



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Abschnitt IX. Die Trägheits- und Centrifugalmomente der wichtigsten Körper.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Abschnitt IX.

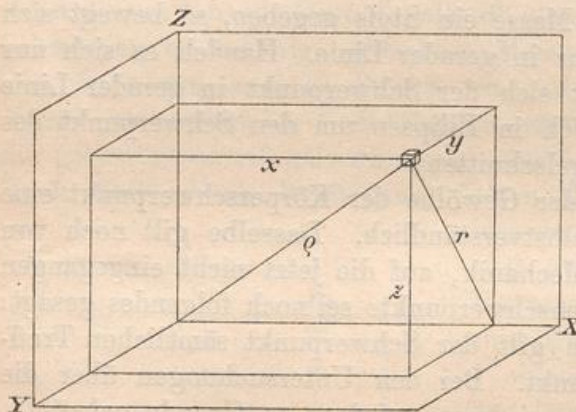
Die Trägheits- und Centrifugal-Momente der wichtigsten Körper.

A. Allgemeines.

334) Während der vorige Abschnitt die polaren, die axialen und die Plan-Momente erster Ordnung behandelte, sollen hier die entsprechenden Momente zweiter Ordnung abgeleitet werden. Die für die Mechanik wichtigsten sind, wie sich zeigen wird, die

axialen, während die Planmomente zur Berechnung der ersteren verwendet werden können.

Fig 249.



335) Begriff des Planmomentes zweiter Ordnung.

Ist m ein kleines Körperteilchen (in der Mechanik ein Massenteilchen), welches von den Koordinatenebenen die Abstände x, y, z hat, so nennt man mx^2, my^2, mz^2 die Planmomente

zweiter Ordnung des Massenteilchens in Bezug auf die entsprechenden Koordinatenebenen, die als die Ebene YZ, ZX und XY bezeichnet werden mögen. Handelt es sich um einen Körper, so ist sein Trägheitsmoment eine Summe solcher Ausdrücke, also

$$T_{yz} = \sum mx^2, \quad T_{zx} = \sum my^2, \quad T_{xy} = \sum mz^2.$$

Dabei beziehen sich die Marken der T auf die Ebenen. Die T sind die Planmomente zweiter Ordnung oder die Trägheitsmomente in Bezug auf die drei Grundebenen des Koordinatensystems.

336) Begriff des Axialmomentes zweiter Ordnung.

Ist r der Abstand eines Körperteilchens m von der X-Achse, so ist mr^2 das Axialmoment zweiter Ordnung oder das axiale Trägheitsmoment des Teilchens in Bezug auf diese Achse. Für den ganzen Körper ist

$$T_x = \sum mr^2$$

das axiale Trägheitsmoment oder das Axialmoment zweiter Ordnung für diese Achse.

Da $r^2 = y^2 + z^2$ ist, so folgt $mr^2 = my^2 + mz^2$, also auch

$$\sum mr^2 = \sum my^2 + \sum mz^2,$$

oder

$$T_x = T_{zx} + T_{xy},$$

ebenso ist

$$T_y = T_{xy} + T_{yz}, \quad T_z = T_{yz} + T_{zx}.$$

Also:

Jedes axiale Trägheitsmoment ist gleich der Summe zweier Planmomente zweiter Ordnung in Bezug auf Ebenen, die sich in der Achse des ersten Momentes rechtwinklig schneiden.

337) Begriff des Polarmomentes zweiter Ordnung.

Ist ρ der Abstand des Körperteilchens m vom Nullpunkte des Koordinatensystems, so ist $m\rho^2$ sein Polarmoment zweiter Ordnung in Bezug auf diesen Punkt. Für den ganzen Körper ist

$$T_p = \sum m\rho^2$$

das polare Trägheitsmoment oder das Polarmoment zweiter Ordnung in Bezug auf jenen Punkt.

Nun ist aber $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, folglich auch

$$m\rho^2 = mx^2 + my^2 + mz^2,$$

ebenso

$$\sum m\rho^2 = \sum mx^2 + \sum my^2 + \sum mz^2,$$

also

$$T_p = T_{yz} + T_{zx} + T_{xy}.$$

Folglich:

Jedes Polarmoment zweiter Ordnung ist die Summe von drei Planmomenten, deren Ebenen durch den Pol des ersten Momentes gehen und dabei auf einander senkrecht stehen.

Natürlich ist auch

$$T_p = T_{yz} + T_x = T_{zx} + T_y = T_{xy} + T_z,$$

was auch leicht in Worte zu kleiden ist.

338) Verschiebungssatz für das Planmoment zweiter Ordnung.

Handelt es sich um das Planmoment $T_s = \sum mx^2$, wobei die Ebene YZ durch den Schwerpunkt des Körpers gehen soll, und verschiebt man die Ebene parallel zu sich selbst um $\pm e$, so geht der Abstand x über in $x \mp e$, also wird das neue Trägheitsmoment

$$T_1 = \sum m(x \mp e)^2 = \sum mx^2 + \sum me^2 \mp \sum 2mex,$$

oder in

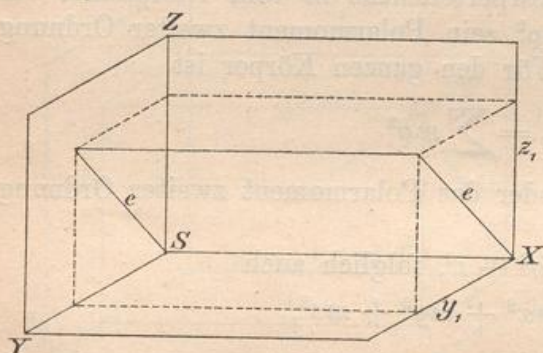
$$T_1 = \sum mx^2 + e^2 \sum m \mp 2e \sum mx.$$

Hier ist $\sum mx^2$ das ursprüngliche Trägheitsmoment T_s , $e^2 \sum m = e^2 J$ das Produkt aus dem Körperinhalte und dem Quadrate der Verschiebungstrecke, $\sum mx$ das statische Moment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende YZ -Ebene, also gleich Null, so daß man hat

$$T_1 = T_s + e^2 J.$$

Folglich gilt der Satz: Verschiebt man die Ebene des Trägheitsmomentes aus der Schwerpunktslage um $\pm e$, so wächst es um $e^2 J$, d. h. um das Produkt aus dem Körperinhalte und dem Quadrate der Verschiebungstrecke.

Fig. 250.



339) Verschiebungssatz für das axiale Trägheitsmoment.

Ist T_s das axiale Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, z. B. die X -Achse in Fig. 250

und verschiebt man die Achse um $\pm e$, so verwandeln sich die Koordinaten y und z in $(y - y_1)$ und $(z - z_1)$, und

$$T_s = \sum my^2 + \sum mz^2 = T_{zx} + T_{xy}$$

geht über in

$$T_1 = \sum m(y - y_1)^2 + \sum m(z - z_1)^2$$

oder in

$$T_1 = \sum my^2 + \sum my_1^2 - \sum 2myy_1 + \sum mz^2 + \sum mz_1^2 - \sum 2mzz_1.$$

Wie im vorigen Abschnitte wird $\sum 2myy_1 = 0$ und $\sum 2mzz_1 = 0$,
dagegen

$$\sum my_1^2 = y_1^2 \sum m = y_1^2 J \quad \text{und} \quad \sum mz_1^2 = z_1^2 \sum m = z_1^2 J.$$

Man erhält also

$$T_1 = T_{zx} + y_1^2 J + T_{xy} + z_1^2 J = (T_{zx} + T_{xy}) + J(y_1^2 + z_1^2) = T_s + J e^2.$$

Folglich gilt der Satz: Verschiebt man die Achse eines Trägheitsmomentes aus der Schwerpunktslage um e , so wächst das Trägheitsmoment um das Produkt aus dem Inhalte und dem Quadrate der Verschiebungsstrecke.

340) Der Satz $T_1 = T_s + e^2 J$ gilt auch vom Polarmomente zweiter Ordnung. Der Beweis ergibt sich ebenso, wie vorher aus

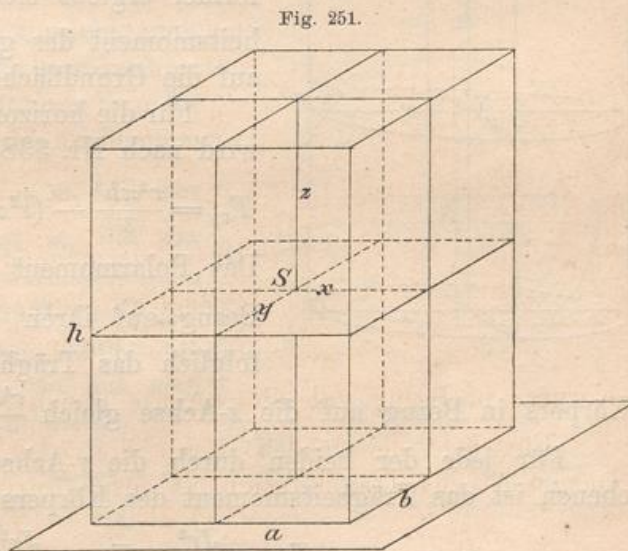
$$T_1 = \sum m(x - x_1)^2 + \sum m(y - y_1)^2 + \sum m(z - z_1)^2,$$

was sich auf $T_s + e^2 J$ reduziert.

B. Die einfachsten Formen, besonders von der Ordnung Null.

341) **Aufgabe.** Die wichtigsten Trägheitsmomente des Rechteckskörpers zu berechnen.

Auflösung. Sind a , b und c die drei Kanten, so hat in Fig. 251 jeder Horizontalschnitt die Fläche ab und in Bezug auf die Grundfläche, wenn y der Abstand ist, das Trägheitsmoment aby^2 . Dies giebt, wenn man die Schichtenformel anwendet, für den ganzen Körper das Planmoment $ba \frac{c^3}{3}$ oder $J \frac{c^2}{3}$.



Für die parallele Schwerpunktschichtebene wird nach Nr. 338

$$T_s = J \frac{c^2}{3} - J \left(\frac{c}{2}\right)^2 = J \frac{c^2}{12} = \frac{abc^3}{12}.$$

In Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenebenen ist also

$$T_{xy} = \frac{abc^3}{12}, \quad T_{yz} = \frac{bca^3}{12}, \quad T_{zx} = \frac{cab^3}{12}.$$

Die Axialmomente für die durch S gehenden Koordinatenachsen werden

$$T_x = T_{zx} + T_{xy} = \frac{cab^3}{12} + \frac{abc^3}{12} = \frac{abc}{12} (b^2 + c^2) = \frac{J}{12} (b^2 + c^2),$$

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{abc^3}{12} + \frac{bca^3}{12} = \frac{abc}{12} (c^2 + a^2) = \frac{J}{12} (c^2 + a^2),$$

$$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \frac{bca^3}{12} + \frac{cab^3}{12} = \frac{abc}{12} (a^2 + b^2) = \frac{J}{12} (a^2 + b^2).$$

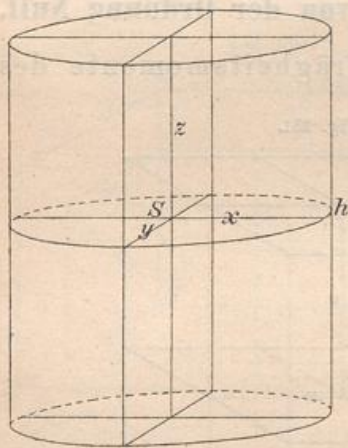
Das Polarmoment für den Schwerpunkt wird

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{abc}{12} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{J}{12} d^2,$$

wo d die Hauptdiagonale ist.

324) **Aufgabe.** Die wichtigsten Trägheitsmomente für den Kreiscylinder zu berechnen.

Fig. 252.



In Fig. 252 ist jeder Horizontalschnitt gleich $r^2\pi$, sein Trägheitsmoment beim Abstände y von der Grundfläche ist in Bezug auf diese gleich $r^2\pi y^2$. Nach der Schichtenformel ergibt sich $\frac{r^2\pi h^3}{3} = \frac{Jh^2}{3}$ als Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die Grundfläche.

Für die horizontale Schwerpunktschicht wird nach Nr. 338

$$T_{xy} = \frac{r^2\pi h^3}{3} - (r^2\pi h) \left(\frac{h^2}{2}\right) = \frac{r^2\pi h^3}{12} = \frac{Jh^2}{12}.$$

Das Polarmoment der Grundfläche ist in Bezug auf ihren Mittelpunkt gleich $\frac{r^4\pi}{2}$, folglich das Trägheitsmoment des ganzen

Körpers in Bezug auf die z -Achse gleich $\frac{r^4\pi h}{2} = \frac{Jr^2}{2} = T_z$.

Für jede der beiden durch die z -Achse gelegten Koordinatenebenen ist das Trägheitsmoment des Körpers halb so groß, also

$$T_{zx} = \frac{Jr^2}{4}, \quad T_{yz} = \frac{Jr^2}{4}.$$

Für die durch S gehende x -Achse ist

$$T_x = T_{zx} + T_{xy} = \frac{Jr^2}{4} + \frac{Jh^2}{12} = \frac{J}{12} (3r^2 + h^2),$$

für die y -Achse durch S ist ebenso

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{4} = \frac{J}{12} (3r^2 + h^2).$$

Das Polarmoment zweiter Ordnung für S ist

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{4} + \frac{Jr^2}{4} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{2} = \frac{J}{12} (h^2 + 6r^2).$$

Mechanische Aufgaben über den Cylinder siehe unter Nr. 84, 86, 89, 93, 94, 96 bis 106, wo es sich um Säulen, Achsen und Triebwellen, um schwingende Pendel u. dgl. handelt.

343) Das wichtigste Axialmoment des Hohlcylinders mit den Radien r und r_1 .

Für den Kreisring ist das polare Trägheitsmoment $\frac{r^4\pi}{2} - \frac{r_1^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (r^2 - r_1^2)(r^2 + r_1^2) = \frac{F}{2} (r^2 + r_1^2)$, das entsprechende Axialmoment des Cylinders ist also $\frac{Fh}{2} (r^2 + r_1^2) = \frac{J}{2} (r^2 + r_1^2)$. In der Mechanik ist statt J die Masse $m = \frac{p}{g}$ einzusetzen, wo p in Kilogrammen, $g = 9,81$ in Metern gegeben werden kann. (Besser ist es, mit Tonnen und Metern zu rechnen.)

Hierzu vergleiche man die Aufgaben unter 86, 88, 90 über hohle Achsen, Hohlsäulen, Schleif- oder Mühlsteine und Schwungringe.

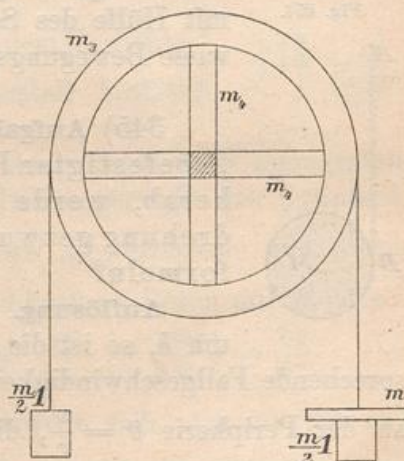
344) Das Gegebene reicht auch hin, in die Theorie der Atwoodschen Fallmaschine einzuführen.* Ist nämlich m die Masse des treibenden Übergewichtes, $2\left(\frac{m_1}{2}\right) = m_1$ die der beiden Schleppgewichte, m_3 die des Ringes, m_4 die jedes durchgehenden Radarmes, wobei der schraffierte Körper doppelt genommen ist, wofür die Achse weggelassen ist, so hat man als gesamtes Trägheitsmoment

$$(m + m_1) r^2 + 2 \cdot \frac{m_4 d_1^2}{12} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2},$$

denn die aufgehängten Gewichte bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit, als ob sie am Rande des Kreises angebracht wären, so

*) Dieses und die folgenden Beispiele aus der Dynamik können auch an Nr. 43 angeschlossen werden.

Fig. 253.



dafs der Widerstand durch $(m + m_1) r^2$ dargestellt ist. Für obiges kann man schreiben

$$T = (m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2},$$

denn die Flächendiagonale d_1 des Rechtecks ist gleich $2 r_1$. Das statische Moment der Triebkraft ist $p = mg$. Die Beschleunigung am Radius 1 wird nach der Mechanik

$$\gamma = \frac{\text{stat. Moment der Triebkraft}}{\text{gesamtes Trägheitsmoment}} = g \frac{m r}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

Die Beschleunigung am Radius r ist r -mal so groß, also hat das treibende Übergewicht die Beschleunigung

$$g_1 = g \frac{m r^2}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

Die Fallbewegung des Übergewichtes geschieht nach den Formeln $v = g_1 t$, $h = \frac{1}{2} g_1 t^2$, $v = \sqrt{2 g_1 h}$. Die Fadenspannung des rechts hängenden Fadens ist $(m + \frac{m_1}{2})(g - g_1)$, die des links hängenden $\frac{m_1}{2}(g + g_1)$, die Reibung hat die Differenz beider Spannungen zu überwinden, wenn kein Gleiten stattfinden soll.

Fig. 254.



Einige Beispiele werden zeigen, wie leicht sich jetzt mit Hilfe des Satzes von der Erhaltung der Arbeit gewisse Bewegungsprobleme ansetzen lassen.

345) **Aufgabe.** Ein Cylinder, um den ein bei A befestigter Faden gewickelt ist, falle senkrecht herab, werde aber durch den Faden zur Umdrehung gezwungen. Welches sind die Bewegungsgleichungen?

Auflösung. Ist sein Gewicht p , und senkt er sich um h , so ist die Arbeit der Schwerkraft ph . Ist die entsprechende Fallgeschwindigkeit v , so ist die Drehungsgeschwindigkeit an der Peripherie $\vartheta = \frac{v}{r}$, die Arbeitswucht (Energie) also

$$A = \frac{m v^2}{2} + T \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m r^2}{2} \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4} m v^2.$$

Ebenso groß muß die geleistete Arbeit ph oder mgh sein. Aus $mgh = \frac{3}{4} m v^2$ folgt $v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = \sqrt{2 \left(\frac{2}{3} g\right) h}$, während die ent-

sprechende Formel beim freiem Falle lautet $\sqrt{2gh}$. An Stelle von g tritt also hier $\frac{2}{3}g$, die drei Fallformeln sind demnach hier

$$v = \frac{2}{3}gt, \quad h = \frac{1}{2} \frac{2}{3}gt^2 = \frac{gt^2}{3}, \quad v = \sqrt{2 \left(\frac{2}{3}g\right)h}.$$

Durch den Drehungszwang wird also die Fallgeschwindigkeit für jeden Zeitpunkt auf $\frac{2}{3}$ der freien Fallgeschwindigkeit herabgesetzt.

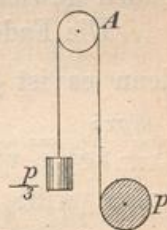
Wie groß ist die Fadenspannung bei diesem Beispiele? Es ist $g - g_1 = g - \frac{2}{3}g = \frac{g}{3}$, die Spannung also $m \frac{g}{3} = \frac{p}{3}$. Oder wenn man den Vorgang eingehender analysieren will: Die Fadenspannung ist die Kraft, welche die Drehung hervorruft. Die Beschleunigung der letzteren ist am Rande $\frac{2}{3}g$, am Radius 1 also $\gamma = \frac{2g}{3r}$. Gleichzeitig ist aber

$$\gamma = \frac{\text{Moment der Kraft}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{p_1 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p_1}{mr},$$

wo p_1 die drehende Kraft ist. Es folgt $\frac{2p_1}{mr} = \frac{2g}{3r}$, d. h. $p_1 = \frac{mg}{3} = \frac{p}{3}$.

