Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 5. Die schwingende Bewegung als Komponente einer gleichförmigen Kreisbewegung. Beispiele 27-30

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

$$\left.\begin{aligned} \text{somit } \overline{AB} : \overline{BB'} &= t^2 : (t'^2 - t^2) \\ \overline{AC} : \overline{CC'} &= t^2 : (t'^2 - t^2) \end{aligned}\right\} \text{daraus}$$

$$\overline{AB} : \overline{BB'} = \overline{AC} : \overline{CC'} \text{ oder}$$

$$\overline{CD} : \overline{ED'} = \overline{AC} : \overline{DE}.$$

Demnach wieder $\triangle ACD \sim \triangle DED'$, so daß ADD' auch hier eine gerade Linie wird. Das Gesetz lautet daher:

„Die resultierende Bewegung aus zwei gleichförmig beschleunigten Seitenbewegungen mit den Anfangsgeschwindigkeiten Null ist eine geradlinige."

Die beiden letzten Sätze lassen sich in einen einzigen zusammenfassen, nämlich:

„Die resultierende Bewegung aus zwei gleichartigen Seitenbewegungen ist eine geradlinige."

c) Die Seitenbewegungen seien ungleichartige. Die Bewegung in der Richtung $\overline{AX}$ sei eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit c, die in der Richtung $\overline{AY}$ eine gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null und mit der Beschleunigung p, Fig. 7.

Dann wird ebenso wie früher

$$\overline{AB} = c \cdot t \qquad \overline{AC} = \frac{p}{2} t^2$$

$$\overline{AB'} = c \cdot t' \qquad \overline{AC'} = \frac{p}{2} t'^2$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} : \overline{AC} &= c : \frac{p}{2} t \\ \overline{AB'} : \overline{AC'} &= c : \frac{p}{2} t' \end{aligned}\right\} \text{da } \frac{p}{2} t' > \frac{p}{2} t,$$

wird auch $\overline{AB} : \overline{AC} > \overline{AB'} : \overline{AC'}$

oder $\overline{AB} : \overline{BD} > \overline{AB'} : \overline{B'D'}$.

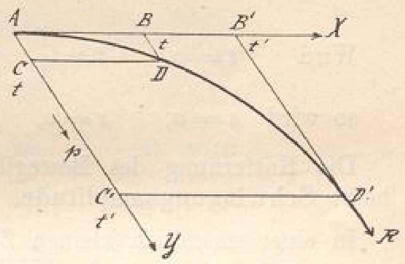

Fig. 7.

Dies ist der Fall, wenn ADD' eine Kurve ist. Es ergibt sich somit der Satz:

„Die resultierende Bewegung aus zwei ungleichartigen Seitenbewegungen ist eine krummlinige und wendet ihre konvexe Seite der gleichförmigen Seitenbewegung zu."

Die Zerlegung einer geradlinigen, auch einer krummlinigen Bewegung, in zwei Seitenbewegungen ist möglich, wenn entweder die Richtungen der letzteren oder Richtung und Art der einen Seitenbewegung gegeben sind.

---

§ 5. Die schwingende Bewegung als Komponente einer gleichförmigen Kreisbewegung.

Das Bewegliche A, Fig. 8, habe im Kreise die Geschwindigkeit c und die Umlaufszeit T. — Daher gilt

$$c \cdot T = 2a\pi \text{ und}$$

$$c = \frac{2a\pi}{T}$$

Die Kreisbewegung AM werde nun in Komponenten $\overline{AM_1}$ und $\overline{AM_2}$

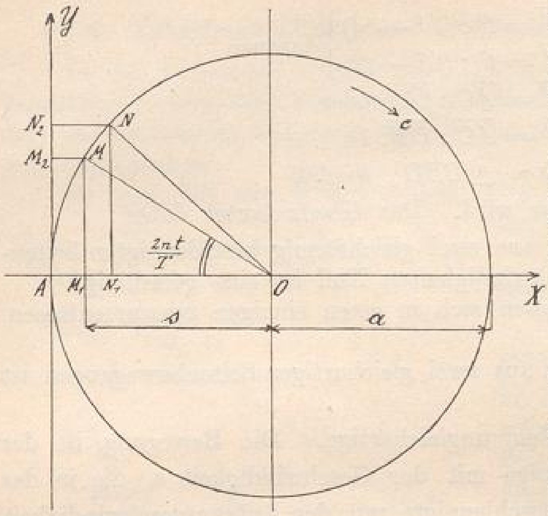

Fig. 8.

zerlegt. Untersucht soll nun die erstere, in der Richtung $\overline{AX}$ erfolgende Bewegung werden.

