Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 2. Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung. Beispiele 9-18

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Geschwindigkeit in der 1. Hälfte der Rückfahrt $\frac{x-3}{2} = 1^1/_4$ **Meilen**

„ „ „ 2. „ „ „ $\frac{x-2}{2} = 1^3/_4$ „

§ 2. Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Die Zunahme der Geschwindigkeit pro eine Sekunde, die Beschleunigung, werde mit p bezeichnet. Ist die Geschwindigkeit zu Anfang der Bewegung c, so ist sie nach der ersten Sekunde $c+p$, nach der zweiten $c+2p$, endlich nach der t ten Sekunde

$$\boldsymbol{v = c + p\,t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(5)}$$

Zur Ermittlung des Weges s führt folgende Überlegung. Trägt man auf der Achse $\overline{OX}$ gleiche Zeiten (Sekunden) und in den Endpunkten der letzteren Senkrechte von der Größe der zugehörigen Geschwindigkeit auf, so ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser Senkrechten die Geschwindigkeitslinie $\overline{AB}$, Fig. 4.

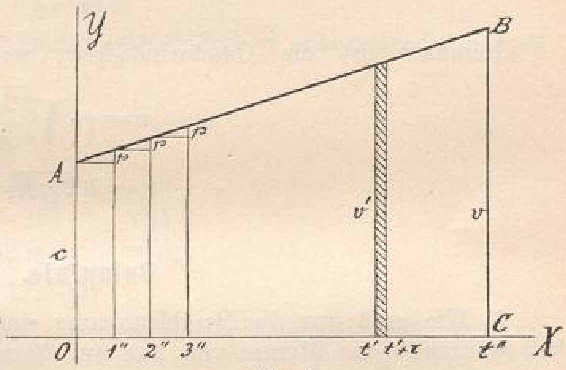

Fig. 4.

Zur Zeit t' sei eine Geschwindigkeit v' vorhanden. In der folgenden unendlich kleinen Zeit τ kann man die Bewegung gleichförmig erfolgend denken, und es stellt daher die Fläche $v' \cdot \tau$ den Weg in derselben vor. Ist nun der Weg s in t Sekunden durch lauter in unendlich kleinen Zeiten gleichförmig zurückgelegten Wegen zustande gekommen, so findet sich somit seine Größe als Maß der Fläche $OABC$, d. h. mit

$$\boldsymbol{s = \frac{v+c}{2} \cdot t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(6)}$$

„Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung kann somit ersetzt werden durch eine geradlinige, gleichförmige, deren Geschwindigkeit das arithmetische Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit der ersteren ist.“

Wird für v der Wert aus **(5)** in **(6)** substituiert, dann folgt

$$\boldsymbol{s = c\,t + \frac{p}{2} t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(7)}$$

Durch Elimination von t aus s ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Größen s, v, c und p. Aus Gleichung **(5)** ist

$$t = \frac{v-c}{p}$$

Demnach wird $s = \frac{v + c}{2} \cdot \frac{v - c}{p}$ oder

$$\boldsymbol{s = \frac{v^2 - c^2}{2p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(8)}$$

Ein frei fallender Körper macht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung; seine Beschleunigung beträgt, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, $g = 9{,}81$ m. Die Anfangsgeschwindigkeit beim freien Fall ist $c = o$. Somit sind die Formeln für die Endgeschwindigkeit und für den Weg

$$\boldsymbol{v = g \cdot t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(9)}$$

$$\text{und } \boldsymbol{s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{g}{2} t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(10)}$$

Beträgt die Fallhöhe h, dann ist laut Gleichung **(10)**

$$h = \frac{g}{2} t^2, \text{ woraus}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ sich ergibt.}$$

Demnach ist die Geschwindigkeit, welche der Körper erlangt hat,

$$v = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(11)}$$

Beispiele.

9) Wie groß war die Beschleunigung eines Punktes, dessen Geschwindigkeit während einer Minute von 2 m auf 60 m gestiegen ist?

Auflösung: $v = c + pt$

$$62 = 2 + p \cdot 60$$

$$p = \frac{62 - 2}{60}$$

$$\boldsymbol{p = 1 \text{ m}}$$

10. Wie lange muß sich ein Punkt bewegen, um von einer Anfangsgeschwindigkeit $c = 2$ m auf eine Endgeschwindigkeit $v = 14$ m bei einer Beschleunigung $p = 0{,}1$ m zu gelangen?

Auflösung: $v = c + pt$

$$t = \frac{v - c}{p} = \frac{14 - 2}{0{,}1} = \frac{12}{0{,}1} = 120 \text{ Sek.}$$

$$\boldsymbol{t = 2 \text{ Min.}}$$

11. Die Anfangsgeschwindigkeit eines Punktes beträgt $c = 10$ m, seine Endgeschwindigkeit ist $v = 20$ m. — Wie lange braucht er, um einen Weg von $s = 2250$ m zurückzulegen?