Die Fadenspannung beträgt also nur den dritten Teil des Cylindergewichtes. Dieses Resultat soll später zur Aufklärung über gewisse Reibungsverhältnisse benutzt werden. Statt den Faden bei A zu befestigen, kann man ihn dort über eine leicht bewegliche Rolle legen und durch das Gewicht $\frac{p}{3}$ anspannen. Der am Faden herabrollende Cylinder p hält dann dem Gewichte $\frac{p}{3}$ das Gleichgewicht, wie leicht experimentell bestätigt werden kann.

Fig. 255.



Gewöhnlich wird die behandelte Aufgabe anders angegriffen. Man betrachtet B als augenblicklichen Drehungspunkt des Cylinders, so daß das Trägheitsmoment $\frac{mr^2}{2}$ um mr^2 zu vermehren und gleich $\frac{3}{2}mr^2$ zu setzen ist. Das Moment der Triebkraft in Bezug auf B ist pr , also ist die Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{pr}{\frac{3}{2}mr^2} = \frac{2mgr}{3mr^2} = \frac{2g}{3r}$. Der Punkt M befindet sich am Radius r , bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $g_1 = \frac{2g}{3r}r = \frac{2}{3}g$. Das Resultat ist dasselbe wie oben.

346) Noch stärker läßt sich der Fall verlangsamen, wenn der Faden nicht um die Scheibe oder den Cylinder, sondern um eine Achse mit dem kleineren Radius ρ gewunden wird. (Vgl. Nr. 93.)

Ist die Fallgeschwindigkeit v , so ist jetzt die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = \frac{v}{\rho}$. Vernachlässigt man das Gewicht der Achse, welches einzurechnen übrigens keine Schwierigkeiten macht, so wird die Arbeitswucht

$$A = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{v}{\rho}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{r^2 + 2\rho^2}{2\rho^2}.$$

Setzt man dies gleich der Arbeit ph der Schwerkraft, d. h. $= mgh$, so folgt

$$v = \sqrt{2 \left(g \frac{2\rho^2}{r^2 + 2\rho^2} \right) h}.$$

An Stelle von g in der Freifallformel $v = \sqrt{2gh}$ tritt also

$$g_1 = g \cdot \frac{2\rho^2}{r^2 + 2\rho^2},$$

was als Beschleunigung in die drei Bewegungsformeln einzuführen ist. Macht man z. B. $r = 10\rho$, so wird $g_1 = g \frac{2\rho^2}{100\rho^2 + 2\rho^2} = \frac{g}{51}$. Die Fallgeschwindigkeit wird also der 51. Teil der Freifallgeschwindigkeit. (Entsprechende Versuche über Unterrichtszwecke lassen sich mit dem Rade der Atwoodschen Fallmaschine machen, um deren Achse man Fäden gewickelt hat.)

Die Fadenspannung wird hier gröfser als bei der vorigen Aufgabe, denn es ist $g - g_1 = g - g \frac{2\rho^2}{r^2 + 2\rho^2} = \frac{gr^2}{r^2 + 2\rho^2}$, also die Spannung $\frac{mgr^2}{r^2 + 2\rho^2} = \frac{pr^2}{r^2 + 2\rho^2}$. Oder, wenn man die obige Betrachtung wiederholen will: Aus $g_1 = g \frac{2\rho^2}{r^2 + 2\rho^2}$ folgt als Winkelbeschleunigung (am Radius 1) $\gamma = \frac{g_1}{\rho} = \frac{2gr}{r^2 + 2\rho^2}$. Dieselbe Winkelbeschleunigung wird durch die Fadenspannung p_1 hervorgerufen, so dafs auch

$$\gamma = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{p_1 \rho}{\frac{mr^2}{2}}$$

ist. Aus der Gleichsetzung der rechten Seiten ergibt sich die Fadenspannung

$$p_1 = \frac{mgr^2}{r^2 + 2\rho^2} = \frac{pr^2}{r^2 + 2\rho^2}.$$

Ist z. B. $r = 10\rho$, so folgt $p_1 = \frac{50}{51}p$, wo p das Cylindergewicht ist.

Man bemerkt, dafs bei der Herabsetzung der Freifallbeschleunigung von g auf $\frac{1}{51}g$ die Fadenspannung um $\frac{1}{51}$ des Gewichtes vermindert wird. Dies bestätigt die obige Bemerkung über den Ausdruck $m(g - g_1)$.

Der Grund, weshalb wir auf die Fadenspannung überhaupt eingehen, wird sich aus der folgenden Aufgabe ergeben.

347) Der Cylinder ist wiederum mit einem Faden umwickelt. Das Ende desselben sei aber bei A an der schiefen Ebene mit Neigung α befestigt, auf welcher der Cylinder herabrollen soll. Beschleunigung und Fadenspannung sollen berechnet werden, ohne dass die Reibung berücksichtigt wird.

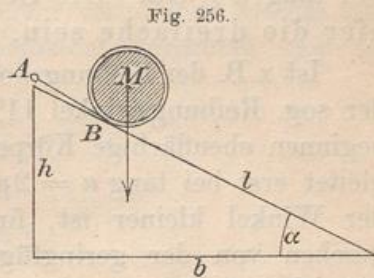


Fig. 256.

Beim senkrechten Fall ergab sich unter Drehungszwang $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}g\right)h}$. Man braucht nur $l \sin \alpha$ für h zu setzen,

um hier $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}g\right)l \sin \alpha}$ zu finden, so dass an Stelle von $g_1 = \frac{2}{3}g$ jetzt $g_1 = \frac{2}{3}g \sin \alpha$ als Beschleunigung tritt. Man kann aber auch so, wie vorher, die Gleichung der Erhaltung der Arbeit benutzen, oder auch B als Drehungspunkt betrachten. Das statische Moment der Schwerkraft in Bezug auf B ist dann $pr \sin \alpha$, das Trägheitsmoment aber $\frac{mr^2}{3} + mr^2 = \frac{2}{3}mr^2$. Es folgt die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{pr \sin \alpha}{\frac{2}{3}mr^2} = \frac{\frac{2}{3}g \sin \alpha}{r},$$

also für M , d. h. für den Radius r , das r -fache oder $g_1 = \frac{2}{3}g \sin \alpha$.

Die Drehung wird, wenn keine Reibung vorhanden ist, durch die Fadenspannung p_1 hervorgerufen, so dass auch ist: $\gamma = \frac{p_1 r}{mr^2} = \frac{2p_1}{mr}$. Gleichsetzung beider Ausdrücke für γ giebt

$$p_1 = \frac{mg \sin \alpha}{3} = \frac{p \sin \alpha}{3}.$$

348) Diese Fadenspannung giebt uns an, wie groß die Reibung mindestens sein muss, um das Herabgleiten zu verhindern und die Cylinderbewegung zu einer rein rollenden zu machen.

Ist also der Reibungskoeffizient für Gleitung μ , die Reibung selbst also hier $\mu p \cos \alpha$, so ist im vorliegenden Falle $\mu p \cos \alpha = \frac{p \sin \alpha}{3}$, d. h.

$$\mu = \frac{1}{3} \tan \alpha.$$

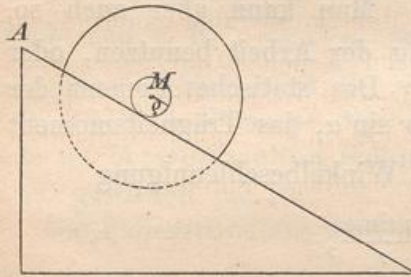
Bei den gleitenden Körpern ist bekanntlich der Koeffizient $\mu = \tan \alpha$; man hat also für den rollenden Cylinder das

bemerkenswerte Resultat, dass sein Gleiten schon durch den dritten Teil derjenigen Reibung verhindert wird, die einen nicht rollenden Körper vom Gleiten abhält. Mit anderen Worten: Bei nicht rollenden Körpern findet das Gleiten bereits statt bei $\tan \alpha \leq \mu$, bei dem rollenden Cylinder erst bei $\tan \alpha \geq 3\mu$. Die Steigung der schiefen Ebene darf also hier die dreifache sein, ohne dass Gleitung stattfindet.*)

Ist z. B. der Reibungskoeffizient $\mu = 0,2$, so folgt aus $\tan \alpha = 0,2$ der sog. Reibungswinkel $11^\circ 18' 40''$. Sobald die Neigung größer ist, beginnen ebenflächige Körper zu gleiten. Der rollende Cylinder aber gleitet erst bei $\tan \alpha = 2\mu = 0,6$, d. h. bei $\alpha = 30^\circ 57' 50''$. Sobald der Winkel kleiner ist, findet lediglich ein Rollen statt, und abgesehen von der geringfügigen rollenden Reibung gelten die oben entwickelten Bewegungsformeln. Ist dagegen die Neigung größer, so

findet Rollen und Gleiten zugleich statt. Dies ist ein ganz anderer Fall mit besonderen Bewegungsgleichungen. Später soll auf diesen schwierigen Fall noch eingegangen werden.

Fig. 257.



349) Das obige Resultat ändert sich sofort, wenn der Cylinder unter Auflagerung auf eine Achse auf der schiefen Ebene herabrollt.

Zunächst werde hier wiederum die Reibung weggedacht, dafür aber ein Faden, der bei A befestigt ist, um die Achse gewunden. Nach Art der obigen Entwicklung erhält man als Beschleunigung des Punktes M

$$g_1 = g \sin \alpha \frac{2q^2}{r^2 + 2q^2},$$

als Winkelbeschleunigung (am Radius 1) also

$$\gamma = \frac{g_1}{q} = \frac{2g \sin \alpha q}{r^2 + 2q^2}.$$

Die Fadenspannung p_1 am Radius q giebt aber für dasselbe γ den Wert

$$\gamma = \frac{p_1 q}{m r^2} = \frac{2 p_1 q}{m r^2}.$$

*) In mehreren Lehrbüchern und Abhandlungen finden sich in dieser Beziehung irrtümliche Ableitungen, die auf der falschen Annahme fußen, dass der Reibungswinkel derselbe bliebe.

Aus der Gleichsetzung beider Werte ergibt sich als Fadenspannung

$$p_1 = \frac{m g r^2 \sin \alpha}{r^2 + 2 \varrho^2} = \frac{p \sin \alpha r^2}{r^2 + 2 \varrho^2}.$$

Ist z. B. $r = 10 \varrho$, so wird $p_1 = p \sin \alpha \frac{50}{51}$. Ebenso groß muß die gleitende Reibung sein, wenn das Gleiten verhindert werden und bloßes Rollen stattfinden soll. Der Koeffizient berechnet sich für den Grenzfall aus

$$\mu p \cos \alpha = \frac{p \sin \alpha r^2}{r^2 + 2 \varrho^2},$$

also

$$\mu = \frac{r^2}{r^2 + 2 \varrho^2} \tan \alpha,$$

im gewählten Beispiele also $\alpha = \frac{50}{51} \tan \alpha$, so daß der Grenzwinkel aus $\tan \alpha = \frac{51}{50} \mu$ zu berechnen ist.

Ist z. B. wieder $\mu = 0,2$, so wird der Grenzwinkel, wie aus $\tan \alpha = \frac{51}{50} \cdot 0,2$ folgt, $\alpha = 11^\circ 31' 50''$, während er für nur gleitende Körper war: $11^\circ 18' 40''$. Der Unterschied ist also jetzt ein weit weniger auffallender als bei dem einfach aufliegenden Cylinder, wo der eine Winkel fast dreimal so groß war als der andere.

Ein entsprechender Versuch kann wieder gemacht werden, indem man das Rad der Atwoodschen Fallmaschine mit der Achse auf zwei parallel gestellte Lineale legt und so auf schiefer Ebene herabrollen läßt. Angenommen, der Reibungskoeffizient wäre 0,2, so würde bei α größer als $11^\circ 31' 50''$ fast nur ein Herabgleiten, kaum ein Rollen bemerkbar sein, während ein Cylinder noch bei nahe $30^\circ 58'$ einfach herabrollen würde. Für $\varrho = 0$, d. h. für unendlich dünne Achsen, hört der Unterschied ganz auf.

Versuche dieser Art sind mit so einfachen Hilfsmitteln durchzuführen und werfen so überraschendes Licht auf die entsprechenden Punkte der Bewegungslehre und der Reibungstheorie, daß ihre Nichtberücksichtigung in den Lehrbüchern eine erhebliche Lücke bedeutet.

350) Nur noch ein Beispiel für die schiefe Ebene sei angegeben: das der herabrollenden Kugel unter dem Einflusse der Reibung oder des um den größten Kreis gelegten Fadens. Das Trägheitsmoment der Kugel war schon in Nr. 174 abgeleitet worden. Die Arbeitsgleichung würde hier lauten

$$A = p l \sin \alpha = \frac{m v^2}{2} + \left(\frac{2}{5} m r^2 \right) \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \left(\frac{2}{5} m r^2 \right) \frac{\left(\frac{v}{r} \right)^2}{2} = \frac{7}{5} \frac{m v^2}{2}.$$

Aus der Gleichung folgt als Geschwindigkeit des Mittelpunktes

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{5}{7} g \sin \alpha \right) l},$$

als Beschleunigung desselben also $g_1 = \frac{5}{7} g \sin \alpha$, sodafs die Winkelbeschleunigung ist

$$\gamma = \frac{5 g \sin \alpha}{7 r}.$$

Die Fadenspannung p_1 giebt aber die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{p_1 r}{T} = \frac{p_1 r}{\frac{2}{5} m r^2} = \frac{5 p_1}{2 m r}.$$

Gleichsetzung beider Werte bestimmt die Fadenspannung als

$$p_1 = \frac{2}{7} p \sin \alpha.$$

Ersetzt man für den Grenzfall p_1 wieder durch die Reibung, so folgt

$$\mu p \cos \alpha = \frac{2}{7} p \sin \alpha,$$

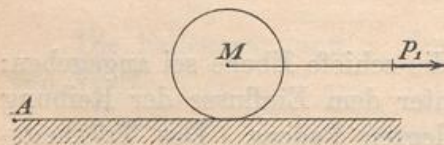
d. h. $\mu = \frac{2}{7} \tan \alpha$ und $\tan \alpha = \frac{7}{2} \mu$.

Daraus ergeben sich wiederum entsprechende Folgerungen. Beim Reibungskoeffizienten $\mu = 0,2$ würde $\tan \alpha = \frac{7}{2} 0,2 = 0,7$ den Grenzwinkel $\alpha = 34^\circ 39' 30''$ (statt $11^\circ 18' 40''$) für das blofse Rollen ergeben.

351) Da die Lehrbücher elementaren Charakters auf die entwickelten Unterschiede keine Rücksicht nehmen, kommen bisweilen gelegentlich der Reibung unmögliche Beispiele vor, durch welche die bestehenden Unklarheiten noch unterstützt werden. Fast nirgends wird

man z. B. folgende naheliegende Aufgabe gestellt oder berücksichtigt finden:

Fig. 258.



Ein Cylinder vom Gewichte p werde durch eine an seiner Achse angreifende Horizontalkraft p_1 auf horizontaler Bahn

bewegt. Wie grofs mufs die gleitende Reibung mindestens sein, damit nicht Gleitung, sondern nur Rollen entstehe?

Zunächst werde wieder von der Reibung abgesehen und das Rollen durch einen Faden, der bei A befestigt und um den Cylinder

geschlungen ist, erzwungen. Legt nun der Angriffspunkt den Weg h zurück, so ist die Arbeitsgleichung

$$A = p_1 h = \frac{mv^2}{2} + T \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \frac{(v)^2}{2} = \frac{3}{4} mv^2.$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{2}{3} \frac{p_1}{m} \right) h},$$

für den Punkt M also die Beschleunigung $g_1 = \frac{2}{3} \frac{p_1}{m}$ und demnach die Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{2}{3} \frac{p_1}{mr}$. Wie früher ist zugleich die Fadenspannung p_2 : $\gamma = \frac{p_2 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p_2}{mr}$, und durch die Gleichsetzung

$$\text{ergibt sich } \frac{2p_2}{mr} = \frac{2p_1}{3mr} \text{ oder } p_2 = \frac{p_1}{3}.$$

Wie groß also auch das Gewicht und der Radius des Cylinders seien, die Fadenspannung ist in allen Fällen der dritte Teil der Zugkraft.

Soll demnach auch ohne Faden nur Rollung ohne jedes Gleiten stattfinden, so muß die Reibung mindestens der dritte Teil der Zugkraft sein. Sie ist aber in diesem Falle μp , also ist der Minimalwert für μ zu berechnen aus $\mu p = \frac{p_1}{3}$, d. h. er ist $\mu = \frac{p_1}{3p}$.

Sobald $\mu < \frac{p_1}{3p}$ oder $p_1 > 3\mu p$ ist, findet Gleitung und Rollung zugleich statt, und ganz neue Bewegungsgleichungen sind zu bilden. Ist z. B. $\mu = 0,2$, so muß p_1 unterhalb $0,6 p$ bleiben, damit nur Rollung stattfinde.

Unter dieser Bedingung bewegt sich dann M , abgesehen von der geringfügigen rollenden Reibung, nach den Formeln

$$v = \frac{2}{3} \frac{p_1}{m} t, \quad l = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{p_1}{m} t^2, \quad v = \sqrt{2 \frac{2}{3} \frac{p_1}{m} l},$$

die Drehung aber gehorcht den Formeln

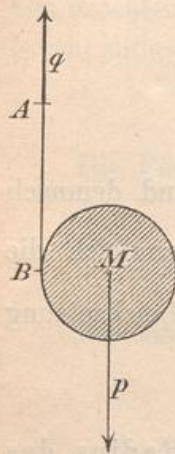
$$\vartheta = \frac{2}{3} \frac{p_1}{mr} t, \quad \omega = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{p_1}{mr} t^2, \quad \vartheta = \sqrt{2 \frac{2}{3} \frac{p_1}{mr} \omega}.$$

352) Wie aber erfolgt die Bewegung, wenn jene Bedingung nicht stattfindet, d. h. wenn $p_1 > 3\mu p$ ist?

Die Lösung ergibt sich durch folgende Hilfsaufgabe, die auch an sich nicht ohne Interesse ist.

Ein Faden sei um einen Cylinder vom Gewichte p geschlungen; er werde durch eine Kraft q bei A senkrecht nach oben gezogen. Wie bewegen sich die Punkte M und A , und wie dreht sich der Cylinder?

Fig. 259.



Auflösung. Man zerlege p in q und $p - q$. Die Kraft q und die nach oben gerichtete $(-q)$ bilden das Kräftepaar, welches den Cylinder in Drehung versetzt, die Kraft $p - q$ zieht ihn nach unten. Die Drehung erfolgt also mit der Beschleunigung $\gamma = \frac{qr}{\left(\frac{mr^2}{2}\right)} = \frac{2q}{mr}$,

also am Rande mit der Beschleunigung $g_1 = \frac{2q}{m}$. Die Senkung des Punktes M geschieht mit der Beschleunigung $g_2 = \frac{p - q}{m}$. Der Punkt B senkt sich erstens mit der Beschleunigung g_2 , steigt aber zweitens mit der Beschleunigung g_1 , seine wirkliche Beschleunigung, ebenso die von A , ist demnach

$$g_2 - g_1 = \frac{p - q}{m} - \frac{2q}{m} = \frac{p - 3q}{m}.$$

(Ist $p = 3q$, so steht A still, was mit dem früher behandelten Falle übereinstimmt.)