Die jeweilige Entfernung des Beweglichen vom Mittelpunkte O des Kreises wurde mit s bezeichnet. Dann ergibt sich für die Lage M_1

$$s = a \cdot \cos \alpha.$$

In einer Sekunde legt der Punkt A den Winkel $\frac{2\pi}{T}$ zurück, mithin in t Sekunden den Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t$. — Daher wird die Formel für s

$$s = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Wird $\quad t = o, \quad t = \frac{T}{4}, \quad t = \frac{T}{2}, \quad t = \frac{3}{4}T, \quad t = T,$

so wird $\quad s = a, \quad s = o, \quad s = -a, \quad s = o, \quad s = +a.$

Die Entfernung des Beweglichen von O verändert sich also mit t. — a heißt **Schwingungsamplitude.**

In einer unendlich kleinen Zeit τ kommt das Bewegliche im Kreise von M nach N, in der Richtung $\overline{AX}$ von M_1 nach N_1. — Die Geschwindigkeit in letzterer ist daher

$$v = \frac{\overline{M_1 N_1}}{\tau} = \frac{\overline{M_1 O} - \overline{N_1 O}}{\tau}$$

$$= \frac{a}{\tau} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) - a \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{T}(t + \tau)\right]$$

Da $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$ ist, wird

$$v = -\frac{2a}{\tau} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\tau}{T}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi\tau}{T}\right)$$

$$v = \frac{2a}{\tau} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\tau}{T}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi\tau}{T}\right)$$

Nun kann wegen der Kleinheit von $\frac{\pi\tau}{T}$ statt $\sin\frac{\pi\tau}{T}$ der Bogen $\frac{\pi\tau}{T}$ selbst gesetzt werden; aus eben demselben Grunde darf $\frac{\pi\tau}{T}$ gegen $\frac{2\pi t}{T}$ vernachlässigt werden, so daß

$$v = \frac{2a}{\tau} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \frac{\pi\tau}{T} \text{ oder}$$

$$v = \frac{2a\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \text{ wird.}$$

$$\frac{2a\pi}{T} = c, \text{ daher}$$

$$\boldsymbol{v = c \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(18)}$$

für $t = o$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3}{4}T$, $t = T$

werden $v = o$, $v = c$, $v = o$, $v = -c$, $v = o$

„Das Maximum der Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung ist in O, die Minima sind in den Punkten A und B vorhanden."

In N_1 ist die Geschwindigkeit $v_1 = c \cdot \sin\left[\frac{2\pi(t+\tau)}{T}\right]$

Daher wird die Beschleunigung dort

$$b = \frac{v_1 - v}{\tau} = \frac{c \cdot \sin\left[\frac{2\pi(t+\tau)}{T}\right] - c \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\tau}$$

Da $\sin x - \sin y = \frac{1}{2} \sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$ ist, wird

$$b = \frac{c}{\tau} \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi\tau}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\tau}{T}\right)$$

$$b = 2\frac{c}{\tau} \cdot \frac{\pi\tau}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \text{ also}$$

$$b = \frac{2\pi c}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{2\pi c}{T} \cdot \frac{s}{a}$$

für $c = \frac{2a\pi}{T}$ substituiert, wird auch

$$b = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2a\pi}{T} \cdot \frac{s}{a} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s$$

Demnach ergibt sich die Beziehung

$$\boldsymbol{b = \frac{2\pi c}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{2\pi c}{T} \cdot \frac{s}{a} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(19)}$$

„Die Beschleunigung bei einer schwingenden Bewegung ist der Entfernung des Beweglichen von seiner Mittellage proportional."

Für $t = 0$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3}{4}T$, $t = T$

wird $b = \frac{2\pi c}{T}$, $b = 0$, $b = -\frac{2\pi c}{T}$, $b = 0$, $b = \frac{2\pi c}{T}$.

Beispiele.

27. Welchen Abstand vom Mittel hat ein in einer Horizontalen schwingender Punkt nach $^1/_8$ der ganzen Schwingungszeit?

Auflösung:

$$s = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot \frac{T}{8}}{T}\right) = a \cos \frac{\pi}{4}$$

$$s = a \cdot \cos 45^0$$

$$\mathbf{s = 0{,}707\, a},$$

d. h. die Entfernung des schwingenden Punktes vom Mittel beträgt 70,7 $^0/_0$ der Schwingungsamplitude.

28. Wie verhält sich die Geschwindigkeit eines schwingenden Punktes nach $^1/_8$ der ganzen Schwingungszeit zu derjenigen im Kreise, aus welchem die schwingende Bewegung abgeleitet ist?

$$v = c \sin \frac{\pi}{4} = 0{,}707\, c$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}707 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{0{,}707} = \frac{1}{1{,}414}$$

$$\mathbf{v : c = 1 : 1{,}414}$$

29. Nach welcher Zeit wird die Geschwindigkeit einer schwingenden Bewegung gleich der Hälfte von derjenigen im Kreise, aus welchem die schwingende Bewegung abgeleitet ist?

