Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 6. Der Kurbeltrieb. Beispiele 31-35

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Eine schwingende Bewegung ist z. B. diejenige des Kolbens (oder Kreuzkopfs) einer Dampfmaschine. Wäre die Schubstange unendlich lang, dann ergäbe sich die Kolbenbewegung als Komponente der Bewegung des Kurbelzapfens und es ließe sich sagen:

„Die mittlere Kolbengeschwindigkeit verhält sich zur Geschwindigkeit des Kurbelzapfens wie $2 : \pi$.“

§ 6. Der Kurbeltrieb.

Zwischen den Kurbeldrehungswinkeln und den Kolben- oder Kreuzkopfwegen von Dampfmaschinen (Gasmotoren u. dgl.) existiert eine einfache Beziehung, welche im folgenden hergeleitet werden soll.

In Fig. 9 bedeutet $\overline{aO} = R$ die Kurbellänge und $\overline{Aa} = L\,(= 4 \div 5\,R)$ die Schubstangenlänge. Dreht sich nun die Kurbel aus ihrer Totlage um den

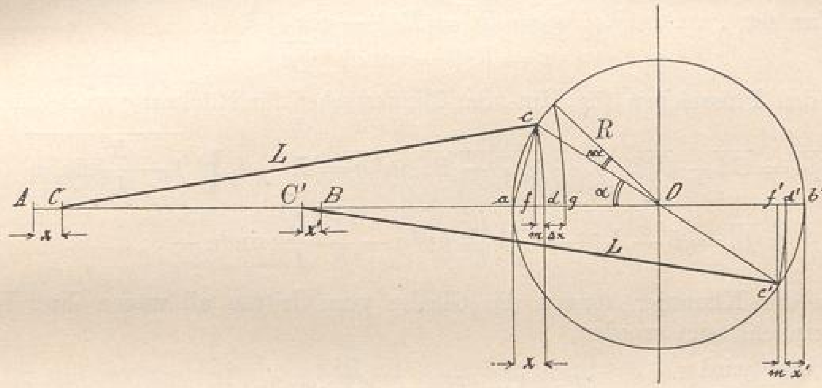

Fig. 9.

Winkel α, dann kommt die Schubstange in die Lage $\overline{Cc}$, so daß der Kreuzkopf und mit ihm der Kolben um $\overline{AC} = x$ aus seiner linken Totlage gezogen worden ist. Schlägt man nun aus C mit dem Halbmesser L den Bogen $\overline{cd}$, so ist $\overline{ad} = x$, d. h. ebenfalls der Kolbenweg.

Beweis:

$$\overline{Ad} = \overline{Aa} + \overline{ad} = L + \overline{ad} \quad \text{oder}$$
$$\overline{Ad} = \overline{dC} + \overline{AC} = L + x, \quad \text{folglich}$$
$$L + x = L + \overline{ad} \quad \text{oder}$$
$$\overline{ad} = x$$

Im Rückgange ist für denselben Kurbeldrehungswinkel der zugehörige Kolbenweg $\overline{b'd'}$.

Wäre die Schubstange unendlich lang, dann wäre der Kolbenweg im Hingange $\overline{af}$ und im Rückgange $\overline{bf'}$. Diese Wege sind einander gleich, denn

$$\triangle\, Oac \simeq \triangle\, Ob'c'$$

so daß auch $\triangle\, afc \simeq \triangle\, bc'f'$ ist, woraus sich

$$af = bf' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

ergibt. Demnach folgt der Satz:

„Die Kolbenwege sind bei unendlich langen Schubstangen für gleiche Kurbeldrehungswinkel im Hin- und Rückgange einander gleich.“

Bei endlich langen Schubstangen ist der Kolbenweg im Hingange indes um $\overline{fd}$ größer, im Rückgange um $\overline{f'd'}$ kleiner als derjenige bei unendlich langen Schubstangen. Wegen $\overline{cf} = \overline{c'f'}$ und $\overline{Cc} = \overline{C'c'}$ ist

$$\triangle Ccf \cong \triangle C'c'f', \text{ daher}$$
$$\overline{Cf} = \overline{C'f'}, \text{ da auch}$$
$$\overline{Cd} = \overline{C'd'} \text{ ist, folgt}$$
$$\overline{Cd} - \overline{Cf} = \overline{C'd'} - \overline{C'f'}, \text{ somit}$$
$$\boldsymbol{fd = f'd'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

D. h.: „Bei endlich langen Schubstangen sind die Kolbenwege für gleiche Kurbeldrehungswinkel im Hingange größer und im Rückgange um dasselbe Stück kleiner als die Kolbenwege bei unendlich langen Schubstangen."