Es ist nicht überflüssig, auch hier den Satz von der Erhaltung der Arbeit zu prüfen. Die Arbeitswucht der bewegten Masse ist $\frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2}$. Ist h die Senkung von M , so ist $v = \sqrt{2g_2h}$, also $\frac{mv^2}{2} = mg_2h = (p - q)h$. Ist ferner ω der Drehungsweg für den Radius 1, so ist die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = \sqrt{2\gamma\omega}$, also $T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mr^2}{2} \cdot \gamma\omega = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{2q}{mr}\omega = qr\omega$. Nun ist aber $\omega : h = \gamma : g_2 = \frac{2q}{mr} : \frac{p - q}{m}$, also $\omega = \frac{2qh}{r(p - q)}$. Folglich ist $T\frac{\vartheta^2}{2} = qr\omega = \frac{2q^2h}{p - q}$. Die Summe der Arbeitsfähigkeiten ist also $(p - q)h + \frac{2q^2h}{p - q} = \frac{h}{p - q}[p + 3q^2 - 2pq]$. Ist dies eben so groß wie die geleisteten Arbeiten? Die Kraft p hat den Weg h nach unten, die Kraft q den Weg h_1 nach oben zurückgelegt; die Leistungen sind also zusammen $ph - qh_1$. Es ist aber $h_1 : h = g_3 : g_2 = \frac{h - 3q}{m} : \frac{h - q}{m}$, also $h_1 = h\frac{p - 3q}{p - q}$ und $qh_1 = qh\frac{p - 3q}{p - q}$. Die Arbeitsleistung ist also $ph - qh\frac{p - 3q}{p - q}$.

$= \frac{h}{p-q} [p^2 + 3q^2 - 2pq]$. Dies stimmt mit dem obigen Resultate überein, die Giltigkeit des Satzes ist also nachgewiesen.

353) Die Anwendung auf das Reibungsproblem ist nun sehr einfach. Das Gewicht des Cylinders sei wiederum p , die ziehende Kraft p_1 , die gleitende Reibung $q = \mu p$ und $p_1 > 3q$, wie vorausgesetzt werden musste, um Rollung und Gleitung zugleich zu erhalten. Die rollende Reibung bleibe unberücksichtigt. Die Beschleunigung der Drehung erfolgt

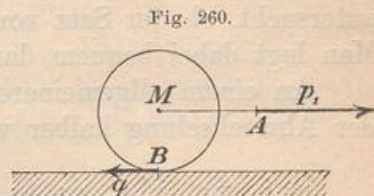


Fig. 260.

durch das Kräftepaar $\pm q$ am Radius r , ist also $\gamma = \frac{qr}{\left(\frac{mr^2}{2}\right)}$

$= \frac{2\mu pr}{mr^2} = \frac{2\mu g}{r}$. An der Peripherie ist die Beschleunigung $g_1 = 2\mu g$. Der Kraftüberschuss $p_1 - q = p_1 - \mu p$ bringt die davon unabhängige Beschleunigung von M hervor, und diese wird $g_2 = \frac{p_1 - \mu p}{m}$. Die Schleifung des Punktes B hat die Beschleunigung

$$g_3 = g_2 - g_1 = \frac{p_1 - \mu p}{m} - 2\mu g = \frac{p_1 - 3\mu p}{m}$$

(Das Schleifen ist Null, sobald $p_1 = 3\mu p$ ist. Es findet statt, sobald $p_1 > 3\mu p$ ist, es findet nicht statt, sobald $p_1 < 3\mu p$ ist. Die Anfangsgeschwindigkeit war als Null vorausgesetzt.) Der von M zurückgelegte Weg l verhält sich zum Reibungswege l_1 wie g_2 zu g_3

Die Arbeitsgleichung würde sein

$$A = p_1 l = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} + ql_1,$$

wo der letzte Posten die Reibungsarbeit ist. Dafs aber

$$p_1 l - ql_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2}$$

ist, war schon bei dem Hilfsbeispiele nachgewiesen worden.

Die Bewegungsgleichungen für M sind

$$v = \frac{p_1 - \mu p}{m} t, \quad l = \frac{1}{2} \frac{p_1 - \mu p}{m} t^2, \quad v = \sqrt{2 \frac{p_1 - \mu p}{m} l};$$

die Gleichungen für die Drehung sind

$$\vartheta = \frac{2\mu g}{r} t, \quad \omega = \frac{1}{2} \frac{2\mu g}{r} t^2, \quad \vartheta = \sqrt{2 \frac{2\mu g}{r} \omega}.$$

Das Schleifen geschieht nach den Formeln

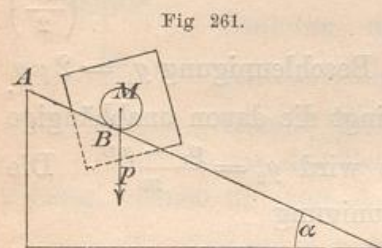
$$v_1 = \frac{p_1 - 3\mu p}{m} t, \quad l_1 = \frac{1}{2} \frac{p_1 - 3\mu p}{m} t^2, \quad v_1 = \sqrt{2 \frac{p_1 - 3\mu p}{m} l_1}.$$

Ist die Reibung $\mu p > \frac{p_1}{3}$, so wirkt sie trotzdem stets nur in der Stärke $\mu p = \frac{p_1}{3}$. Setzt man dies ein, so wird das Schleifen Null, und die Formeln werden die früheren.

Die Richtigkeit des Ganzen kann man erproben, indem man untersucht, ob der Satz von der Erhaltung der Arbeit gewahrt bleibt. Man legt dabei bequem das Ende der ersten Sekunde zu grunde.

An einem allgemeineren Beispiele soll dies durchgeführt werden; der Abwechslung halber werde dabei die Behandlung geändert.

354) Ein beliebig gestalteter Körper rolle unter Achsenlagerung von schiefer Ebene herab. Die Achse habe den



Radius q , und ihre Mittellinie gehe durch den Schwerpunkt des Körpers. Wie erfolgt die Bewegung?

Zunächst sei die Reibung Null und das Drehen durch den bei A befestigten und um den Cylinder geschlungenen Faden erzwungen. Die Bewegung ist Drehung um M und gleichzeitige Verschiebung oder auch Drehung um den jedesmaligen Berührungspunkt B allein. Das Moment der Schwerkraft in bezug auf diesen ist $p \sin \alpha$, die Winkelbeschleunigung also

$$\gamma = \frac{p q \sin \alpha}{T + m q^2} = g \frac{m q \sin \alpha}{T + m q^2}.$$

Ebenso groß ist die Winkelbeschleunigung der Drehung um M . Die geradlinige Beschleunigung von M ist

$$g_1 = \gamma q = \frac{p q^2 \sin \alpha}{T + m q^2} = g \frac{m q^2 \sin \alpha}{T + m q^2}.$$

Die Fadenspannung ist

$$p_1 = m g \sin \alpha - m g_1 = m g \sin \alpha \left(1 - \frac{m q^2}{T + m q^2} \right) = m g \sin \alpha \frac{T}{T + m q^2}.$$

Soll die Reibung den Faden ersetzen, so muss sein

$$\mu p \cos \alpha \geq p \sin \alpha \frac{T}{T + m q^2};$$

der Koeffizient also

$$\mu \geq \tan \alpha \frac{T}{T + m q^2}.$$

Der Reibungswinkel für gegebenes μ folgt schliesslich aus

$$\tan \alpha = \mu \cdot \frac{T + m q^2}{T}.$$

Ist $\tan \alpha$ kleiner, so findet die Bewegung nach den soeben berechneten Beschleunigungen g_1 und γ statt. Ist $\tan \alpha$ größer, so findet Gleitung und Rollung zugleich statt. Die Drehung entsteht durch das Kräftepaar $\pm \mu p \cos \alpha$ mit dem Hebelarme ϱ , hat also die Winkelbeschleunigung

$$\gamma_1 = \frac{\mu p \cos \alpha \varrho}{T} = g \frac{\mu m \varrho \cos \alpha}{T};$$

der Kraftüberschuss $p \sin \alpha - \mu p \cos \alpha$ giebt die fortschreitende Beschleunigung für M , nämlich

$$g_1 = \frac{p \sin \alpha - \mu p \cos \alpha}{m} = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

An der Peripherie ist die Drehbeschleunigung

$$g_2 - \gamma_1 \varrho = \frac{\mu p \cos \alpha \varrho^2}{T} = g \frac{\mu m \cos \alpha \varrho^2}{T},$$

die Beschleunigung des Schleifens ist also

$$g_3 = g_1 - g_2 = g \left(\sin \alpha - \mu \cos \alpha \frac{T + m \varrho^2}{T} \right).$$

(Das Schleifen ist Null, sobald $\mu \leq \tan \alpha \frac{T + m \varrho^2}{T}$ ist, die Probe stimmt also. Ist die Reibung größer, so wirkt sie trotzdem nur wie die Fadenspannung, nämlich nach dem Gesetze $\mu = \tan \alpha \frac{T + m \varrho^2}{T}$.)

355) Eine weitere Probe werde gemacht, um zu zeigen, wie es sich bei Reibungsproblemen mit dem Satze von der Erhaltung der Arbeit gestaltet.

Ist zunächst l_1 der von M zurückgelegte Weg, so ergibt sich der Gleitungsweg aus der Proportion $l_3 : l_1 = g_3 : g_1$ als

$$l_3 = l_1 \frac{g_3}{g_1} = l_1 \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha \frac{T + m \varrho^2}{T}}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}.$$

Man setze nun folgende Arbeitsgleichung an:

Arbeit der Kraft = Energie der Massenbewegung + Reibungsarbeit,
oder

Arbeit der Kraft - Reibungsarbeit = Energie der Massenbewegung,
also

$$p l_1 \sin \alpha - \mu p \cos \alpha l_1 \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha \frac{T + m \varrho^2}{T}}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} = \frac{m v^2}{2} + T \frac{\vartheta^2}{2}.$$

Ist diese Gleichung richtig? Als Zeitpunkt wähle man z. B. das Ende der ersten Sekunde. Dann ist

$$l_1 = \frac{g}{2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad v = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad \vartheta = \gamma = \frac{\mu p \cos \alpha g}{T}.$$

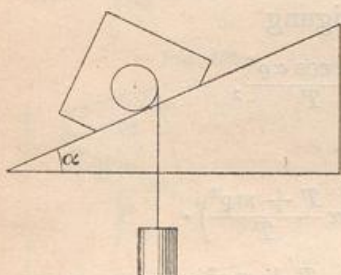
Durch Einsetzung dieser Werte formt sich die linke Seite um zu

$$\frac{pg}{2} \left[\sin^2 \alpha - 2 \mu \sin \alpha \cos \alpha + \mu^2 \cos^2 \alpha \frac{T + mg^2}{T} \right].$$

Die rechte Seite führt auf denselben Wert. Die Probe mit dem Satze von der Erhaltung der Arbeit stimmt also gleichfalls.

Dem Leser bleibe es überlassen, eine ganze Schar hierher gehöriger Aufgaben, z. B. solche, bei denen es sich um das Hinaufrollen handelt, selbst anzusetzen. Um jedoch zu zeigen, wie man die Schwierigkeiten des Ansatzes in mannigfacher Weise überwinden kann, behandeln wir noch ein verwandtes Beispiel.

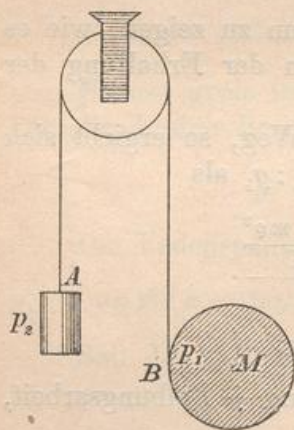
Fig. 262.



356) Ein Faden sei über eine leichtbewegliche Rolle gelegt, deren Masse

Null sei. An dem Ende A sei ein Gewicht befestigt, das andere Ende sei um einen Cylinder vom Radius r und vom Gewichte p_1 geschlungen, der infolge der Fadenspannung und Schwerkraft abrollen wird. Wie erfolgen die einzelnen Bewegungen?

Fig. 263.



Auflösung. Sinkt A mit der Beschleunigung g_2 statt g , so bleibt die Fadenspannung $S = (g - g_2) m_2$. Da die Masse der oberen Rolle als Null angenommen ist, so herrscht auf der andern Seite dieselbe Fadenspannung. Damit ist die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt, bei der es sich um die Fadenspannung g statt S handelte, nur ist noch die Unbekannte g_2 darin. Dort erfolgte die Drehung mit der Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{2S}{m_1 r} = \frac{2m_2(g - g_2)}{m_1 r}, \quad \text{an der Peripherie also mit } g_3 = \frac{2S}{m_1} = \frac{2m_2(g - g_2)}{m_1},$$

$$M \text{ dagegen sank mit der Beschleunigung } g_1 = \frac{p_1 - S}{m_1} = \frac{p_1 g - m_2(g - g_2)}{m_1}.$$

Die beiden Bewegungen von B sind entgegengesetzt, die wirkliche Bewegung also

$$g_3 - g_1 = \frac{2m_2(g - g_2) - m_1g + m_2(g - g_2)}{m_1} = \frac{3m_2(g - g_2) - m_1g}{m_1},$$

und dies ist zugleich die Beschleunigung g_2 von A , sodass

$$g_2 = \frac{3m_2g - 3m_2g_2 - m_1g}{m_1}.$$

Daraus folgt

$$g_2 = \frac{3m_2 - m_1}{3m_2 + m_1}g = g \frac{3p_2 - p_1}{3p_2 + p_1}.$$

Dies in die Gleichungen für γ und g_1 eingesetzt, giebt die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{4m_2g}{r[3m_2 + m_1]} = \frac{4p_2g}{r[3p_2 + p_1]},$$

für M aber die Beschleunigung

$$g_1 = g \frac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2} = g \frac{p_1 + p_2}{p_1 + 3p_2}.$$

Setzt man z. B. $p_1 = 3p_2$, so wird, wie in einem früheren Beispiele, $g_2 = 0$, $g_1 = \frac{2}{3}g$. Setzt man $p_1 = \infty$, so wird $g_2 = g$, womit A die grösste mögliche Geschwindigkeit erhält. Dabei wird $g_1 = \frac{g}{3}$, was die geringste Senkungsbeschleunigung für M giebt. (Ein Steigen von M würde nur möglich sein, wenn man das Gewicht p_2 durch eine Kraft ersetzte, die nicht an die Maximalbeschleunigung g gebunden ist.)

Berücksichtigt man die Masse der oberen Rolle, so wird die Lösung nicht viel schwieriger, nur ist natürlich die Fadenspannung rechts eine andere, als links. Ist nämlich die Spannung links wieder $S = m_2(g - g_2)$, so würde, da die Rolle am Rande die Beschleunigung g_2 erhält und ihre auf den Rand reduzierte Masse $\frac{m_4}{2}$ ist, für die Spannung rechts nur übrig bleiben $S - \frac{m_4}{2}g_2$ oder $S_1 = m_2(g - g_2) - \frac{m_4}{2}g_2 = m_2g - g_2\left(m_2 + \frac{m_4}{2}\right)$. Von jetzt ab ist die Aufgabe zu behandeln wie vorher.

357) Auch die Schwungradtheorie lässt sich mit den bisherigen Hilfsmitteln behandeln. Man kann bei gegebener Schwungmasse die Grösse der Schwankungen in der Geschwindigkeit und umgekehrt aus der zulässigen Schwankung die Schwungmasse berechnen. Über dieses Kapitel vergleiche man den Anhang.

Zu entsprechenden Beispielen können noch herangezogen werden der Drehungskörper mit symmetrischem Schnitt in Nr. 125, besonders der ringförmige Wulst in Nr. 126, die Kugelbetrachtungen in Nr. 174 und 175, besonders die Stofs- und Pendeltheorie, die Energiezunahme

der sich zusammenziehenden Erde in Nr. 177, die Drehungsparaboloide verschiedener Ordnung in der Tabelle des Abschnittes 188.

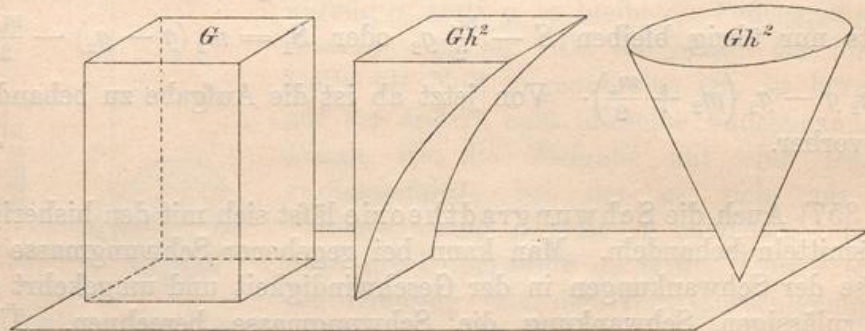
Man erkennt, welch reichen Übungsstoff man schon an diese einfachsten Körperformen anschließen kann, und wie viele wichtige Kapitel der Mechanik nur mit Hilfe der Trägheitsmomente erschlossen werden können.

358) In ähnlicher Weise wie der Kreiscylinder und der Rechteckkörper können andere senkrechte Cylinder und Prismen bezüglich der Trägheitsmomente behandelt werden, da jede der früher besprochenen ebenen Flächen als Grundfläche genommen werden kann.

Man beginnt mit T_u . Ist F der horizontale Querschnitt, so folgt Fy^2 als sein Trägheitsmoment, also wird $T_u = \frac{Fh^3}{3}$, und für den Schwerpunktschnitt wird $T_{xy} = \frac{Fh^3}{12} = \frac{Jh^2}{12}$. Ist ferner t_x das eine axiale Trägheitsmoment der Grundfläche, so ist $t_x h$ das des Körpers für den entsprechenden senkrechten Schnitt, d. h. es ist $T_{xz} = t_x h$. Ist t_y das andere Axialmoment der Grundfläche, so wird $T_{yz} = t_y h$. Für die senkrechte Schwerpunktsachse wird nun $T_z = T_{xz} + T_{yz}$, für die durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte X-Achse wird $T_x = T_{yx} + T_{zx}$, für die Y-Achse $T_y = T_{zy} + T_{xy}$. Endlich wird das Polarmoment für den Schwerpunkt des Körpers $T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx}$.

(Auch für schräge Prismen und Cylinder lassen sich gewisse Momente leicht berechnen, andere aber erfordern Kenntnisse des nächsten Abschnittes. So läßt sich z. B. das schiefe Parallelepiped oft in ein senkrechtes Prisma und zwei Dachkörper zerlegen, welche letzteren aber der Ordnung 1 angehören.)

Fig. 264.



359) Im Anschluss an Fig. 130 lassen sich auch die Trägheitsmomente der Körper von der Ordnung Null stereometrisch veranschaulichen. Wegen der Querschnittsformel $q_y = Ty^2$ handelt es sich um eine Darstellung durch Körper von der Ordnung 2. So

ist z. B. das Trägheitsmoment des ersten Körpers in Fig. 264 gleich dem Inhalte des zweiten parabolischen und auch des dritten Körpers, sobald nur die letzteren statt der Grundfläche G die Grundfläche Gh^2 erhalten.