Auflösung:

$$v = c \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{c}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi t}{T} = 30^0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2t}{T} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{t = \frac{T}{12}}$$

d. h. nach $^1/_{12}$ der ganzen Schwingungszeit.

30. In welchem Verhältnis stehen mittlere und maximale Geschwindigkeit einer schwingenden Bewegung, wenn das Bewegliche in der Minute n Schwingungen mit der Schwingungsamplitude a macht?

Auflösung: Die mittlere Geschwindigkeit ist $\frac{2 \cdot 2a \cdot n}{60} = \frac{an}{15}$, die maximale Geschwindigkeit ist $c = \frac{2a\pi n}{60} = \frac{a\pi n}{30}$.

Daher

$$\frac{an}{15} : \frac{a\pi n}{30} = 1 : \frac{\pi}{2}$$

Mittl. Geschw. zu max. Geschw. $= 2 : \pi$.

Eine schwingende Bewegung ist z. B. diejenige des Kolbens (oder Kreuzkopfs) einer Dampfmaschine. Wäre die Schubstange unendlich lang, dann ergäbe sich die Kolbenbewegung als Komponente der Bewegung des Kurbelzapfens und es ließe sich sagen:

„Die mittlere Kolbengeschwindigkeit verhält sich zur Geschwindigkeit des Kurbelzapfens wie $2:\pi$.“

§ 6. Der Kurbeltrieb.

Zwischen den Kurbeldrehungswinkeln und den Kolben- oder Kreuzkopfwegen von Dampfmaschinen (Gasmotoren u. dgl.) existiert eine einfache Beziehung, welche im folgenden hergeleitet werden soll.

In Fig. 9 bedeutet $\overline{aO} = R$ die Kurbellänge und $\overline{Aa} = L\ (= 4 \div 5\,R)$ die Schubstangenlänge. Dreht sich nun die Kurbel aus ihrer Totlage um den

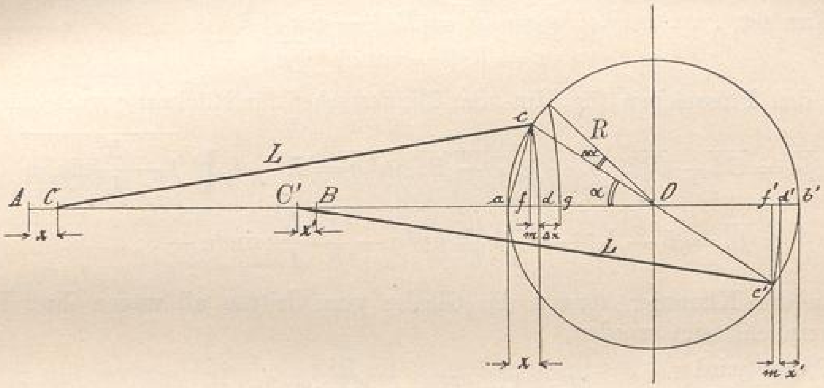

Fig. 9.

Winkel α, dann kommt die Schubstange in die Lage $\overline{Cc}$, so daß der Kreuzkopf und mit ihm der Kolben um $\overline{AC} = x$ aus seiner linken Totlage gezogen worden ist. Schlägt man nun aus C mit dem Halbmesser L den Bogen $\overline{cd}$, so ist $\overline{ad} = x$, d. h. ebenfalls der Kolbenweg.

Beweis: $\overline{Ad} = \overline{Aa} + \overline{ad} = L + \overline{ad}$ oder

$\overline{Ad} = \overline{dC} + \overline{AC} = L + x$, folglich

$L + x = L + \overline{ad}$ oder

$$\overline{ad} = x$$

Im Rückgange ist für denselben Kurbeldrehungswinkel der zugehörige Kolbenweg $\overline{b'd'}$.

Wäre die Schubstange unendlich lang, dann wäre der Kolbenweg im Hingange $\overline{af}$ und im Rückgange $\overline{bf'}$. Diese Wege sind einander gleich, denn

$$\triangle\, Oac \simeq \triangle\, Ob'c'$$

so daß auch $\triangle\, afc \simeq \triangle\, bc'f'$ ist, woraus sich

$$af = bf' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

ergibt. Demnach folgt der Satz:

„Die Kolbenwege sind bei unendlich langen Schubstangen für gleiche Kurbeldrehungswinkel im Hin- und Rückgange einander gleich.“