Nun ist .... $\overline{af} = \overline{bf'} = R\,(1 - \cos\alpha)$

$$x = R\,(1 - \cos\alpha) \pm \overline{fd},$$

wobei das Pluszeichen für Hin-, das Minuszeichen für Rückgang zu nehmen ist.

$$\overline{fd} = \overline{Cd} - \overline{Cf} = L - \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2\alpha} = L - L\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha}$$

$$\overline{fd} = L - L\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha - \frac{1}{8}\cdot\frac{R^4}{L^4}\sin^4\alpha - \ldots\ldots\right).$$

In der Klammer können die Glieder vom dritten ab wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden.

Daher wird
$$fd = L - L + \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{L}\cdot\sin^2\alpha.$$

Die Formel für den Kolbenweg ergibt sich dann mit

$$\boldsymbol{x = R\cdot\left[1 - \cos\alpha \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{L}\cdot\sin^2\alpha\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Der Hub S des Kolbens wird bei einer Umdrehung der Kurbel 2 mal, bei n Umdrehungen derselben, d. i. in einer Minute, $2n$ mal gemacht. Somit ist der Kolbenweg in der Minute $2S\cdot n$, daher in einer Sekunde

$$\boldsymbol{c_m = \frac{2S\cdot n}{60} = \frac{S\cdot n}{30}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

c_m heißt die **mittlere Kolbengeschwindigkeit.** Die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ist

$$v = \frac{2R\pi n}{60} = \frac{S\pi n}{60}.$$

Es folgt demnach $\quad v : c_m = \frac{S\pi n}{60} : \frac{Sn}{30} \quad$ oder

$$\boldsymbol{v : c_m = \pi : 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Da die Kolbenbewegung aber eine ungleichförmige ist, ist die Kolbengeschwindigkeit jeden Augenblick eine andere, vom jeweiligen Kurbeldrehungswinkel abhängige.

Um sie abzuleiten, denke man sich die Kurbel um den unendlich kleinen Winkel $\triangle\alpha$ weitergedreht. Dann nimmt der Kolbenweg um $\overline{dg} = \triangle x$ zu. Für den Kurbeldrehungswinkel $(\alpha + \triangle\alpha)$ ist der letztere

$$x + \triangle x = R \cdot \left[1 - \cos(\alpha + \triangle\alpha) \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin^2(\alpha + \triangle\alpha)\right].$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung (22) ab, so wird

$$\triangle x = R[\cos\alpha - \cos(\alpha + \triangle\alpha)] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot \sin^2(\alpha + \triangle\alpha) \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \sin^2\alpha \text{ oder}$$

$$\triangle x = R[\cos\alpha - \cos(\alpha + \triangle\alpha)] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot [\sin^2(\alpha + \triangle\alpha) - \sin^2\alpha].$$

Das Verhältnis des kleinen Weges $\triangle x$ zur ebenso kleinen Zeit $\triangle t$, in welcher derselbe zurückgelegt worden ist, ist die Kolbengeschwindigkeit c. — Dieselbe wird also

$$c = \frac{R\,[\cos\alpha - \cos\,[\alpha + \triangle\alpha] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot [\sin^2(\alpha + \triangle\alpha) - \sin^2\alpha]}{\triangle t}$$

$$c = \frac{R \cdot \left[-2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\triangle\alpha}{2}\right)\right] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot [\sin(\alpha + \triangle\alpha) + \sin\alpha] \cdot [\sin(\alpha + \triangle\alpha) - \sin\triangle\alpha]}{\triangle t}$$

$$c = \frac{2R\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\sin\frac{\triangle\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot 2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\frac{\triangle\alpha}{2} \cdot 2\sin\frac{\triangle\alpha}{2} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)}{\triangle t}$$

Da der Winkel $\frac{\triangle\alpha}{2}$ sehr klein ist, kann statt dessen Sinus derselbe selbst gesetzt werden, so daß sich ergibt

$$c = \frac{2R\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\triangle\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot 2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) 2 \cdot \frac{\triangle\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\triangle\alpha}{2}}{\triangle t}$$

$$c = 2R\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t} \pm \frac{R^2}{L}\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right] \cdot \cos\frac{\triangle\alpha}{2} \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t}.$$