Das Axialmoment des ersten in Bezug auf die senkrechte Achse kann man durch ein Prisma oder einen Cylinder von derselben Höhe darstellen, dessen Grundfläche gleich dem polaren Trägheitsmomente der Grundfläche des ersten Körpers ist. Ist letztere z. B. ein Quadrat von der Seite b , so hat man für die Hülfskörper die Grundfläche $\frac{b^4}{6}$ zu nehmen.

Da hier und später für die Linien mehrfach Ausdrücke höherer Dimension auftreten, so sei an folgendes erinnert.

360) Um Ausdrücke wie a^2, a^3, a^4, \dots als gerade Linien darstellen zu können, muß man neben der Länge a noch die Länge der Einheit kennen. Man bildet nun aus 1 und a ein beliebiges Dreieck OA_0A_1 , setzt auf OA_1 ein ähnliches, auf OA_2 wiederum ein ähnliches und fährt so fort, dann erhält man OA_2 als a^2 , OA_3 als a^3 , OA_4 als a^4 u. s. w. Dies folgt aus Proportionen wie $1:a = a:x$ oder $a:a^2 = a^2:x$ u. s. w.

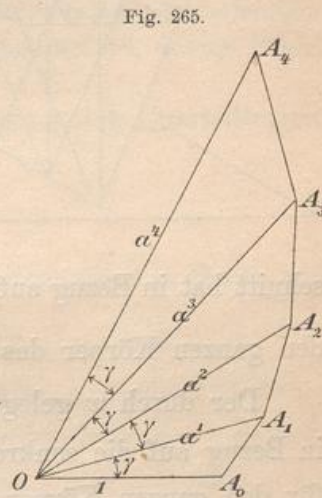


Fig. 265.

Schaltet man als Winkelhalbierende die mittleren Proportionalen zweier aufeinanderfolgenden Strahlen ein, so erhält man auch die Längen für $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^5}$ u. s. w. Fährt man nach unten fort, so erhält man zunächst $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ u. s. w., oder, was dasselbe ist, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} , u. s. w. Die so entstehenden Eckpunkte liegen auf einer logarithmischen Spirale. Hat man diese korrekt gezeichnet und läßt man die Winkeltheilung mit Hülfe des probeweisen Zirkelabstechens auf einem Kreisbogen zu, so kann man alle Potenzen von a mit rationalem Exponenten im Prinzip konstruieren. Dreiteilung des Winkels γ giebt dann bis zur Spirale reichende Strahlen von der Länge $a^{\frac{1}{3}}$ und $a^{\frac{2}{3}}$.

C. Körper von der Ordnung 1.

361) Der symmetrische Dreieckskörper mit rechteckiger Grundfläche.

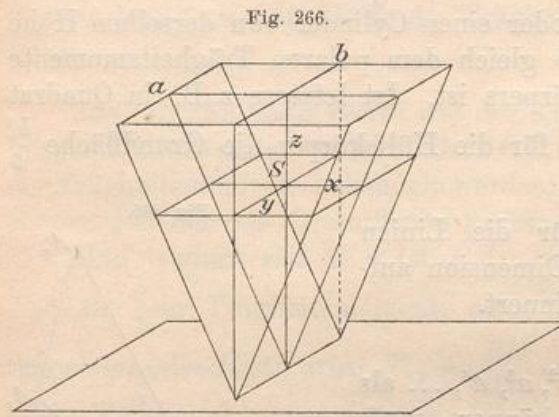
Ist $G = ab$ der Oberschnitt, so ist der Horizontalschnitt in der

Höhe z gleich $G \frac{z}{h}$, also sein Trägheitsmoment in Bezug auf die untere Fläche $\frac{G}{h} z^3$, so daß nach der Schichtenformel für den ganzen Körper wird

$$T_u = \frac{G}{h} \frac{h^4}{4} = \frac{Gh^3}{4} = J \frac{h^2}{2}.$$

Verlegung nach dem durch S gelegten Horizontal-schnitte giebt

$$T_{xy} = \frac{Jh^2}{2} - J \left(\frac{3}{3} h \right)^2 = \frac{Jh^2}{18} \text{ oder auch } \frac{Gh^3}{36}.$$



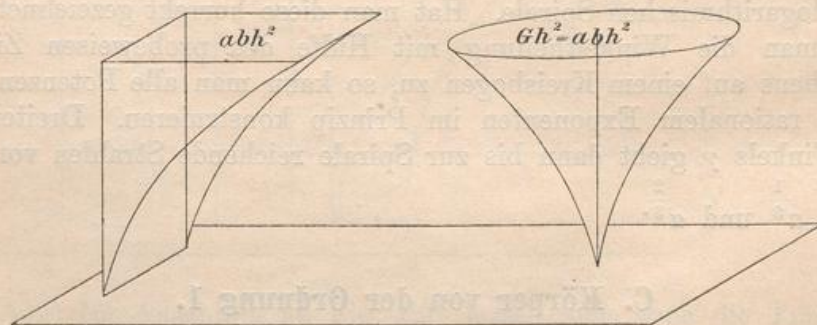
(Oder: Der durch x gelegte senkrechte Dreiecks-schnitt hat in Bezug auf die X -Achse das Moment $\frac{bh^3}{36}$, demnach ist für den ganzen Körper das Planmoment $T_{xy} = \frac{bh^3}{36} a = \frac{Gh^3}{36}$.)

Der durch x gelegte senkrechte Dreiecksschnitt hat nach Nr. 32 in Bezug auf die senkrechte Mittellinie das Moment $\frac{hb^3}{48}$, folglich ist für den ganzen Körper

$$T_{yz} = \frac{hb^3}{48} a = \frac{Jb^2}{24}.$$

In Bezug auf den durch x gelegten senkrechten Dreiecksschnitt hat der Körper nach der Prismenformel $T_{zx} = \frac{Ja^2}{12}$.

Fig. 267.



Für die durch den Körperschwerpunkt gelegten Koordinatenachsen erhält man also

$$T_x = \frac{Jh^2}{18} + \frac{Ja^2}{12} = \frac{J}{36} (2h^2 + 3a^2), \quad T_y = \frac{Jb^2}{24} + \frac{Jh^2}{18} = \frac{J}{72} (3b^2 + 4h^2),$$

$$T_z = \frac{Ja^2}{12} + \frac{Jb^2}{24} = \frac{J}{24} (2a^2 + b^2).$$

Das Polarmoment für S wird

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{J}{72} (6a^2 + 3b^2 + 4h^2).$$

Nach der Querschnittsformel $\frac{G}{h} z^3$ kann das Trägheitsmoment T_u dargestellt werden durch die in Fig. 267 gezeichneten parabolischen Cylinder dritter Ordnung oder durch das Drehungsneiloid, dessen Profil durch semikubische Parabeln gegeben wird.

Auch für die anderen Trägheitsmomente lassen sich Darstellungen finden, die als Übungsbeispiele dienen mögen.

362) Das Drehungsparaboloid.

Der Schnitt in Höhe z ist $G \frac{z}{h}$, sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche $\frac{G}{h} z^3$, also wird wie vorher

$$T_u = \frac{G}{h} \frac{h^4}{4} = \frac{Jh^2}{2}, \quad T_{xy} = \frac{Jh^2}{18} = \frac{Gh^3}{36}.$$

Der Radius in Höhe z ist $r \sqrt{\frac{z}{h}}$, das Polarmoment des zugehörigen Kreises ist $\frac{r^4 z^2 \pi}{2h^2} = \frac{Gr^2}{2h^2} z^2$, also ist nach der Schichtenformel für den ganzen Körper in Bezug auf die z -Achse

$$T_z = \frac{Gr^2}{2h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{Ghr^2}{2} \frac{1}{3} = \frac{Jr^2}{3}.$$

Halb so groß sind die Momente $T_{xz} = T_{yz} = \frac{Jr^2}{6}$. In Bezug auf die durch S gelegten Koordinatenachsen x und y hat man also

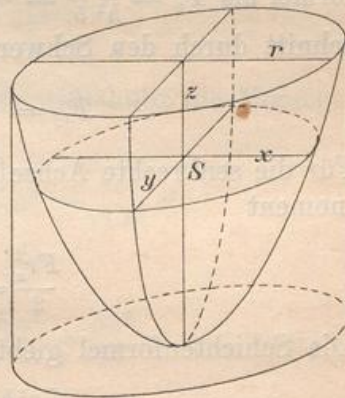
$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = J \left(\frac{h^2}{18} + \frac{r^2}{6} \right) = \frac{J}{18} (h^2 + 3r^2).$$

Ebenso groß ist T_y . Endlich ist

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = J \left(\frac{h^2}{18} + \frac{r^2}{6} + \frac{r^2}{6} \right) = \frac{J}{18} (h^2 + 6r^2).$$

363) Bemerkung über die Körper von der Ordnung 1. Bei allen diesen Körpern, also auch beim elliptischen Paraboloid und

Fig. 268



bei den umgekehrt aufgestellten parabolischen Gewölben von beliebiger Grundfläche, findet man zunächst $T_{xy} = \frac{Jh^2}{18}$. (Dies gilt auch von den entsprechenden Schrägkörpern, die aber vorläufig ausgeschlossen bleiben sollen.) T_{yz} und T_{zx} ergeben sich mit Hülfe der beiden Axialmomente des Horizontalschnittes, T_z mit Hülfe des Polarmomentes, wobei man die Summenprobe machen kann. T_x und T_y sind leicht zu bilden, ebenso T_p .

Auch die Stumpfe dieser Körper sind leicht zu berechnen, da nur der Ausdruck für h_1 vom Ausdrucke für h_2 abzuziehen und dann auf den Schwerpunkt zu reduzieren ist.

D. Körper von der Ordnung 2.

364) Der senkrechte Kreiskegel.

Der Schnitt in der Höhe z ist, wenn G die Grundfläche bedeutet, $\frac{G}{h^2} z^2$, das Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene, auf die der Kegel mit der Spitze gestellt ist, wird aus $q = \frac{G}{h^2} z^4$ nach der Schichtenformel als $T_u = \frac{G}{h^2} \frac{h^5}{5} = \frac{Gh^3}{5}$ abgeleitet. In Bezug auf den Horizontalschnitt durch den Schwerpunkt wird

$$T_{xy} = \frac{Gh^3}{5} - \frac{Gh}{3} \left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{80} Jh^2.$$

Für die senkrechte Achse hat der Querschnitt in Höhe z das Trägheitsmoment

$$\frac{Fr_z^2}{2} = \frac{Gz^2}{h^2} \cdot \frac{\left(r\frac{z}{h}\right)^2}{2} = \frac{Gr^2 z^4}{2h^4}.$$

Die Schichtenformel giebt für den ganzen Körper

$$T_z = \frac{Gr^2 h^5}{2h^4 \cdot 5} = \frac{Gr^2 h}{10} = \frac{Gh}{3} \cdot \frac{3r^2}{10} = \frac{3 Jr^2}{10}.$$

Für jeden vertikalen Hauptschnitt wird das Trägheitsmoment halb so groß, also ist

$$T_{yz} = T_{zx} = \frac{3 Jr^2}{20}.$$

Daraus folgt

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \frac{3 Jr^2}{20} + \frac{3 Jh^2}{80} = \frac{3 J}{80} (4r^2 + h^2).$$

Ebenso groß ist T_y . Das Polarmoment in Bezug auf den Schwerpunkt wird

$$T_x + T_y + T_z = 2 \cdot \frac{3 J}{80} (4r^2 + h^2) + \frac{4}{4} \cdot \frac{3 Jr^2}{10} = \frac{3 J}{40} (16r^2 + h^2).$$

365) Parabolischer Cylinder. Der in Fig. 269 dargestellte parabolische Cylinder zweiter Ordnung, der symmetrisch von zwei parabolischen Flächen begrenzt ist, hat in Höhe z den Querschnitt $\frac{G}{h^2} z^2$, so daß wie vorher

$$T_u = \frac{G h^5}{h^2 \cdot 5} = \frac{G h^3}{5} \\ = \frac{G h \cdot 3 h^2}{3 \cdot 5} = \frac{3 J h^2}{5}$$

wird. Für den Schwerpunktschnitt wird

$$T_{xy} = \frac{3 J h^2}{5} - J \left(\frac{3 h}{4} \right)^2 \\ = \frac{3 J}{80} h^2,$$

wobei $J = \frac{a b h}{3}$ ist.

Der Oberschnitt habe in Bezug auf seine Mittellinien die Trägheitsmomente

$$T_1 = \frac{b a^3}{12} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{a b^3}{12},$$

dann sind für den in Höhe z liegenden Horizontalschnitt die Momente

$$\frac{b}{12} \left(\frac{a}{h^2} z^2 \right)^3 = \frac{b a^3}{12 h^2} z^6 \quad \text{und} \quad \frac{\left(\frac{a}{h^2} z^2 \right)}{12} b^3 = \frac{a b^3}{21 h^2} z^2.$$

Für den ganzen Körper also wird

$$T_{yz} = \frac{b a^3 h^7}{12 h^6 \cdot 7} = \frac{a^3 b h}{84} = \frac{a b h a^2}{3 \cdot 84} = \frac{J a^2}{28}$$

und

$$T_{zx} = \frac{a b^3 h^3}{12 h^2 \cdot 3} = \frac{a b^3 h}{36} = \frac{a b h b^2}{3 \cdot 12} = \frac{J b^2}{12}.$$

Das letzte Resultat könnte direkt nach der Prismenformel hingeschrieben werden. Folglich ist

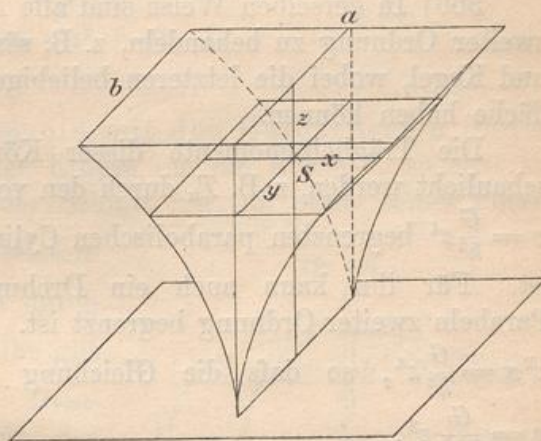
$$T_x = T_{xy} + T_{zx} = \frac{3 J}{80} h^2 + \frac{J b^2}{12} = \frac{J}{240} (9 h^2 + 20 b^2),$$

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{3 J}{80} h^2 + \frac{J a^2}{28} = \frac{J}{560} (21 h^2 + 20 a^2),$$

$$T_z = T_{zx} + T_{yz} = \frac{J b^2}{12} + \frac{J a^2}{28} = \frac{J}{84} (7 b^2 + 3 a^2).$$

Das Polarmoment für den Schwerpunkt wird

Fig. 269.



$$T_p = (T_{xy} + T_{yz}) + T_{zx} = \frac{J}{560} (21 h^2 + 20 a^2) + \frac{Jb^2}{12}$$

$$= \frac{J}{1680} (63 h^2 + 60 a^2 + 140 b^2).$$

366) In derselben Weise sind alle Arten von senkrechten Körpern zweiter Ordnung zu behandeln, z. B. sämtliche senkrechten Pyramiden und Kegel, wobei die letzteren beliebige, z. B. auch elliptische Grundfläche haben können.

Die Trägheitsmomente dieser Körper können ebenfalls veranschaulicht werden, z. B. T_u durch den von der Parabel vierter Ordnung $x = \frac{G}{h^2} z^4$ begrenzten parabolischen Cylinder, dessen Inhalt $\frac{G h^5}{h^2 \cdot 5} = \frac{G h^3}{5}$ ist. Für ihn kann auch ein Drehungskörper eintreten, der von Parabeln zweiter Ordnung begrenzt ist. Sein Schnitt in der Höhe y ist $x^2 \pi = \frac{G}{h^2} z^4$, so daß die Gleichung der begrenzenden Kurve ist $x = \frac{G}{h^2 \pi} z^2$.

Die Stumpfe der Körper zweiter Ordnung sind nach der Subtraktionsmethode zu behandeln, indem man vom Körper von der Höhe h_2 den von der Höhe h_1 abzieht.

E. Körper gemischter Ordnung bis zur zweiten Potenz.

367) Die Kugel. Dieser Körper ist bereits in Nr. 174 behandelt, und zwar ist für ihn

$$T_{xy} = T_{yz} = T_{zx} = \frac{4}{15} r^5 \pi = \frac{1}{5} J r^2, \text{ also } T_x = T_y = T_z = \frac{2}{5} J r^2,$$

das Polarmoment in Bezug auf den Mittelpunkt aber gleich $\frac{3}{5} J r^2$. Demnach ist derjenige Radius, dessen Quadrat für alle Kugelpunkte

das mittlere ist, zu bestimmen aus $\varrho_p^2 = \frac{\frac{3}{5} J r^2}{J} = \frac{3}{5} r^2$, so daß

$\varrho_p = r \sqrt{\frac{3}{5}}$ ist. Dagegen ist der axiale Trägheitsradius $\varrho = r \sqrt{\frac{2}{5}}$, der auf den Hauptschnitt bezogene Trägheitsradius der Halbkugel

$\varrho_f = r \sqrt{\frac{1}{5}}$, wie aus $\varrho_f^2 = \frac{\frac{2}{5} J r^2}{J}$ folgt. Für den Horizontalschnitt der

Halbkugel in der Höhe z ist nach 174

$$q_z = r^2 \pi z^2 - \pi z^4.$$

Demnach kann das Trägheitsmoment der Halbkugel veranschaulicht werden durch den parabolischen Cylinder, der von der Parabel ge-

mischer Ordnung $x = r^2 \pi z^2 - \pi z^4$ begrenzt wird, oder durch den Drehungskörper, dessen Schnitt in der Höhe y ist

$$x^2 \pi = r^2 \pi z^2 - \pi z^4,$$

woraus sich die Gleichung der begrenzenden Kurve als

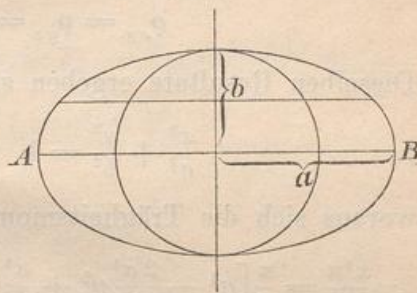
$$x^2 = r^2 z^2 - z^4$$

ergibt.

368) Das Drehungsellipsoid mit den Halbachsen a und b .

