Sek^{-3}} = 1\ PS} \quad \ldots\ldots \quad (275\,a)$$

$$\mathbf{1\ \boldsymbol{cm^2 \cdot g \cdot sek^{-3}}\ heißt\ ein\ Sekundenerg} \quad \ldots \quad (275\,b)$$

$$\mathbf{10^7\ Sekundenerg\ heißen\ 1\ Watt} \quad \ldots\ldots \quad (275\,c)$$

$$\mathbf{1000\ Watt\ heißen\ 1\ Kilowatt} \quad \ldots\ldots \quad (275\,d)$$

$$\mathbf{1\ PS = 736\ Watt = 0{,}736\ Kilowatt} \quad \ldots\ldots \quad (275\,e)$$

$$\mathbf{1\ Kilowatt = 1{,}36\ PS} \quad \ldots\ldots \quad (275\,f)$$

Für die magnetischen und elektrischen Maße soll bloß das absolute Maßsystem herangezogen werden.

7. **Polstärke.** Sind zwei magnetische Pole $M \ldots r\ cm$ entfernt, so ziehen (stoßen) sie sich mit

$$P = \frac{M^2}{r^2}\ \text{Dyn}$$

an (ab). Daher findet man $\quad M = r\sqrt{P}$

also M als ein Produkt aus einer Länge und der Wurzel aus einer Kraft.

Die Einheit von M ist somit $\ldots cm \cdot \sqrt{cm \cdot g \cdot sek^{-2}}$ oder

$$\textbf{Einheit der Polstärke} \ldots \boldsymbol{cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}} \quad \ldots \quad (276)$$

7a. **Intensität des magnetischen Feldes oder magnetische Feldstärke.** Ein magnetisches Feld hat die Intensität 1, wenn es einen Einheitspol mit 1 Dyn anzieht. Wird ein Pol mit der Stärke M in ein Feld von der Intensität H gebracht, so ist die Anziehung

$$P = M \cdot H$$

Die Einheit von H ist daher $\frac{P}{M}$, d. h.

$$\frac{cm \cdot g \cdot sek^{-2}}{cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}} \text{ oder}$$

$$\textbf{Einheit der magn. Feldstärke} \ldots \boldsymbol{cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}} \quad \ldots \quad (276\,a)$$

8. **Stromstärke.** Nach dem Biot-Savartschen Gesetze ist die Anziehung zwischen einem Teil eines stromdurchflossenen Leiters und einem magnetischen Pole gleich Länge des Leiterteiles mal Polstärke mal Stromstärke mal Sinus des Winkels φ, welchen der Strahl vom Pol zum Leiterteil mit diesem bildet, dividiert durch das Quadrat der Länge des genannten Strahles, also

$$P = \frac{\triangle l \cdot M \cdot i \cdot \sin\varphi}{r^2}, \text{ woraus}$$

$$i = \frac{P \cdot r^2}{\triangle l \cdot M \cdot \sin\varphi} \text{ folgt.}$$

Somit ist die Einheit von $i \ldots cm \cdot \frac{P}{M} = cm \cdot \frac{cm \cdot g \cdot sek^{-2}}{cm^{-3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}}$ oder

Einheit der Stromstärke . . . $\mathbf{cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}}$ **. . . . . . (277)**

Prakt. Einheit = 1 Ampère = $\mathbf{10^{-1} \cdot cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}}$ **. . (277a)**

9. Elektromotorische Kraft oder Spannung.

Zwischen 2 Magnetpolen liegt ein magnetisches Feld. Gehen durch 1 qcm . . . H Kraftlinien, so hat das Feld die Stärke H. Wird nun ein Leiter von der Länge l mit der Geschwindigkeit v senkrecht zur Richtung der Kraftlinien bewegt, so schneidet er in 1 Sek.

$(l \cdot v \cdot H)$ Kraftlinien

und wird infolge der Reaktionswirkung gegen die Bewegung des Leiters in diesem die elektromotorische Kraft

$$D = l \cdot v \cdot H$$

erzeugt. — D ist also Produkt aus einer Länge, einer Geschwindigkeit und einer magnetischen Feldstärke. Die Einheit von D ist daher

$$(cm) \cdot (cm \cdot sek^{-1}) \cdot (cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1})$$

Einheit der elektromot. Kraft = $\mathbf{cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-2}}$ **. . . . (278)**

Sie tritt auf, wenn ein Leiter von 1 cm Länge in der Sek. eine Kraftlinie senkrecht schneidet.

Prakt. Einheit der elektromot. Kraft =

1 Volt = $\mathbf{10^8 \cdot cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-2}}$ **. . . . . . (278a)**

10. Widerstand. Laut Ohmschem Gesetz ist

$$e = i \cdot w$$

$$w = \frac{e}{i}$$

Die Einheit des Widerstandes wird daher

$$\frac{cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-2}}{cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}}, \text{ oder}$$

Einheit des Widerstandes = $\mathbf{cm \cdot sek^{-1}}$ **. . . . (279)**

Der Widerstand hat dieselbe Benennung wie die Geschwindigkeit.

Prakt. Einheit des Widerstandes = 1 Ohm = $\mathbf{10^9 \cdot cm sek^{-1}}$ **. (279a)**

11. Elektrische Arbeit. Nach dem Jouleschen Gesetz leistet ein Strom mit der Stärke i bei einem Widerstande w in der Zeit t die Arbeit

$$A = i^2 \cdot w \cdot t$$

Daher ist die Einheit von $A \ldots (cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1})^2 \cdot cm sek^{-1} \cdot sek.$

Einheit der elektr. Arbeit = $\mathbf{cm^2 \cdot g \cdot sek^{-2}}$ **= 1 Erg . . (280)**

12. Elektrischer Effekt ist die elektrische Arbeit in der Zeiteinheit; also wird

Einheit des elektr. Effekts = $\mathbf{cm^2 \cdot g \cdot sek^{-3}}$ **= 1 Sekundenerg . (280a)**

Der elektrische Effekt 1 Watt wird von einem Strom mit 1 Ampère Stärke und 1 Volt Spannung geleistet, denn

$$1\,\text{Volt} \cdot 1\,\text{Ampère} = 10^8 \cdot cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-2} \cdot 10^{-1} \cdot cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1} = 10^7 \cdot cm^2 \cdot g \cdot sek^{-3}$$

1 Volt · 1 Ampère = 1 Voltampère = 1 Watt . . . (280b)