$\frac{\triangle\alpha}{\triangle t}$ ist das Verhältnis aus der Änderung des Kurbeldrehungswinkels und der Zeit, in welcher diese erfolgt, ist daher die **Winkelgeschwindigkeit der Kurbel** ω, somit bestimmt sich c mit

$$c = R\omega \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \pm \frac{R^2}{L} \cdot \omega \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \cos\frac{\triangle\alpha}{2}.$$

Da ω am Radius 1 gemessen ist, wird $R \cdot \omega$ der Bogen am Radius R, d. h. die Größe der **Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens.** Wegen der Kleinheit kann $\frac{\triangle\alpha}{2}$ gegen α vernachlässigt und $\cos\frac{\triangle\alpha}{2} \sim 1$ gesetzt werden, so daß endlich

$$c = v \cdot \sin\alpha \pm \frac{R^2}{L} \cdot \frac{v}{R} \sin\alpha\cos\alpha$$

wird. (Die Formeln für Winkelgeschwindigkeit ω und Bahngeschwindigkeit $v = R \cdot \omega$ sind in der Dynamik nochmals angeführt; s. § 53). — Die Formel für die Kolbengeschwindigkeit c lautet also

$$\boldsymbol{c = v\left(\sin\alpha \pm \frac{R}{2L}\sin 2\alpha\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Ebenso läßt sich die Kolbenbeschleunigung herleiten. Sie ist zu bilden als Verhältnis aus der Änderung der Kolbengeschwindigkeit und der Zeit, in welcher dieselbe stattfindet.

Die Kolbengeschwindigkeit zur Zeit $(t + \triangle t)$, das ist dann, wenn sich die Kurbel um den Winkel $(\alpha + \triangle\alpha)$ gedreht hat, ist

$$c + \triangle c = v\left[\sin(\alpha + \triangle\alpha) \pm \frac{R}{2L} \cdot \sin 2(\alpha + \triangle\alpha)\right].$$

Wird von dieser Gleichung die Gleichung (25) abgezogen, so ergibt sich

$$\triangle c = v\,[\sin(\alpha + \triangle\alpha) - \sin\alpha] \pm v \cdot \frac{R}{2L}[\sin 2(\alpha + \triangle\alpha) - \sin 2\alpha].$$

Demnach wird die Kolbenbeschleunigung

$$p = \frac{\triangle c}{\triangle t} = \frac{v \cdot 2\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \sin\frac{\triangle\alpha}{2} \pm v \cdot \frac{R}{2L} \cdot 2\cos(2\alpha + \triangle\alpha)\sin(\triangle\alpha)}{\triangle t}$$

$$p = v \cdot 2\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t} \pm v \cdot \frac{R}{L}\cos(2\alpha + \triangle\alpha) \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t}$$

$$p = v \cdot \cos\alpha \cdot \omega \pm v \cdot \frac{R}{L} \cdot \omega \cdot \cos 2\alpha.$$

Nun ist $\omega = \frac{v}{R}$, so daß sich endlich schreiben läßt

$$\boldsymbol{p = \frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Beispiele.

31. Wie groß sind bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ die zu den Kurbeldrehungswinkeln $\alpha = 45^0$, 90^0 und 135^0 zugehörigen Kolbenwege?

Auflösung: a) $x = R\,(1 - \cos 45^0 + 0{,}1 \sin^2 45)$
$= R\,(1 - 0{,}707 + 0{,}1 \cdot 0{,}707^2)$
$= R\,(1 - 0{,}707 + 0{,}05) = R\,(1{,}05 - 0{,}707)$
$\boldsymbol{x = 0{,}343\,R = 0{,}17 \cdot 2\,R}$

b) $x = R\,(1 - \cos 90^0 + 0{,}1 \cdot \sin^2 90^0) = R\,(1 - 0 + 0{,}1)$
$\boldsymbol{x = 1{,}1\,R = 0{,}55 \cdot 2\,R}$

c) $x = R\,(1 - \cos 135^0 + 0{,}1 \cdot \sin^2 135^0)$
$= R\,(1 + 0{,}707 + 0{,}05) = R\,(1{,}05 + 0{,}707)$
$\boldsymbol{x = 1{,}757\,R = 0{,}878 \cdot 2\,R}$

32. Wie groß sind bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{4}$ die zu den Kurbeldrehungswinkeln $\alpha = 45^0$, 90^0 und 135^0 zugehörigen Kolbenwege?