Geschieht die Drehung der Ellipse um die Achse b , so tritt an Stelle des Kreisschnittes $b^2 \pi$ der Schnitt $a^2 \pi$, an Stelle seines Polarmomentes $\frac{b^4 \pi}{2}$ tritt $\frac{a^2 \pi}{2}$, das letztere entsteht also aus dem ersteren durch Multiplikation mit $\frac{a^4}{b^4}$. Dasselbe gilt von jedem Horizontalschnitte. Demnach wird das Axialmoment des Ellipsoids (Y -Achse als senkrecht betrachtet)

Fig. 270.



$$T_y = \frac{2}{5} \left(\frac{4}{3} b^3 \pi \right) b^2 \frac{a^4}{b^4} = \frac{8}{15} a^4 b \pi,$$

oder, da der Inhalt des Ellipsoids gleich $\frac{4}{3} b^3 \pi \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{3} a^2 b \pi$ ist,

$$T_y = \frac{2}{5} \left(\frac{4}{3} a^2 b \pi \right) a^2 = \frac{2}{5} J a^2.$$

Für jeden senkrechten Hauptschnitt ist das Moment halb so groß, also

$$T_{xy} = \frac{1}{5} J a^2 = \frac{4}{15} a^4 b \pi = T_{yz}.$$

Das Moment T_{zx} ergibt sich aus dem Kugelmomente, indem man jeden Horizontalschnitt mit $\frac{a^2}{b^2}$ multipliziert, was

$$T_{zx} = \frac{4}{15} b^5 \pi \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{15} a^2 b^3 \pi = \frac{1}{5} J b^2$$

gibt. Demnach wird

$$\begin{aligned} T_x &= T_{xy} + T_{yz} = \frac{1}{5} J a^2 + \frac{1}{5} J b^2 = \frac{1}{5} J (a^2 + b^2) \\ &= \frac{4}{15} a^2 b \pi (a^2 + b^2) = T_z. \end{aligned}$$

Endlich folgt als Polarmoment

$$\begin{aligned} T_p &= (T_{xy} + T_{yz}) + T_{zx} = \frac{2}{5} J a^2 + \frac{1}{5} J b^2 = \frac{J}{5} (b^2 + 2 a^2) \\ &= \frac{4}{15} a^2 b \pi (b^2 + 2 a^2). \end{aligned}$$

Der Radius, dessen Quadrat unter den Radienquadraten aller Ellipsoidpunkte das mittlere ist, ergibt sich aus

$$\varrho_p^2 = \frac{T_p}{J} = \frac{b^2 + 2a^2}{5}$$

als

$$\varrho_p = \sqrt{\frac{b^2 + 2a^2}{5}}.$$

Der axiale Trägheitsradius ist für die Y -Achse $\varrho_p = a\sqrt{\frac{2}{5}}$, für die X -Achse und Z -Achse $\varrho_p = \frac{1}{5}\sqrt{a^2 + b^2}$. In Bezug auf die Hauptschnitte des Halbellipsoids erhält man für dieses

$$\varrho_{xy} = \varrho_{yz} = a\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad \varrho_{zx} = b\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich auf Grund der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

woraus sich die Trägheitsmomente der Querschnitte als

$$\frac{x^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left[a^4 - \frac{2a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^4 \right], \quad \frac{x^4\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \left[a^4 - \frac{2a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^4 \right],$$

$$x^2\pi \cdot y^2 = \pi \left[a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 \right]$$

ergeben, auf deren jedes die Schichtenformel anzuwenden ist.

Entsteht das Drehungsellipsoid durch Drehung um die Achse a , so sind in allen Formeln a und b zu vertauschen.

369) Das dreiachsige Ellipsoid. Die Achsen seien der Größe nach a , b und c , den Koordinatenachsen des vorigen Beispiels entsprechend. Das neue Ellipsoid entsteht aus dem vorigen durch konstante Verkürzung aller horizontal nach hinten gehenden Achsen mittels des Faktors $\frac{c}{a}$. Jeder Horizontalschnitt wird in demselben Verhältnis verkleinert, folglich wird

$$T_{zx} = \frac{4}{15}a^2b^3\pi \cdot \frac{c}{a} = \frac{4}{15}ab^3c\pi,$$

oder, da $\frac{4}{3}abc\pi$ der Inhalt des Körpers ist,

$$T_{zx} = \frac{1}{5}Jb^2.$$

Der horizontale Hauptschnitt hat in Bezug auf die x -Achse das Trägheitsmoment $\frac{ac^3\pi}{4}$, welches aus $\frac{a^4\pi}{4}$ (dem des Kreises) durch

Multiplikation mit $\frac{c^3}{a^3}$ entsteht. So ist es in jedem Horizontalschnitt, folglich wird

$$T_{xy} = \left(\frac{4}{15} a^4 b \pi\right) \frac{c^3}{a^3} = \frac{4}{15} a b c^3 \pi = \frac{1}{5} J c^2.$$

Jeder solche Schnitt hat in Bezug auf die z -Achse das Moment $\frac{c a^3 \pi}{4}$, welches aus dem des Kreises, d. h. aus $\frac{a^4 \pi}{4}$, durch Verkleinerung mittels des Faktors $\frac{c}{a}$ entsteht. Demnach wird

$$T_{yz} = \frac{4}{15} a^4 b \pi \cdot \frac{c}{a} = \frac{4}{15} a^3 b c \pi = \frac{1}{5} J a^2.$$

Jetzt folgt

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \frac{1}{5} J (b^2 + c^2), \quad T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{1}{5} J (c^2 + a^2),$$

$$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \frac{1}{5} J (a^2 + b^2).$$

Endlich ist das Polarmoment

$$T_p = \frac{1}{5} J (a^2 + b^2 + c^2).$$

Dividiert man jedes Moment durch J , so erhält man das Quadrat des entsprechenden Trägheitsradius. So ist z. B. der Radius, dessen Quadrat unter allen Radienquadraten das mittlere ist,

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich aus der Untersuchung der Schnitte in der Höhe y , nur treten dabei irrationale Ausdrücke auf.

370) Kugelabschnitt. Nach Nr. 313 ist der Horizontalschnitt

$$q_y = x^2 \pi = 2r\pi y - \pi y^2,$$

also das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundebene der Fig. 228

$$2r\pi y^3 - \pi y^4.$$

Für den Körper von Höhe h wird also

$$T_u = 2r\pi \frac{h^4}{4} - \pi \frac{h^5}{5}.$$

Der Schwerpunkt erfordert nach Nr. 313 Verschiebung um

$$y_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{8r - 3h}{3r - h},$$

so daß für die Horizontalebene durch S

$$T_{zx} = T_u - y_s^2 J = 2r\pi \frac{h^4}{4} - \frac{\pi h^5}{5} - \frac{h^2}{16} \left(\frac{8r-3h}{3r-h} \right)^2 \frac{\pi h}{3} (3r^2 - h^2)$$

ist, was sich noch vereinfachen läßt. Hier ist es aber vorzuziehen, mit den Hilfswerten h_s und J zu rechnen.

Das Polarmoment des Schnittes in Höhe y ist

$$q_y = \frac{x^4 \pi}{2} = \frac{\pi}{2} (2ry - y^2)^2 = \frac{\pi}{2} (4r^2 y^2 - 4ry^3 + y^4).$$

Demnach wird für den Körper in Bezug auf die senkrechte y -Achse

$$T_y = \frac{\pi}{2} \left(4r^2 \frac{h^3}{3} - 4r \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} \right) = \frac{\pi h^3}{2} \left(\frac{4r^2}{3} - rh + h^2 \right).$$

Für jeden senkrechten Hauptschnitt wird das Moment halb so groß, also

$$T_{yx} = \frac{\pi h^3}{4} \left(\frac{4r^2}{3} - rh + h^2 \right) = T_{yz}.$$

Die durch den Schwerpunkt gelegten Koordinatenachsen geben neben dem obigen T_y noch

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = T_z,$$

ebenso

$$T_y + T_{xy} + T_{yz} + T_{zx},$$

was ziemlich komplizierte Formeln giebt, aber keine Schwierigkeiten macht.

371) Kugelschicht. Sind r , h_1 und h_2 gegeben, so ist mit den Formeln in Nr. 314a zu arbeiten. Sind a , b und h gegeben, so ist die Formel

$$x^2 = (a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z+h)y - y^2$$

aus Nr. 314b anzuwenden, aus der sich die Momente $x^2 y^2$, $\frac{x^4 \pi}{4}$, $\frac{x^4 \pi}{2}$ leicht ableiten lassen. Die Resultate werden mit Hilfe der Schichtenformel auf den ganzen Körper ausgedehnt.

372) Ellipsoidschichten. Sind die Schichten durch parallele Schnitte zu den Hauptebenen begrenzt, so sind die Formeln aus denen für die Schicht einer ebenso hohen Kugel abzuleiten. Am einfachsten geht man von den Hauptschnitten aus.

Die Kugel vom Radius b hat in der Höhe y den Schnitt

$$x^2 \pi = b^2 \pi - y^2 \pi.$$

Der des Ellipsoids wird daraus abgeleitet, indem man zunächst mit $\frac{a}{b}$, dann mit $\frac{c}{b}$ multipliziert, was

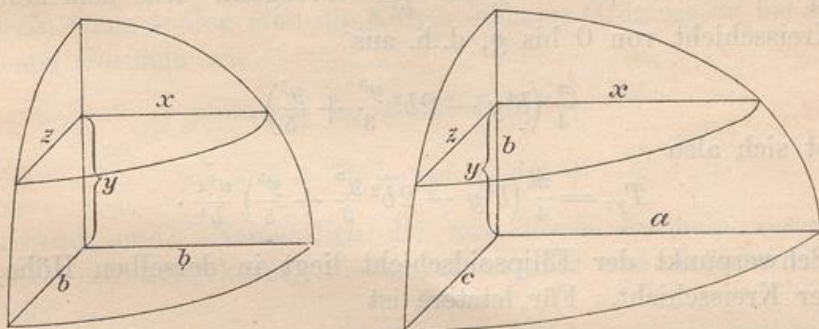
$$q_y = \frac{ac\pi}{b^2} (b^2 - y^2)$$

giebt. Man erhält für die Schicht von 0 bis y den Inhalt

$$\int_0^y J = \frac{ac\pi}{b^2} \left(b^2 \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} \right),$$

z. B. von 0 bis b den Inhalt des Halbellipsoids $\frac{2}{3} abc\pi$.

Fig. 271.



Multipliziert man den Schnitt mit y^2 , so erhält man in Bezug auf die Grundfläche sein Trägheitsmoment

$$\frac{ac\pi}{b^2} (b^2 y^2 - y^4).$$

Für die Schicht von 0 bis y ergibt sich also

$$T_{xz} = \frac{ac\pi}{b^2} \left(b^2 \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right).$$

Für das Halbellipsoid wird z. B.

$$T_{xz} = \frac{ac\pi}{b^2} \left(\frac{b^5}{3} - \frac{b^5}{5} \right) = \frac{2}{15} ab^3 c\pi.$$

Die Grundfläche hat in Bezug auf x das Trägheitsmoment $\frac{ac^3\pi}{4}$, was aus dem der Kreisfläche, $\frac{b^4\pi}{4}$ durch Multiplikation mit $\frac{ac^3}{b^4}$ (erst mit $\frac{a}{b}$, dann mit $\frac{c^3}{b^3}$) hervorgegangen ist. So ist es mit jedem Schnitte, also auch mit der ganzen Schicht von 0 bis y . Es folgt aus dem entsprechenden Trägheitsmomente der Kugelschicht, welches mit Hilfe von $\frac{x^4\pi}{4} = \frac{\pi}{4} (b^2 - y^2)^2 = \frac{\pi}{4} (b^4 - 2b^2y^2 + y^4)$ berechnet wird und sich als

$$\frac{\pi}{4} \left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right)$$

ergibt,

$$T_{xy} = \frac{\pi}{4} \left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \frac{ac^3}{b^4}.$$

Für die Schicht von 0 bis b z. B. ergibt sich

$$\frac{ac^3\pi}{4b^4} \left(b^5 - \frac{2}{3} b^5 + \frac{1}{5} b^5 \right) = \frac{2}{15} abc^3\pi.$$

In Bezug auf z hat die Grundfläche das Trägheitsmoment $\frac{ca^3\pi}{4}$, was aus $\frac{b^4\pi}{4}$ durch Multiplikation mit $\frac{a^3c}{b^4}$ hervorgeht. Aus dem Momente der Kreisschicht von 0 bis y , d. h. aus

$$\frac{\pi}{4} \left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right),$$

ergibt sich also

$$T_{yz} = \frac{\pi}{4} \left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \frac{a^3c}{b^4}.$$

Der Schwerpunkt der Ellipsoidschicht liegt in derselben Höhe, wie der der Kreisschicht. Für letztere ist

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{b^2\pi \frac{y^2}{2} - \pi \frac{y^4}{4}}{b^2\pi \frac{y}{1} - \pi \frac{y^3}{3}} = \frac{3y}{4} \cdot \frac{2b^2 - y^2}{3b^2 - y^2}.$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt und die Berechnung von T_x , T_y , T_z und T_p für sein Koordinatensystem sei dem Leser überlassen, da es sich um ganz einfache Rechnungen handelt.

Damit ist auch die Angelegenheit der Ellipsoidsegmente und der beliebigen Horizontalschichten erledigt, denn dabei sind nur Subtraktionen oder Additionen auszuführen.

373) Das Drehungshyperboloid.

Man benutze Figur und Grundformeln des Abschnittes 316, wo sich

$$1) \quad x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2$$

ergeben hatte, während die Schwerpunktshöhe war

$$y_s = \frac{3h}{4} \cdot \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}.$$

Die Trägheitsmomente der in Höhe y liegenden Horizontalschicht sind $x^2\pi y^2$, $\frac{x^4\pi}{4}$ und $\frac{x^4\pi}{2}$, was mit Hilfe von 1) leicht auszurechnen ist. Die Formeln werden denen des Drehungsellipsoids analog.

Der Übergang zum dreiachsigen Hyperboloid erfolgt ebenso, wie der vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen Ellipsoid.

374) Für das zweimantelige Drehungshyperboloid sind die Formeln des Abschnittes 317 zu Grunde zu legen, mit denen ebenso leicht zu rechnen ist. Auch dort bietet der Übergang zur dreiachsigen Form keine Schwierigkeiten.

Die Prismatoide sind auf Grund des Abschnittes 318 zu behandeln und haben geringeres technisches Interesse, ohne auf Schwierigkeiten zu führen.

F. Einige Körper höherer Ordnung.

375) Ganz analog sind die Körper höherer Ordnung zu behandeln, bei denen Formeln wie

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots$$

oder

$$x^2 = a + by + cy^2 + dy^4 + \dots$$

maßgebend sind. Namentlich die mit diesen Formeln zusammenhängenden Drehungskörper bieten interessante und einfache Übungsbeispiele.

Sind die entsprechenden Reihen unendliche, so hat man sich im Konvergenzbereiche zu halten.

Hätte man das dreiachsige Ellipsoid direkt berechnet, so hätten sich als Horizontalschichten Ellipsen mit den Halbachsen $a_y = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ und $c_y = \frac{c}{b} \sqrt{c^2 - y^2}$ ergeben, was auf Trägheitsmomente von den Formen

$$a_y c_y \pi y^2 \text{ oder } \frac{a c \pi}{b^2} \sqrt{(b^2 - y^2)(c^2 - y^2)},$$

$$\frac{\pi a_y c_y^3}{4}, \frac{\pi a_y^3 c_y}{4}, \frac{\pi a_y c_y}{4} (a_y^2 + b_y^2)$$

geführt haben würde, die sämtlich irrational sind. Die Irrationalitäten können mit Reihenentwicklung mittels des binomischen Lehrsatzes behandelt werden, was langwierig ist und zu den anschauungsmäßig abgeleiteten Resultaten zurückführen muß.

376) Bezüglich der entsprechenden Drehungskörper lassen sich einige Resultate des Abschnittes IV benutzen. Hierher gehört die Formel

$$h_s = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}$$

im Abschnitte 116 und der dazu gehörige Symmetriefall, die Formel

$$T = J (\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$$

des Abschnittes 125 über den dort behandelten Symmetriefall und das Beispiel des Ringkörpers mit Kreisquerschnitt, für den in Nr. 126

$T_y = 2\varrho r^2 \pi^2 (\varrho^2 + \frac{3}{4} r^2)$ berechnet ist, so daß T_{xy} und T_{zy} halb so groß sind.

Schwerer ist T_{zx} zu berechnen. Der Schnitt in der Höhe y über dem horizontalen Hauptschnitt hat die Radien

$$e_1 = \varrho + \sqrt{r^2 - y^2},$$

$$e_2 = \varrho - \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Die Schnittfläche wird also

$$\begin{aligned} q_y &= \pi (e_1^2 - e_2^2) = \pi (e_1 + e_2) (e_1 - e_2) = \pi 2\varrho \cdot 2\sqrt{r^2 - y^2} \\ &= 4\varrho\pi\sqrt{r^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Ihr Trägheitsmoment in Bezug auf den horizontalen Hauptschnitt ist also

$$1) \quad q_y y^2 = 4\varrho\pi y^2 \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Der variable Ausdruck $y^2 \sqrt{r^2 - y^2}$ ist aber weiter nichts, als das Trägheitsmoment der Querlinie des Viertelkreises in Bezug auf den horizontalen Durchmesser. Die Anwendung der Schichtenformel auf diesen Ausdruck gibt also für die Schichten von 0 bis r das Trägheitsmoment des Viertelkreises, d. h. $\frac{r^4 \pi}{16}$.

Demnach giebt $4y^2 \sqrt{r^2 - y^2}$ für dieselben Schichten den Ausdruck $\frac{r^4 \pi}{4}$. Für die obere Hälfte des

Körpers wird demnach

$$T = \frac{\varrho \pi r^4 \pi}{4},$$

für den ganzen Körper entsteht

$$2) \quad T_{xz} = 2\varrho\pi \frac{r^4 \pi}{4} = 2\varrho\pi t_x,$$

wo t_x das Trägheitsmoment des Kreisschnittes für die x -Achse bedeutet. Aus T_{xz} und den übrigen Trägheitsmomenten folgt nun leicht

$$T_z = T_x = \varrho r^2 \pi (\varrho^2 + \frac{5}{4} r^2) = J(\frac{\varrho^2}{2} + \frac{5}{8} r^2) \quad \text{und} \quad T_p = J(\varrho^2 + r^2).$$

377) Satz für Guldinsche Körper, deren erzeugende Fläche symmetrisch gegen eine Parallele zur Drehungsachse ist.

Fig. 272.

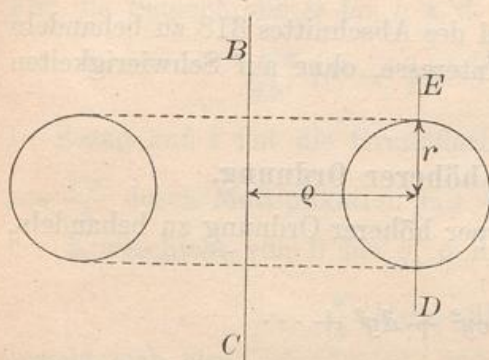
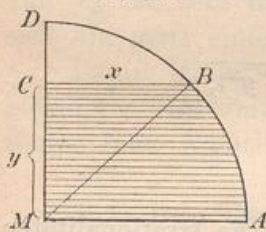


Fig. 273.