Auflösung: $$s = \frac{v + c}{2} \cdot t$$

$$2250 = \frac{20 + 10}{2} \cdot t = 15\,t$$

$$t = \frac{2250}{15}$$

$$\boldsymbol{t = 150\ \text{Sek.} = 2^1/_2\ \text{Min.}}$$

12. Eine Lokomotive fährt in 4 Minuten auf eine Geschwindigkeit von 24 m/Sek. an. Wie groß ist ihre mittlere Beschleunigung?

Auflösung: $$v = c + pt$$

$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{24 - 0}{240}$$

$$\boldsymbol{p = 0{,}1\ \text{m}}$$

13. Ein Körper wird 2,15 m hoch gehoben und dann frei fallen gelassen. Mit welcher Geschwindigkeit langt er in der Anfangslage an?

Auflösung: $$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}15}$$

$$\boldsymbol{v = 6{,}5\ \text{m}}$$

14. Welche Höhe hat ein mit 15 m Geschwindigkeit ankommender Körper durchfallen?

Auflösung: $$v = \sqrt{2gh}$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$h = \frac{15^2}{2 \cdot 9{,}81} = \frac{225}{19{,}62}$$

$$\boldsymbol{h = 11{,}45\ \text{m}}$$

15. Wie verhalten sich die in einzelnen, gleichen Zeiten zurückgelegten Wege einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null?

Auflösung: Die Wege nach 0, 1, 2, 3 .... Sekunden sind 0, $\frac{p}{2} \cdot 1$, $\frac{p}{2} \cdot 4$, $\frac{p}{2} \cdot 9$ ...., daher die Wege in der 1., 2., 3. .... Sekunde $\frac{p}{2}$, $\frac{3}{2}p$, $\frac{5}{2}p$ .... — Demnach verhalten sich die in einzelnen, gleichen Zeiten zurückgelegten Wege wie $$\frac{p}{2} : \frac{3}{2} : \frac{5}{2}p : \ldots \text{ oder wie}$$

$$\boldsymbol{1 : 3 : 5 : \ldots}, \text{ d. h.}$$

wie die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen.

16. Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null ist der Weg in der fünften Sekunde 18 m; wie groß ist derselbe in der siebenten Sekunde?

Auflösung: $$18 : x = 9 : 13$$

$$x = \frac{18 \cdot 13}{9} = 2 \cdot 13$$

$$\boldsymbol{x = 26\ \text{m}}$$

17. Zwei Körper bewegen sich von zwei $d = 205$ m entfernten Orten gegeneinander. Der erstere hat die Anfangsgeschwindigkeit $c_1 = 10$ m und die Beschleunigung $p_1 = 7$ m, der zweite die Anfangsgeschwindigkeit $c_2 = 6$ m und die Beschleunigung $p_2 = 3$ m. — Wann und wo treffen sie sich?

Auflösung: $$c_1 t + \frac{p_1}{2} t^2 + c_2 t + \frac{p_2}{2} t^2 = d$$

$$10 t + \frac{7}{2} t^2 + 6 t + \frac{3}{2} t^2 = 205$$

$$16 t + 5 t^2 = 205$$

$$t^2 + 3{,}2 t - 41 = 0$$

$$t = 1{,}6 \pm \sqrt{2{,}56 + 41} = - 1{,}6 \pm \sqrt{43{,}56}$$

$$t = - 1{,}6 \pm 6{,}6$$

Die brauchbare Lösung ist $\boldsymbol{t = 5}$ **Sek.**

Der erste Körper ist dann von A entfernt um $x = 10 \cdot 5 + \frac{7}{2} \cdot 25$, d. h. um

$$\boldsymbol{x = 137{,}5} \textbf{ m}$$

18. Ein Stein fällt in einen Schacht. Nach $t = 6{,}33$ Sekunden hört man das Auffallen des Steines. Wie tief ist der Schacht, wenn die Schallgeschwindigkeit $c = {}^1/_3$ km/sek. beträgt?

Auflösung:

Die Zeit für den Weg des Schalles ist aus $x = c \cdot t_1 \; \ldots \; t_1 = \frac{x}{c}$.

Die Zeit für den Weg des Steines ist aus $x = \frac{g}{2} t_2^2 \; \ldots \; t_2 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$.

Demnach wird $$\frac{x}{c} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t$$

$$\frac{2x}{g}\left(t - \frac{x}{c}\right)^2$$

$$\frac{2x}{g} = t^2 - 2t \cdot \frac{x}{c} + \frac{x^2}{c^2}$$

$$x^2 - 2tc \cdot x - \frac{2c^2}{g} x + t^2 \cdot c^2 = 0.$$

Werden die Längen in km eingesetzt, so ergibt sich

$$x^2 - 2 \cdot 6{,}33 \cdot \frac{1}{3} x - \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 0{,}00981} x + \frac{6{,}33^2 \cdot 1}{9} = 0$$

$$x^2 - 4{,}22 x - 22{,}65 + 4{,}4521 = 0$$

$$x = 13{,}435 \pm \sqrt{180{,}4992 - 4{,}4521}$$

$$x = 13{,}435 \pm \sqrt{176{,}0471}$$

$$x = 13{,}435 \pm 13{,}268.$$

Bedeutung hat nur das Minuszeichen; daher

$$x = 0{,}167 \text{ km} \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{x = 167} \textbf{ m}$$