Auflösung: a) $x = R(1 - \cos 45 + 0{,}125 \cdot \sin^2 45)$

$$= R(1 - 0{,}707 + 0{,}125 \cdot 0{,}5)$$
$$= R(1{,}063 - 0{,}707)$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}356\,R = 0{,}18 \cdot 2\,R}$$

b) $x = R(1 - \cos 90^0 + \frac{1}{8} \cdot \sin^2 90)$

$$= R(1 + 0{,}125)$$
$$\boldsymbol{x = 1{,}125\,R = 0{,}563 \cdot 2\,R}$$

c) $x = R(1 + \cos 45 + 0{,}125 \cdot \sin^2 45)$

$$= R(1{,}707 + 0{,}125 \cdot 0{,}5)$$
$$\boldsymbol{x = 1{,}77\,R = 0{,}885 \cdot 2\,R}$$

33. Bei welchem Kurbeldrehungswinkel, bzw. nach welchem Kolbenweg, wird die Kolbenbeschleunigung Null, wenn $\frac{R}{L}$ a) gleich $^1/_5$, b) gleich $^1/_4$ ist?

Auflösung: a) $p = \frac{v^2}{r} \cdot \left(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha\right) = 0$

$$5\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$
$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 0$$
$$\cos^2\alpha + \frac{5}{4}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$
$$\cos\alpha = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{1}{2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{-5 \pm 5{,}7446}{4}$$
$$\cos\alpha = 0{,}186$$
$$\alpha = \mathbf{79^0\,20'}$$
$$x = R(1 - \cos 79^0 20' + 0{,}1\sin^2 79^0 20') = R(1 - 0{,}186 + 0{,}1 \cdot 0{,}983^2)$$
$$x = R(1 - 0{,}186 + 0{,}097) = R(1{,}097 - 0{,}186)$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}911\,R = 0{,}456 \cdot 2\,R}$$

b) $\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\alpha = 0$

$$4\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$
$$4\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0$$
$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$
$$\cos\alpha = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = -1 \pm \sqrt{1{,}5}$$
$$\cos\alpha = -1 \pm 1{,}225 = 0{,}225$$
$$\alpha = \mathbf{77^0}$$

$$x = R(1 - \cos 77 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin^2 77) = R(1 - 0{,}225 + \frac{1}{8}\cdot 0{,}974^2)$$
$$x = R(1 - 0{,}225 + \frac{1}{8}\cdot 0{,}95)$$
$$x = R(1 - 0{,}225 + 0{,}12)$$
$$x = R(1{,}12 - 0{,}225)$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}895\, R = 0{,}448\cdot 2\, R}$$

34. Nach welchem Kurbeldrehungswinkel, bzw. nach welchem Kolbenweg, ist die Kolbenbeschleunigung 6 mal so klein wie die in der Kolbentotlage? $\frac{r}{L} = \frac{1}{5}$

Auflösung: Bei $\alpha = 0$ ist $p = \frac{v^2}{R}(\cos 0 + \frac{1}{5}\cdot\cos 2\alpha)$

$$= \frac{v^2}{R}\cdot\left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}\cdot\frac{v^2}{R}$$
$$\frac{v^2}{R}(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha) = \frac{v^2}{5R} \text{ oder}$$
$$\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$$
$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 1$$
$$\cos^2\alpha + \frac{5}{2}\cos\alpha - 1 = 0$$
$$\cos\alpha = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + 1} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{41}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{6{,}4031}{4}$$
$$\cos\alpha = \frac{1{,}4031}{4} = 0{,}3508$$
$$\boldsymbol{\alpha = 69^0\, 30'}$$
$$x = R(1 - 0{,}3508 + 0{,}1\cdot 0{,}937^2) = R(1 - 0{,}3508 + 0{,}088)$$
$$= R(1{,}088 - 0{,}351)$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}737\, R \sim 0{,}368\cdot 2\, R}$$

35. Wann wird der numerische Wert der Kolbenverzögerung bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ sechsmal so klein wie derjenige der Kolbenbeschleunigung in der Kolbentotlage?

Auflösung: $\frac{v^2}{R}(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha) = -\frac{1}{5}\cdot\frac{v^2}{R}$

$$\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$$
$$5\cos\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$$
$$5\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha + 1 = 0$$
$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$$
$$\cos\alpha = 0$$
$$\boldsymbol{\alpha = 90^0}$$
$$5 + 2\cos\alpha = 0$$

Der andere Wert $\cos\alpha = -\frac{5}{2}$ ist unbrauchbar.