Hat der Körper die nebenstehende Gestalt und hat der in der Höhe y liegende Horizontalschnitt die Radien e_1 und e_2 , so ist die Fläche des Schnittes gleich $\pi(e_1^2 - e_2^2)$ und sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene xz ist $\pi(e_1^2 - e_2^2)y^2 = 2\pi \frac{e_1 + e_2}{2} (e_1 - e_2)y^2$. Dabei ist $\frac{e_1 + e_2}{2}$ die Entfernung ϱ der Symmetrielinie von der Achse, $(e_1 - e_2)y^2$ ist das Trägheitsmoment des Flächenquerschnittes in Bezug auf die X -Achse, welches t_x sei. Folglich ist nach der Schichtenformel für den ganzen Körper

$$T_{xz} = 2\varrho\pi t_x.$$

Nun war in Nr. 125 für solche Körper gezeigt, dass $T_y = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$ war, so dass $T_{yz} = T_{xy} = \frac{1}{2} J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$ ist, demnach ist für den vorliegenden Symmetriefall

$$\begin{aligned} T_z = T_x = T_{xy} + T_{xz} &= \frac{1}{2} J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + 2\varrho\pi t_x \\ &= 2\varrho\pi \left[\frac{F}{2}(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + t_x \right] \end{aligned}$$

und

$$T_y = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + 2\varrho\pi t_x = 2\varrho\pi \left[F(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + t_x \right].$$

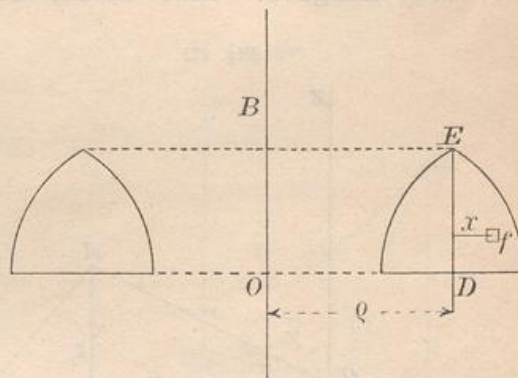
Hier bedeutet ϱ_1 den Trägheitsradius der Fläche in Bezug auf die Symmetrieachse.

Daraus folgt, dass eine große Zahl von Drehungskörpern, von denen die mit Hilfe von

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots$$

erzeugten nur spezielle Fälle sind (es handelt sich um den Sonderfall $\varrho = 0$) bezüglich ihrer Hauptschnitte vollständig behandelt werden können. Die für Räder, Kreisscheiben, Kugeln, Hohlcylinder u. dgl. gelösten Aufgaben über die Energie drehend und fortschreitend bewegter Körper, über excentrischen Stofs und Pendelbewegungen, über Fadenspannung und Rollen und Gleiten auf schiefer und horizontaler Ebene lassen sich also, soweit es sich um die Hauptschnitte und Hauptachsen handelt, auch für die hier besprochenen Drehungskörper lösen.

Fig. 274.

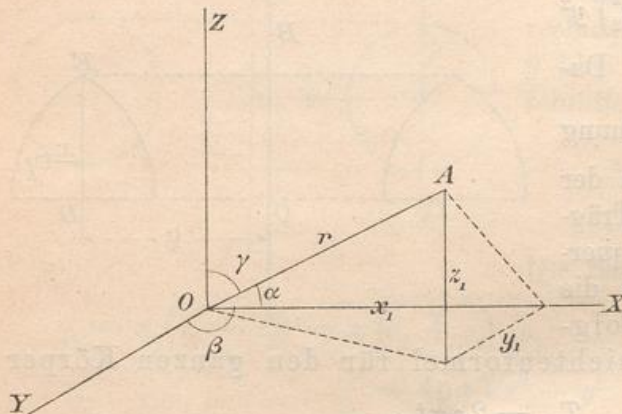


G. Der Drehungssatz für die Trägheitsachsen.

Einige Hilfsaufgaben der Raumgeometrie werden vorausgeschickt.

377) **Aufgabe.** Eine Gerade OA bilde mit der X -Achse und Y -Achse die Winkel α und β . Welchen Winkel γ bildet sie mit der Z -Achse?

Fig. 275.



Auflösung. Sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von A , so ist

$$x_1 = r \cos \alpha,$$

$$y_1 = r \cos \beta,$$

$$z_1 = r \cos \gamma,$$

aus

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2$$

folgt also

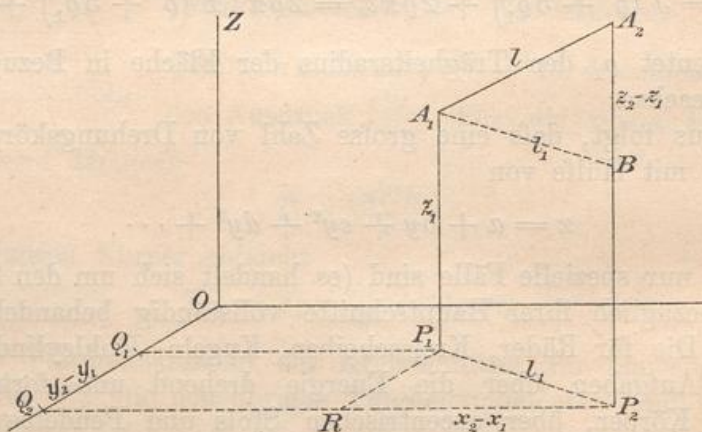
$$r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \cos^2 \beta + r^2 \cos^2 \gamma = r^2, \text{ oder } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Demnach bestimmt sich γ aus

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

379) **Aufgabe.** Die Punkte A_1 und A_2 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 seien gegeben. Wie groß ist ihre gegenseitige Entfernung?

Fig. 276.



Auflösung. P_1 und P_2 seien die Projektionen der Punkte A_1 und A_2 auf die Grundebene, Q_1 und Q_2 die von P_1 und P_2 auf die Y -Achse, ferner sei $P_1R \parallel Q_1Q_2$, $A_1B \parallel P_1P_2$, dann ist

$$l_2 = l_1^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

also

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

380) **Aufgabe.** Eine Gerade OA_1 bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α_1, β_1 und γ_1 , eine andere Gerade OA_2 die Winkel α_2, β_2 und γ_2 . Der Schnittwinkel φ der beiden Geraden soll berechnet werden.

Auflösung. Der Cosinussatz giebt

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi,$$

so dafs

$$2r_1r_2 \cos \varphi = r_1^2 + r_2^2 - l^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2] = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2.$$

Folglich ist

$$\cos \varphi = \frac{x_1x_2}{r_1r_2} + \frac{y_1y_2}{r_1r_2} + \frac{z_1z_2}{r_1r_2},$$

oder

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

381) **Aufgabe.** Wie groß ist die Entfernung e eines Punktes x, y, z von einer Geraden OA , die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet?

Auflösung. P sei der gegebene Punkt, Q seine Projektion auf die Gerade, $OP = r$ bilde mit den Achsen die Winkel ξ, η, ϑ , dann ist

$$e^2 = r^2 - OQ^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (r \cos \varphi)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 (\cos \alpha \cos \xi + \cos \beta \cos \eta + \cos \gamma \cos \zeta)^2,$$

also, da $r \cos \xi = x, r \cos \eta = y, r \cos \zeta = z$ ist,

Fig. 277.

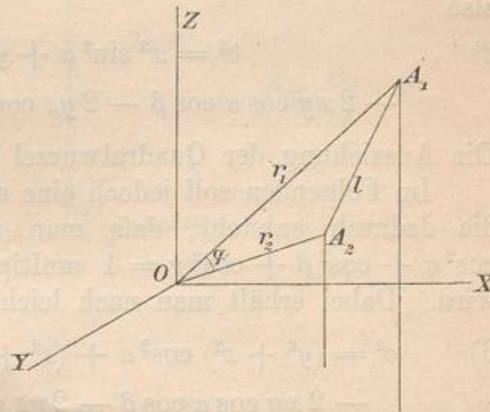
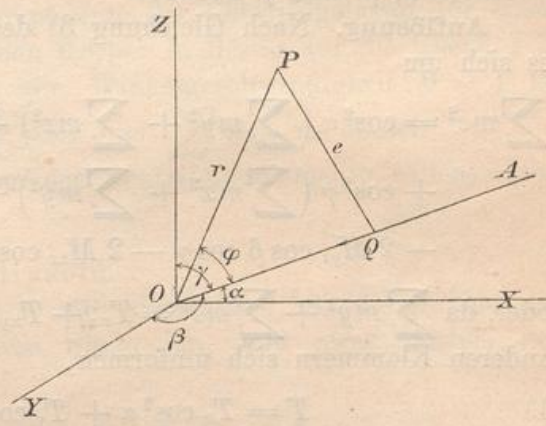


Fig. 278.



$$1) \quad e^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \cos^2 \beta + z^2 \cos^2 \gamma) \\ - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha$$

oder

$$e^2 = x^2 (1 - \cos^2 \alpha) + y^2 (1 - \cos^2 \beta) + z^2 (1 - \cos^2 \gamma) \\ - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha,$$

also

$$2) \quad e^2 = x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + z^2 \sin^2 \gamma \\ - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha.$$

Die Ausziehung der Quadratwurzel giebt e .

Im Folgenden soll jedoch eine andere Formel angewendet werden, die dadurch entsteht, daß man in Formel 1) die Klammer mit $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ multipliziert, wodurch nichts geändert wird. Dabei erhält man nach leichter Umformung

$$3) \quad e^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma \\ - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha.$$

382) **Aufgabe.** Die axialen Trägheits- und Centrifugalmomente eines Körpers in Bezug auf ein Koordinatensystem seien bekannt. Wie groß ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse OA , die mit den Koordinatenachsen die Winkel α , β und γ bildet?

Auflösung. Nach Gleichung 3) des vorigen Abschnittes handelt es sich um

$$\sum m e^2 = \cos^2 \alpha \left(\sum m y^2 + \sum m z^2 \right) + \cos^2 \beta \left(\sum m z^2 + \sum m x^2 \right) \\ + \cos^2 \gamma \left(\sum m x^2 + \sum m y^2 \right) - 2 M_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ - 2 M_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 M_{zx} \cos \gamma \cos \alpha,$$

oder, da $\sum m y^2 + \sum m z^2 = T_{xz} + T_{xy} = T_x$ ist und entsprechend die anderen Klammern sich umformen,

$$1) \quad T = T_x \cos^2 \alpha + T_y \cos^2 \beta + T_z \cos^2 \gamma \\ - 2 M_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2 M_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 M_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment kann also mit Hilfe der Axialmomente und der Centrifugalmomente leicht bestimmt werden.

383) **Bedeutung der Centrifugalmomente.** Ein Körper drehe sich um die Z -Achse, und P sei die momentane Lage eines Körperteilchens, dessen Entfernung von der Drehungsachse gleich e

sein möge. Ist ϑ die Winkelgeschwindigkeit, so entsteht die Centrifugalkraft $p = me\vartheta^2$, die in den Richtungen der Koordinatenachsen die Komponenten $p_x = me\vartheta^2 \cos \xi$ und $p_y = me\vartheta^2 \cos \eta$ hat, wofür man schreiben kann $p_x = mx\vartheta^2$, $p_y = my\vartheta^2$. Die statischen Momente dieser Komponenten in Bezug auf die Grundebene sind

$$\vartheta^2 \sum mzx$$

und

$$\vartheta^2 \sum myz.$$

Ist $\vartheta = 1$, so hat man

$$M_{xz} = \sum mzx \text{ und } M_{yz} = \sum myz,$$

wobei x und z , ebenso y und z ihre Rolle vertauschen können. Also: $\sum mzx = M_{xz}$ ist zu deuten als das Moment der X -Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die z -Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene XY , oder es bedeutet das Moment der Z -Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die X -Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene YZ . In beiden Fällen ist jedoch die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = 1$ zu setzen. Entsprechend sind $\sum myz$ und $\sum mzx$ zu deuten.

Beispiele für Berechnung der Centrifugalmomente sollen unten gegeben werden.

384) Das Trägheitsellipsoid.

Man führe in Gleichung 1) des Abschnittes 382 die Radien der Trägheitsmomente im früheren Sinne ein, und zwar mittels der Gleichungen

$$\varrho^2 J = T, \quad \varrho_x^2 J = T_x, \quad \varrho_y^2 J = T_y, \quad \varrho_z^2 J = T_z,$$

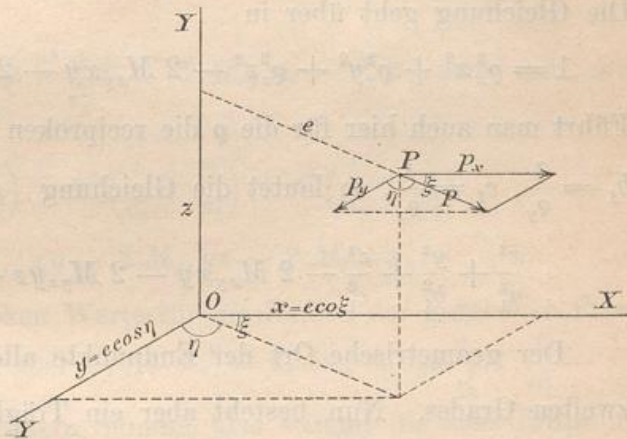
dividiert man dann beiderseits durch J , so erhält man

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \cos \alpha + \varrho_y^2 \cos \beta + \varrho_z^2 \cos \gamma$$

$$- 2 M_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2 M_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 M_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Man berechne hieraus ϱ und trage den reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ von O aus auf der Achse OA ab. Bezeichnet man die Koordinaten des

Fig. 279.



Endpunktes mit x, y, z , so dafs $\frac{1}{\varrho} \cos \alpha = x$, $\frac{1}{\varrho} \cos \beta = y$, $\frac{1}{\varrho} \cos \gamma = z$ ist, so kann man für sämtliche Cosinus ihre Werte $\cos \alpha = x\varrho$, $\cos \beta = y\varrho$, $\cos \gamma = z\varrho$ einsetzen, worauf sich beiderseits ϱ^2 weghebt. Die Gleichung geht über in

$$1 = \varrho_x^2 x^2 + \varrho_y^2 y^2 + \varrho_z^2 z^2 - 2 M_{xy} xy - 2 M_{yz} yz - 2 M_{zx} zx.$$

Führt man auch hier für die ϱ die reciproken Werte ein, also $a_1 = \frac{1}{\varrho_x}$, $b_1 = \frac{1}{\varrho_y}$, $c_1 = \frac{1}{\varrho_z}$, so lautet die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 2 M_{xy} xy - 2 M_{yz} yz - 2 M_{zx} zx = 1.$$

Der geometrische Ort der Endpunkte aller $\frac{1}{\varrho}$ ist also eine Fläche zweiten Grades. Nun besteht aber ein Trägheitsmoment $\sum m r^2$ aus lauter positiven Gliedern, kann also im allgemeinen nie Null sein. Kann aber ϱ nicht Null werden, so kann $\frac{1}{\varrho}$ nicht unendlich werden, d. h. die Fläche besitzt keine unendlich fernen Punkte, sie ist also ein Ellipsoid, aber nicht ein Paraboloid oder Hyperboloid. Sie heifst das Trägheitsellipsoid des Körpers für den Punkt O . Ist O der Schwerpunkt, so heifst die Fläche das Centralellipsoid des Körpers.

385) [Dasselbe Resultat hätte Gleichung 1) des Abschnittes 381 gegeben. Man hätte erhalten

$$\begin{aligned} \sum m e^2 &= \sum m x^2 \sin^2 \alpha + \sum m y^2 \sin^2 \beta + \sum m z^2 \sin^2 \gamma \\ &\quad - 2 M_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2 M_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 M_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 1) \quad T &= T_{yz} \sin^2 \alpha + T_{zx} \sin^2 \beta + T_{xy} \sin^2 \gamma \\ &\quad - 2 M_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2 M_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 M_{zx} \cos \gamma \cos \alpha, \end{aligned}$$

so dafs man das Axialmoment T auch mit Hülfe der Planmomente berechnen kann. Führt man die Trägheitsradien ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= \varrho_{yz} \sin^2 \alpha + \varrho_{zx} \sin^2 \beta + \varrho_{xy} \sin^2 \gamma - 2 M_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad - 2 M_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 M_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus ϱ für jede Achse und trägt man den reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ ein, so mufs man dieselbe Fläche erhalten, wie vorher. Hier

giebt aber $\frac{1}{\rho} \sin \alpha$ nicht eine Koordinate x , sondern den Abstand von der X -Achse, dessen Quadrat gleich $y^2 + z^2$ ist. Ebenso ist es mit den andern Größen. Nach beiderseitiger Division durch ρ erhält man

$$1 = \frac{y^2 + z^2}{a_2^2} + \frac{z^2 + x^2}{b_2^2} + \frac{x^2 + y^2}{c_2^2} - 2 M_{xy} xy - 2 M_{yz} yz - 2 M_{zx} zx,$$

oder

$$x^2 \left(\frac{1}{b_2^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{b_2^2} \right) \\ - 2 M_{xy} xy - 2 M_{yz} yz - 2 M_{zx} zx,$$

wo a_2, b_2, c_2 die reciproken Werte für die Radien der gegebenen Planmomente bedeuten. Da aber $T_{xy} + T_{yz} = T_y$ ist, so ist $\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{a_2^2} = \frac{1}{b_2^2}$, ebenso ist es mit der andern Summe, also stimmt die neue Ellipsoidgleichung mit der früheren überein.]

386) Jedes Ellipsoid hat aber drei Hauptachsen a, b, c , für die seine Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hier fehlen die Teile $- 2 M_{xy} xy - 2 M_{yz} yz - 2 M_{zx} zx$, also müssen für die Hauptachsen als Koordinatenachsen die Centrifugalmomente gleich Null sein. Dies gilt von den Hauptachsen für jedes Trägheitsellipsoid eines Körpers.

Geht man also von den Hauptachsen eines solchen aus, so vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für ein Trägheitsmoment zu folgender Gestalt:

$$T = T_x \cos^2 \alpha + T_y \cos^2 \beta + T_z \cos^2 \gamma.$$

387) **Aufgabe.** Gegeben seien drei Trägheitsmomente T_1 in Bezug auf drei beliebige Achsen durch O , die mit den Hauptachsen die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bilden. Die Momente für die Hauptachsen sollen bestimmt werden.

Auflösung. Man stelle folgende Gleichungen auf:

$$T_x \cos^2 \alpha_1 + T_y \cos^2 \beta_1 + T_z \cos^2 \gamma_1 = T_1,$$

$$T_x \cos^2 \alpha_2 + T_y \cos^2 \beta_2 + T_z \cos^2 \gamma_2 = T_2,$$

$$T_x \cos^2 \alpha_3 + T_y \cos^2 \beta_3 + T_z \cos^2 \gamma_3 = T_3.$$

Sie sind in Bezug auf die gesuchten T vom ersten Grade, lassen sich also leicht auflösen.

388) Bemerkung über die Dynamik.

Der Umstand, daß die Centrifugalmomente für die Hauptachsen jedes Trägheitsellipsoides verschwinden, ist für die Dynamik von besonderer Bedeutung.

Aus Abschnitt 4 ist bekannt (ebenso durch die Deutung in Nr. 383), daß bei der Drehung eines Körpers um eine feste Achse an dieser ein umstürzendes, d. h. auf Änderung der Achsenrichtung wirkendes Kräftepaar zur Geltung kommt. Dieses Kräftepaar wird aber nach obigem Null, wenn der Körper sich um eine der Hauptachsen des ihm zugehörigen Trägheitsellipsoides dreht. Dann also bleibt nur eine auf Parallelverschiebung der Achse hinarbeitende Centrifugalkraft übrig. Geht aber die Drehungsachse durch den Schwerpunkt des Körpers, oder handelt es sich um das Centralellipsoid, so ist auch die letztere Kraft gleich Null, so daß weder Kraft noch Kräftepaar wirken. Daraus folgt im letzteren Falle:

Dreht sich ein Körper um eine Hauptachse des Centralellipsoides seiner Trägheitsmomente, so wird die Achse durch die Drehung in keiner Weise beeinflusst, d. h. sie übernimmt die Rolle einer freien Achse.

Angenommen z. B. der Erdkörper oder vielmehr das an seine Stelle zu setzende ideale Geoid sei ein homogenes dreiaxiges Ellipsoid, dessen Hauptachsen, wie sich zeigen wird, mit denen seines Trägheitsellipsoides zusammenfallen, angenommen ferner, die Drehung finde um eine der Hauptachsen statt, so würde diese Drehungsachse, vorausgesetzt daß keine äußeren Kräfte störend einwirken, ihre Richtung im Raume konstant beibehalten.

Würde jedoch durch irgend welche äußere Einwirkung, z. B. durch hinreichend wuchtigen Anprall eines Meteorsteins oder eines Weltkörpers eine andere Achse zur Drehungsachse gemacht, die nicht Hauptachse ist, so würde deren Richtung nicht konstant bleiben, sondern näher zu untersuchenden Schwankungen unterworfen sein.

Wird ein homogener Rechteckskörper emporgeschleudert, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer Parabel und außerdem findet Drehung um eine Schwerpunktsachse statt. Ist zufällig eine der Mittellinien die Drehungsachse, so behält sie während des Wurfes ihre Lage bei, sonst aber ist dies nicht der Fall. Hierbei ist selbstverständlich vom Luftwiderstande abgesehen.

389) Fälle besonderer Einfachheit. In vielen Fällen ist die oben angegebene Berechnung der Hauptachsen nicht nötig, da man direkt aus der Gestalt des Körpers auf ihre Lage schließen kann. Ist z. B. die ZY -Ebene eine Symmetrieebene des Körpers, so gehört

zu jedem Elemente mxy des Centrifugalmomentes ein symmetrisches $m(-x)y = -mxy$, so dafs je zwei einander aufheben. In diesem Falle ist also $\sum mxy = 0$ und $\sum mxz = 0$ und jedes auf der Symmetrieebene errichtete Lot ist Hauptachse für das Trägheitsellipsoid, welches zu seinem Fußpunkte gehört. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man die eine Hauptachsenrichtung für das Centralellipsoid.

Sind zwei Symmetrieebenen vorhanden, z. B. die Ebene ZY und XZ , so ist wegen der ersteren $\sum mxy = 0$ und $\sum mxz = 0$, wegen der zweiten $\sum myz = 0$ (und $\sum myx = 0$). Weil für jeden Punkt ihrer Schnittlinie alle drei Momente verschwinden, hat man in jedem sofort in den Loten und den Schnittlinien die drei Hauptachsen des Trägheitsellipsoides. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man die des Centralellipsoides.

Sind drei Symmetrieebenen vorhanden, die nicht durch ein und dieselbe Gerade gehen, so hat man in ihren Schnittlinien die Hauptachsen des Centralellipsoides.

Gehen hingegen die drei Symmetrieebenen durch eine Gerade, so ist für jeden Punkt der Schnittlinie das Trägheitsellipsoid ein Drehungsellipsoid mit der Geraden als Achse. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man das centrale Drehungsellipsoid.

Werden die letztgenannten drei Symmetrieebenen durch eine vierte (rechtwinklig) geschnitten, so handelt es sich um das centrale Drehungsellipsoid. Dies ist z. B. der Fall bei jedem regelmässigen Prisma. Bei einer gewissen Länge desselben ist das centrale Drehungsellipsoid eine Kugel, in anderen Fällen ist die Drehungsachse die kleinere oder die gröfsere des Drehungsellipsoides. Beim Rechteckkörper hat man den Fall der Kugel, wenn er ein Würfel ist. Man versuche den Fall der Kugel bei dem dreiseitigen, sechsseitigen u. s. w. regelmässigen Prisma aufzufinden. Beispiele folgen in Nr. 398 und 400.

Bei jedem regelmässigen Körper ist das Centralellipsoid eine Kugel.

390) Folgerungen aus der Existenz des Trägheitsellipsoides.

a) Weil jeder Halbmesser den umgekehrten Wert des ihm zugehörigen axialen Trägheitsmomentes angiebt, so braucht man nur die drei Hauptträgheitsmomente zu kennen, um geometrisch oder rechnerisch sämtliche für das durch O gehende Strahlenbündel zu finden.

b) Sind a, b, c die nach der Gröfse geordneten Hauptachsen, so entspricht die längste a dem kleinsten Trägheitsmoment, die kürzeste c dem gröfsten für das vorliegende Strahlenbündel.

c) Es war für beliebig gerichtete Koordinaten durch einen beliebigen Punkt für den gegebenen Körper

$$T_{xy} + T_{yz} = T_y, \quad T_{yz} + T_{zx} = T_z, \quad T_{zx} + T_{xy} = T_x, \\ T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = T_p,$$

folglich ist

$$T_x + T_y + T_z = 2(T_{xz} + T_{yx} + T_{zx}) = 2T_p$$

und

$$T_p = T_y + T_{zx} = T_z + T_{xy} = T_z + T_{yz}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch schreiben als folgende

$$\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 = \varrho_y^2, \quad \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2, \quad \varrho_{zx}^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_x^2, \\ \varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2(\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2) = 2\varrho_p^2, \\ \varrho_p^2 = \varrho_y^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_x^2 + \varrho_{yz}^2.$$

Die polaren, axialen und planen Trägheitsmomente hängen also einfach zusammen, und die verschiedenen Arten von Trägheitsradien lassen sich durch Pythagoreische Addition oder Subtraktion aus einander ableiten.

d) **Aufgabe.** Die Trägheitsradien ϱ_x , ϱ_y , ϱ_z seien bekannt, wie findet man alle übrigen mit diesen Achsen zusammenhängenden Trägheitsradien?

Auflösung. $\varrho_p = \sqrt{\frac{1}{2}(\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2)}, \quad \varrho_{xy} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_x^2}, \\ \varrho_{yz} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_y^2}, \quad \varrho_{zx} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_z^2}.$

e) Aus $\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2\varrho_p^2$ folgt der Satz: Die Summe der Trägheitsmomente für je drei auf einander senkrechte Achsen ist eine konstante Gröfse, nämlich gleich dem doppelten Quadrate des polaren Trägheitsmomentes.

Daraus folgt der geometrische Satz:

Die Summe der Quadrate der reciproken Werte je dreier auf einander senkrechter Halbmesser des Ellipsoides ist eine konstante Gröfse, und zwar gleich $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

f) Ist ferner der Satz bekannt, daß die Summe der Quadrate je dreier konjugierter Halbmesser des Ellipsoides konstant ist, so kann man für die entsprechenden axialen Trägheitsmomente folgern, daß die Summe ihrer reciproken Werte konstant sei, nämlich gleich $\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} + \frac{1}{T_c}$.

391) **Satz.** Legt man durch einen Punkt einer der Hauptachsen des Centralellipsoides Parallele zu den beiden andern Hauptachsen, so hat man für den Punkt die Richtungen der drei Hauptachsen des zugehörigen Trägheitsellipsoides.

Beweis. Wird der Punkt $x = a$ auf der X -Achse zur Untersuchung genommen, so handelt es sich in Bezug auf diesen um die neuen Koordinaten $\xi = (x - a)$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Die Centrifugalmomente für das neue Koordinatensystem sind also 1) $\sum m \xi \eta = \sum m (x - a) z = \sum m x y - \sum m a y = \sum m x y - a J y_s = 0$, denn $\sum m x y$ war im alten Systeme gleich Null, da es sich um die Hauptachse des Centralellipsoides handelte, und der Schwerpunktsabstand y_s ist gleich Null, denn er liegt im Mittelpunkte des Centralellipsoides.

2) $\sum m \eta \zeta = \sum m y z = 0$ aus entsprechendem Grunde.

3) $\sum m \xi \zeta = \sum m z (x - a) = \sum m x z - \sum m a z = \sum m x z - a J z_s = 0$, ähnlich wie vorher.

392) **Verschiebungssatz für das Centrifugalmoment.**

Verschiebt man den Nullpunkt des Koordinatensystems um $-a$, $-b$, $-c$ vom Schwerpunkte weg, so werden die Centrifugalmomente M_{xy} , M_{yz} , M_{zx} in $M_{xy} + abJ$, $M_{yz} + bcJ$, $M_{xz} + caJ$ verwandelt.

Beweis. $\sum m x y$ geht über in $\sum m (x + a) (y + b) = \sum m x y + a \sum m y + b \sum m x + ab \sum m$.

Dabei ist $\sum m y = 0$ und $\sum m x = 0$, weil es sich um den Schwerpunkt als Nullpunkt des Koordinatensystems handelt. Es bleibt übrig

$$M_{x_1 y_1} = M_{xy} + abJ.$$

Ebenso ist es bei den beiden andern Momenten.

393) Ist in $M_{xy} + abJ$ eine der beiden Koordinaten a , b gleich Null, so ist der Zusatz Null. Folglich:

Verschiebt man das Centrifugalmoment auf einer Schwerpunktsachse, so bleibt es ungeändert.

Ist die Schwerpunktsachse nun Hauptachse des Centralellipsoides, so bleibt der Wert des Centrifugalmomentes gleich Null, wenn man es auf dieser verschiebt.

394) **Anwendung.** Für den Schwerpunkt der Kugel sind in Bezug auf beliebig gerichtete Koordinatenachsen x , y , z die Centri-

fugalmomente gleich Null, weil sämtliche Achsen Hauptachsen sind. Verschiebt man nach $-a$, $-b$, $-c$, so erhält man

$$M_{x_1 y_1} = ab \frac{4}{3} r^3 \pi, \quad M_{y_1 z_1} = bc \frac{4}{3} r^3 \pi, \quad M_{z_1 x_1} = ca \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Ebenso ist es bei allen Körpern mit drei Symmetrieebenen, welche die drei Hauptachsen des Centralellipsoides geben. Man kann also für beliebige parallele Koordinatenebenen sofort die Centrifugalmomente hinschreiben.

395) Bisweilen lassen sich die Centrifugalmomente leicht für andere Koordinatenachsen berechnen, bei Sektoren von Drehungskörpern z. B. in Bezug auf die Drehungsachse z und die zugehörigen Achsen x und y . Dann hat man die Verschiebung nach dem Schwerpunkte hin vorzunehmen, wobei der Ausdruck abJ bzw. bcJ , caJ abzuziehen ist. Einige Beispiele sollen später gegeben werden.

396) **Aufgabe.** In Bezug auf die Hauptebene eines Trägheitsellipsoides seien bekannt T_{xy} , T_{yz} , T_{zx} . Wie groß ist das Trägheitsmoment T in Bezug auf eine durch den Koordinatennullpunkt gelegte Ebene, die mit den Hauptebenen yz , zx , xy die Winkel α , β (und γ) bildet?

Auflösung. Zunächst bestimmt sich γ aus der Gleichung

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

Aus Gleichung 1) des Abschnittes 385 folgt für das Lot l auf der gegebenen Ebene, welches mit den Achsen dieselben Winkel α , β und γ bildet,

$$T_l = T_{yz} \sin^2 \alpha + T_{zx} \sin^2 \beta + T_{xy} \sin^2 \gamma,$$

denn die Centrifugalmomente fallen weg. Folglich ist für die gegebene Ebene im Anschluß an 390c

$$T = T_p - T_l = T_{yz} + T_{zx} + T_{xy} - (T_{yz} \sin^2 \alpha + T_{zx} \sin^2 \beta + T_{xy} \sin^2 \gamma)$$

oder

$$T = T_{yz} \cos^2 \alpha + T_{zx} \cos^2 \beta + T_{xy} \cos^2 \gamma.$$

Die Formel für Planmomente ist also ganz analog der Formel für die Axialmomente.

397) **Möglichkeit von Fixpunkten.** Früher wurde gezeigt, daß für jede ebene Fläche zwei Fixpunkte existieren, in Bezug auf

welche die Trägheitsellipse ein Kreis ist. Es fragt sich, ob solche auch für jeden Körper in dem Sinne vorhanden sind, daß das Trägheitsellipsoid in Bezug auf sie eine Kugel ist, so daß auch hier Erleichterungen eintreten würden. Es wird sich zeigen, daß dies im allgemeinen nicht, sondern nur unter gewissen Bedingungen der Fall ist.

Man gehe von dem Koordinatensysteme der Hauptachsen des Centralellipsoides mit dem Schwerpunkte als Nullpunkt aus. Soll ein Punkt mit den Koordinaten a, b, c ein Fixpunkt sein, so müssen die durch ihn gelegten Parallelen zu den Koordinatenachsen Hauptachsen sein, denn jede Gerade durch den Mittelpunkt ist für die Kugel Hauptachse. Für diese Parallelen müßten also die Centrifugalmomente verschwinden, d. h. es müßte sein

$$1) \sum m(y-b)(z-c) = 0, \quad 2) \sum m(z-c)(x-a) = 0, \\ 3) \sum m(x-a)(x-b) = 0.$$

Zunächst soll die erste dieser Gleichungen untersucht werden. Sie lautet

$$\sum myz - b \sum mz - c \sum my + bc \sum m = 0.$$

Weil die Koordinaten Hauptachsen waren, ist $\sum myz = 0$ als zugehöriges Centrifugalmoment. Ferner ist $b \sum mz = bJz_s$, wo J der Inhalt des Körpers, z_s sein Schwerpunktsabstand ist. Dieser aber ist Null, denn es war vom Centralellipsoid ausgegangen, also ist $b \sum mz = 0$. Ebenso ist $c \sum my = 0$. Die Gleichung beschränkt sich auf $bc \sum m = bcJ = 0$. Da J als Körperinhalt von Null verschieden ist, muß das Produkt $bc = 0$ sein.

Ebenso giebt die zweite Gleichung die Bedingung $ca = 0$, die dritte die Bedingung $ab = 0$.

Erste Bedingung dafür, daß der Punkt ein Fixpunkt sei, ist also, daß zwei der Koordinaten a, b, c gleich Null sind, d. h. der Punkt muß auf einer der Koordinatenachsen liegen, d. h. auf einer Hauptachse. Angenommen nun, der Punkt habe die Koordinaten $a, b = 0, c = 0$, er liege also auf der durch den Schwerpunkt gehenden X-Achse, so sind, wenn T_x, T_y, T_z die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptachsen bedeuten, die in Bezug auf die durch den Punkt gelegten Parallelen genommenen $T_x, T_y + a^2J, T_z + a^2J$ (Verschiebungssatz). Da sie aber gleich groß sein sollen, so folgt zunächst aus $T_y + a^2J = T_z + a^2J$, daß $T_y = T_z$ sein muß, d. h. das ursprüngliche Centralellipsoid muß ein Drehungsellipsoid mit der X-Achse als Drehungsachse sein. Ferner folgt aus $T_x = T_y + a^2J$, daß $T_x > T_y$ und

ebenso $T_x > T_z$ sein muß, d. h. die X-Achse ist die kleinere Achse der Ellipse, durch deren Umdrehung das Centralellipsoid entstanden ist. Ist dies der Fall, so findet man a reell aus der Gleichung $T_x = T_y + a^2 J$ als

$$a = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}.$$

Folglich: Soll es Punkte geben, für die das Trägheitsellipsoid eine Kugel ist, so muß das Centralellipsoid ein durch Drehung um die kleinere Achse entstandenes Drehungsellipsoid sein. Je nachdem diese Drehungsachse die X-Achse, Y-Achse oder Z-Achse ist, hat man auf ihr die Punkte zu suchen in der Entfernung

$$a = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}, \text{ oder } b = \pm \sqrt{\frac{T_y - T_z}{J}}, \text{ } c = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}.$$

Dafs diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, ergibt sich aus der Probe für a . Ist nämlich das Centralellipsoid durch Drehung um die X-Achse entstanden, so ist zunächst $T_y = T_z$, und wenn die X-Achse die kleinere Achse war, $T_x > T_y$. Folglich giebt es auf der X-Achse Punkte

$$x = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}} = a.$$

In Bezug auf jeden der beiden Punkte ist $\frac{T_x - T_y}{J}$ oder $T_x = T_y + a^2 J$ und da $T_y = T_z$ ist, $T_x = T_z + a^2 J$. Weil die drei Momente gleich sind, ist das Trägheitsellipsoid für die beiden Punkte eine Kugel.

398) **Beispiel.** Das quadratische Prisma mit den Kanten a, a, h .

Die Mittellinien sind Hauptachsen des Centralellipsoids, und zwar soll h der Achsenrichtung z entsprechen. Die Hauptträgheitsmomente sind dann

$$T_y = \frac{J}{12} (a^2 + h^2), \quad T_x = \frac{J}{12} (h^2 + a^2), \quad T_z = \frac{J}{12} (a^2 + a^2) = \frac{J}{6} a^2,$$

also ist $T_x = T_y$, so dafs es sich um ein centrales Drehungsellipsoid handelt. Ist nun $h < a$, so giebt $c = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}$ zwei reelle Werte, nämlich $c = \pm \sqrt{\frac{a^2}{6} - \frac{a^2 + h^2}{12}} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{12}}$. Diese Punkte sind die Fixpunkte, wie auch die Probe ergibt.

Ist $a = h$, so fallen die Punkte $\pm c$ in den Schwerpunkt, und es handelt sich um den Würfel, dessen Centralellipsoid eine Kugel ist.

399) **Bemerkung.** Für jedes regelmässige Prisma und für jedes Prisma oder jeden Cylinder mit mehr als zwei durch die Achse gehenden Symmetrieebenen ist das Centralellipsoid ein Drehungsellipsoid, z. B. mit der z -Achse als Drehungsachse. Es läßt sich also stets eine Höhe h so bestimmen, daß das Centralellipsoid eine Kugel wird. Diese Höhe ist der Grenzwert für die Existenz von Fixpunkten.

400) Beispiel des regelmässigen dreiseitigen Prismas.

$$T_x = \frac{b^2 h^3 \sqrt{3}}{48} + \frac{b^4 h \sqrt{3}}{96} = T_y, \quad T_z = \frac{b^4 h \sqrt{3}}{48}.$$

Setzt man $T_z = T_x$, so folgt $h = b \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Für diese Höhe ist das Centralellipsoid eine Kugel, bei geringerer Höhe aber sind zwei leicht zu berechnende Fixpunkte vorhanden, nämlich in der Entfernung

$$c = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{b^4 h \sqrt{3}}{96} - \frac{2 b^2 h^3 \sqrt{3}}{96}}{\frac{b^2}{4} \sqrt{3} h}} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 2 h^2}{24}}.$$

401) Entsprechendes gilt von den Planmomenten. Handelt es sich wieder um $x = a$, ist also $T_{xy} = T_{xz}$, so bleiben diese beiden Momente für a unverändert, nur T_{yz} verwandelt sich in $T_{yz} + a^2 J$.

Soll nun $T_{yz} + a^2 J = T_{zx}$ sein, so folgt $a = \pm \sqrt{\frac{T_{zx} - T_{yz}}{J}}$, was mit $a = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}$ identisch ist. Ebenso ist im Falle b

$$b = \pm \sqrt{\frac{T_{yx} - T_{zx}}{J}}, \quad \text{im Falle c dagegen } c = \pm \sqrt{\frac{T_{zy} - T_{xy}}{J}}.$$

Bedeutung und Anwendbarkeit der Fixpunkte sind also für Körper weit geringer, als für ebene Flächen, weil nur der Drehungsfall ins Auge zu fassen ist.

402) Die Aufgabe, mit Hülfe der Fixpunkte die Momente für beliebige Ebenen und Achsen zu finden, ist genau nach Fig. 122 zu lösen, denn man kann das Koordinatensystem so legen,

dafs die Schnittlinie der durch S gelegten Schrägebene mit der Y -Achse zusammenfällt. (In der Figur ist dann γ statt α zu schreiben.)

Die Gleichung für Flächen

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 \cos^2 \alpha + \varrho_{zy}^2 \cos^2 \beta + \varrho_{xy}^2 \cos^2 \gamma$$

oder die für Achsen geltende

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \cos^2 \alpha + \varrho_y^2 \cos^2 \beta + \varrho_z^2 \cos^2 \gamma$$

vereinfacht sich dann dadurch, dafs $\beta = 90^\circ$ und $\gamma = 90^\circ - \alpha$ wird, also

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 \sin^2 \gamma + \varrho_{xy}^2 \cos^2 \gamma,$$

bezw.

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \sin^2 \gamma + \varrho_z^2 \cos^2 \gamma.$$

Da nun

$$c = \pm \sqrt{\frac{T_{zy} - T_{xy}}{J}} = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}} = \pm \sqrt{\varrho_{zy}^2 - \varrho_{xy}^2} = \pm \sqrt{\varrho_z^2 - \varrho_x^2}$$

wird, so ergibt sich dieselbe Berechnungsmethode, wie bei Fig. 122, und es wird

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 + p_1 p_2$$

bezw.

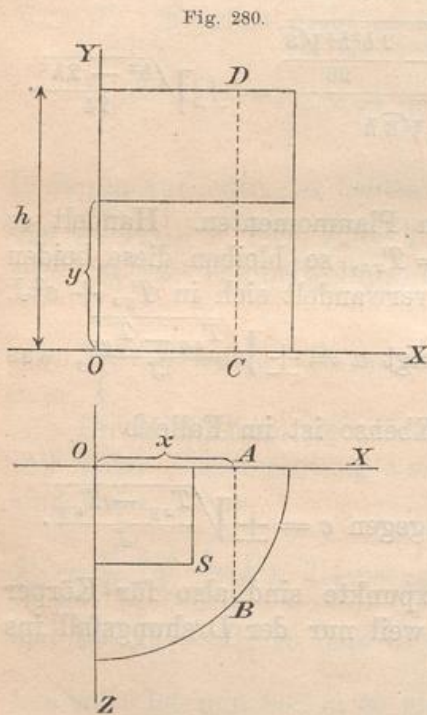
$$\varrho^2 = \varrho_x^2 + p_1 p_2.$$

403) Einige Beispiele von Centrifugalmomenten.

Quadrant des Kreiscylinders. In der Lage der Figur ist die Schicht in der Höhe y gleich $\frac{r^2 \pi}{4}$, ihr Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{4r}{3\pi}$, das entsprechende Moment also $\frac{r^2 \pi}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{r^3}{3}$, das Centrifugalmoment in Bezug auf die Grundebene also $\frac{r^3}{3} y$. Für den Körper von Höhe h erhält man also

$$\sum mxy = \frac{r^3 h^2}{3 \cdot 2} = \frac{r^3 h^2}{6}.$$

Ebenso groß ist $\sum myz$. Dagegen ist $\sum mzx$ folgendermaßen zu berechnen. Die Schicht im Abstände x ist gleich



$$AB \cdot CD = h\sqrt{r^2 - x^2},$$

der Schwerpunktsabstand von der Ebene XY ist $\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}$, das entsprechende Moment also $\frac{h}{2}(r^2 - x^2)$. Dies mit dem Abstände x multipliziert giebt $\frac{h}{2}r^2x - \frac{h}{2}x^3$. Für den ganzen Körper von 0 bis r entsteht $\frac{h}{2}r^2 \frac{r^2}{2} - \frac{h}{2} \frac{r^4}{4} = \frac{hr^4}{8}$. Die Verlegung nach dem Schwerpunkte des Körpers hin bietet keine Schwierigkeit.

404) Dreieckskörper. Schicht in Höhe y ist $a\frac{b}{h}y$, Schwerpunktsabstand von Ebene YZ ist $\frac{1}{2}\frac{b}{h}y$, das entsprechende Moment also $\frac{ab^2}{2h^2}y^2$, das Centrifugalmoment für die Grundebene also $\frac{ab^2}{2h^2}y^3$. Für den ganzen Körper von 0 bis h entsteht also

$$\sum mxy = \frac{ab^2 h^4}{2h^2 \cdot 4} = \frac{ab^2 h^2}{8}.$$

Die Schicht $a\frac{b}{h}y$ hat von der Ebene XY den Schwerpunktsabstand $\frac{a}{2}$ und das statische Moment $\frac{a^2b}{2h}y$, dies mit y multipliziert, giebt für die Grundebene des Centrifugalmoment $\frac{a^2b}{2h}y^2$. Für den ganzen Körper wird

$$\sum myz = \frac{a^2b h^3}{2h \cdot 3} = \frac{a^2bh^2}{6}.$$

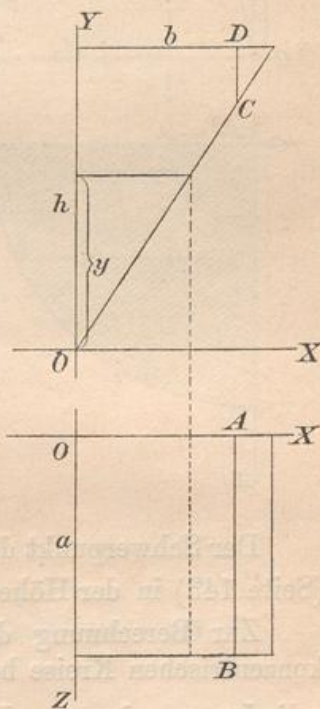
Im Abstände x hat man die Schicht

$$AB \cdot CD = a \cdot h \frac{b-x}{b} = ah - \frac{ah}{b}x.$$

Ihr Abstand von der Ebene XY ist $\frac{a}{2}$, also das statische Moment $\frac{a^2}{2}h - \frac{a^2h}{2b}x$. Dies ist mit x zu multiplizieren und giebt das Centrifugalmoment $\frac{a^2}{2}hx - \frac{a^2h}{2b}x^2$. Für den ganzen Körper wird

$$\sum mzx = \frac{a^2h}{2} \frac{b^2}{2} - \frac{a^2h}{2b} \frac{b^3}{3} = \frac{a^2b^2h}{12}.$$

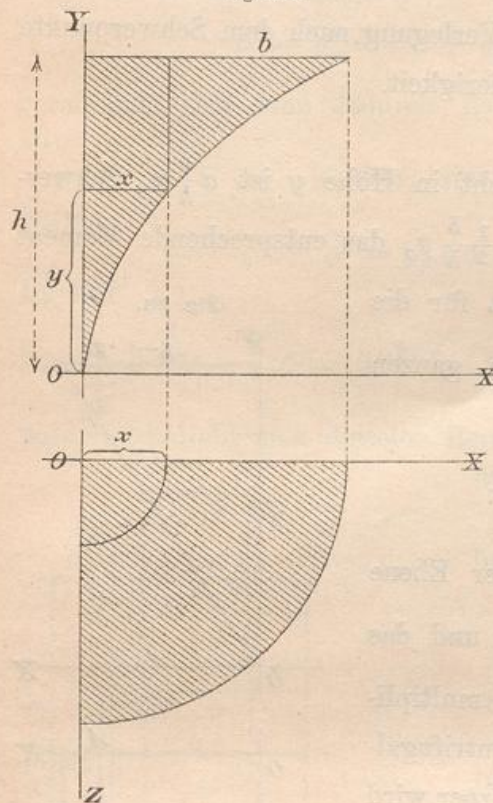
Fig. 281.



Die Verlegung nach dem Schwerpunkte hin macht keine Schwierigkeiten.

In ähnlicher Weise lassen sich parabolische Cylinder p^{ter} Ordnung und entsprechende Sektoren von Drehungsparaboloiden behandeln, auch kann man zu Drehungskörpern übergehen, deren Profilkurven Parabeln gemischter Ordnung angehören, z. B.:

Fig. 282.



405) Quadrant eines parabolischen Drehungskörpers.

In Höhe y ist $x = \frac{b}{h^2} y^2$, die Viertelkreisschicht ist also

$$\frac{x^2 \pi}{4} = \frac{b^2 y^4 \pi}{4 h^4},$$

sein Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{4x}{3\pi} = \frac{4by^2}{3\pi h^2}$, also das Moment

$$\sum mx = \frac{b^2 y^4 \pi}{4 h^4} \cdot \frac{4by^2}{3\pi h^2} = \frac{b^3 y^6}{3 h^6}.$$

Dies mit y multipliziert giebt $\frac{b^3 y^7}{3 h^6}$ als das Centrifugalmoment der Schicht in Bezug auf die Grundebene. Für den ganzen Körper wird

$$\sum mxy = \frac{b^3 h^8}{3 h^6 \cdot 8} = \frac{b^3 h^2}{24}.$$

Der Schwerpunkt des Körpers liegt nach der parabolischen Tabelle (Seite 143) in der Höhe $y_s = \frac{5}{6} h$, wie der des vollständigen Körpers.

Zur Berechnung des andern Abstandes kann die Methode der konzentrischen Kreise benutzt werden. In Fig. 282 ist einer der Teilkörper angedeutet. Ist x sein Radius, so ist die Grundlinie $\frac{x\pi}{2}$, die Höhe $h - y = h - \frac{h}{\sqrt{b}} \sqrt{x}$, also die Mantelfläche

$$\frac{x\pi}{2} h - \frac{x\pi}{2} \frac{h}{\sqrt{b}} \sqrt{x} = \frac{\pi h}{2} x - \frac{\pi h}{2\sqrt{b}} x^{\frac{3}{2}}.$$

Sein Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{2x}{\pi}$, also das statische Moment in Bezug auf diese

$$\frac{2x\pi h}{\pi \cdot 2} x - \frac{2x}{\pi} \frac{\pi h}{2\sqrt{b}} x^{\frac{3}{2}} = hx^2 - \frac{h}{\sqrt{b}} x^{\frac{5}{2}}.$$

Läßt man die Radien von 0 bis b wachsen, so erhält man das statische Gesamtmoment des Körpers als

$$h \frac{b^3}{3} - \frac{h}{\frac{1}{b^2} \frac{7}{2}} \frac{b^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\right) hb^3 = \frac{1}{21} hb^3.$$

Dividiert man dies durch den Körperinhalt $\frac{1}{4} \cdot b^2 \pi \frac{h}{5} = \frac{b^2 \pi h}{20}$, so folgt als Schwerpunktsabstand $x_s = \frac{20b}{21\pi}$. Verlegt man endlich das Centrifugalmoment $\frac{b^3 h^2}{24}$ nach dem Schwerpunkte, so ist abzuziehen

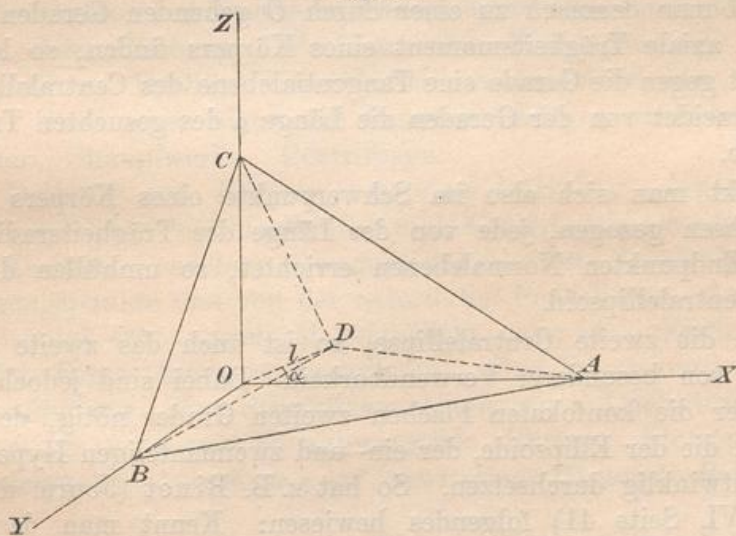
$$x_s \cdot y_s J = \frac{20b}{21\pi} \cdot \frac{5h}{6} \cdot \frac{b^2 \pi h}{20} = \frac{5}{126} b^3 h^2,$$

so daß man hat $\frac{b^3 h^2}{504}$.

406) Das zweite Centralellipsoid.

Bildet man ein Centralellipsoid, dessen Hauptachsen nicht die

Fig. 283.



reciproken Werte der Radien a, b, c , sondern diese selbst sind, so ist seine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die Tangentialebene ABC in Figur 283, die sich in einem Punkte

x, y, z der Fläche an diese legen läßt, hat, wie leicht zu zeigen ist, die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

Setzt man y und z gleich Null, so folgt für A der Abstand $OA = x = \frac{a^2}{x_1}$. Ist OD das Lot vom Nullpunkte auf die Fläche, so wird für dessen Winkel mit der X -Achse $\frac{l}{x} = \frac{lx_1}{a^2} = \cos \alpha$. Ebenso $\cos \beta = \frac{ly_1}{b^2}$, $\cos \gamma = \frac{lz_1}{c^2}$. Daraus kann man bilden

$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma = l^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} \right) = l^2,$$

denn weil der gegebene Punkt auf der Fläche des Ellipsoides liegt, ist die letzte Klammer gleich 1. Nach Abschnitt 385 ist aber der Ausdruck links, wenn man wie hier von den Hauptachsen des Centralellipsoides ausgegangen ist, gleich dem Werte des Trägheitsradius für die Achse mit den Winkeln α, β, γ .

Das von Clebsch eingeführte und von Culmann vielfach benutzte zweite Centralellipsoid hat also die Eigenschaft, daß die Lote vom Nullpunkte auf die Tangentialebenen den Längen der Trägheitsradien für die betreffenden Achsen entsprechen.

Will man demnach zu einer durch O gehenden Geraden das zugehörige axiale Trägheitsmoment eines Körpers finden, so lege man senkrecht gegen die Gerade eine Tangentialebene des Centralellipsoides, diese schneidet von der Geraden die Länge ρ des gesuchten Trägheitsradius ab.

Denkt man sich also im Schwerpunkte eines Körpers beliebig viele Achsen gezogen, jede von der Länge des Trägheitsradius, und in den Endpunkten Normalebene errichtet, so umhüllen diese das zweite Centralellipsoid.

Wie die zweite Centralellipse, so ist auch das zweite Centralellipsoid von besonderer Verwendbarkeit. Dabei sind jedoch Kenntnisse über die konfokalen Flächen zweiten Grades nötig, deren drei Gruppen, die der Ellipsoide, der ein- und zweimanteligen Hyperboloide sich rechtwinklig durchsetzen. So hat z. B. Binet (Journ. de l'école polyt. XVI, Seite 41) folgendes bewiesen: Kennt man das zweite Centralellipsoid eines Körpers und sucht man die Richtung der Hauptachsen für einen beliebigen Raumpunkt, so braucht man nur für die drei zum Centralellipsoid konfokalen Flächen, die durch den Punkt gelegt werden können, in diesem die Normalen zu errichten, wodurch man die gesuchten Achsenrichtungen hat. Auch die Längen lassen sich leicht berechnen.

Man vergleiche hierzu die in den Vorbemerkungen besprochene Abhandlung von Clebsch und den betreffenden Abschnitt in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik, z. B. bei Schell, ebenso in der Graphischen Statik von Culmann.

Hier ist das zweite Ellipsoid nur der Vollständigkeit wegen genannt.

407) Bemerkungen zur Methode von Reye. Reye hat in Schlömilchs Zeitschrift, Band X, Seite 432 u. s. f. gezeigt, wie man für die Zwecke der Mechanik einen Körper durch einen Massenpunkt ersetzen kann, ähnlich wie in Abschnitt VII F die ebene Fläche durch drei Punkte ersetzt wurde. Auch auf diese ziemlich viel Vorkenntnisse beanspruchenden Dinge soll hier nur hingewiesen werden, da sie über den elementaren Zweck dieses Buches hinausgehen.

408) Anwendbarkeit der Lehre von den körperlichen Trägheits- und Centrifugalmomenten.

a) Berechnung der Energie von Körpern, die sich um eine feste Schwerpunktsachse drehen. Wucht von Schwungrädern, Mühl- und Schleifsteinen. Einfluß der Schwungmassen auf plötzlich festgeklemmte Wellen oder Achsen. Arbeitsleistung, Überwindung von Reibungswiderständen in Folge der Wucht. Beschleunigte Drehung um solche Achsen. Atwoodsche Fallmaschine ohne und mit Berücksichtigung der Reibung. Probleme der Fadenspannung. — Das Schwungrad als Egalisator der Maschinen bei einer oder mehreren Kurbeln. Stofs gegen einen sich drehenden Körper, unelastischer und elastischer. Stampfwerke. Centrifugen.

b) Drehung von Körpern um eine beliebige feste Achse. Einwirkung der Centrifugalkräfte und Centrifugalmomente auf die Achse. Energie. Pendelnde Bewegung um eine feste Achse. Lehre vom Schwingungspunkte und von der reduzierten Pendellänge. Anwendung auf horizontal schwingende Magnetnadeln unter dem Einflusse einer richtenden Kraft (Intensitätsmessungen). Das Reversionspendel und die Bestimmung der Schwerebeschleunigung. Unelastischer und elastischer Stofs gegen so schwingende Körper. Stofspunkt und Stofsmittelpunkt. Anwendung auf schwingende Hämmer. Ballistisches Pendel.

c) Berechnung der Energie von Körpern, die sich fortschreitend und drehend bewegen. Herabrollen auf schiefer Ebene unter Berücksichtigung des Widerstandes gegen das Drehen. Beschleunigtes Rollen auf horizontaler Ebene. Verlangsamtes Fallen beim Abwickeln umgeschlungener Fäden von der Achse. Anwendungen der Fadenspannung auf die Reibungstheorie. Grenzwinkel für das alleinige

Rollen auf schiefer Ebene. Rollen und Gleiten zugleich, sowohl auf schiefer als auch auf horizontaler Ebene. Fälle des Hinaufrollens auf schiefer Ebene, sowohl bei geradliniger, als auch bei parabolischer Bahn. Bewegung auf krummer Fläche.

d) Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt. Sphärische Schwingungen des um einen festen Punkt schwingenden physischen Pendels. Gewisse Fälle des Foucaultschen Pendels. Theorie des Fesselschen Apparates und des Kreisels. Anwendungen auf Präcession und Nutation. Unelastischer und elastischer Stofs gegen solche Körper.

e) Drehungsbewegung freier Körper. Freie Drehungsachsen (Hauptachsen des Trägheitsellipsoides). Drehung um ganz beliebige Achsen. Unelastischer und elastischer Stofs gegen solche Körper. Freiwillige Drehungsachse für den ersten Augenblick. Parabolischer Wurf bei gleichzeitigem Drehen. Bewegung und Drehung der Himmelskörper. Bewegung und Drehung im widerstehenden Mittel. Ballistik der Geschosse.

f) Allgemeine Pendelbewegungen beliebig gestalteter Körper auf der Ebene. Herabrollen solcher Körper auf der schiefen Ebene oder auf krummen Flächen. Allgemeine Pendelbewegungen schwimmender Körper, z. B. Schwankungen der Schiffe.