Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 7. Der schiefe Wurf. Beispiele 36-40

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

§ 7. Der schiefe Wurf.

Ein unter einem bestimmten Winkel mit einer gewissen Geschwindigkeit geworfener Körper beschreibt unter Nichtberücksichtigung des Luftwiderstandes eine Kurve, deren konvexe Seite der Wurfrichtung und deren hohle Seite der Horizontalen zugewendet ist. Im folgenden sollen die Gesetze dieser Bewegung untersucht werden. Fig. 10.

Würde der Körper anfangs von keiner Kraft beeinflußt sein, so wäre seine Bewegung eine geradlinige, gleichförmige. Nun ist dies eben nicht der

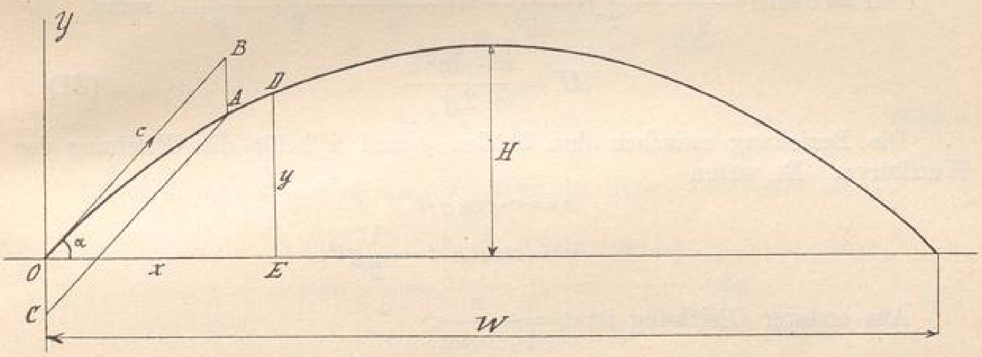

Fig. 10.

Fall. Nach der ersten Sekunde ist der Körper bereits durch die Schwerkraft von seiner Richtung um das Stück $\overline{BA}$ nach abwärts gezogen worden; er beschreibt den Weg $\overline{OA}$.

Behufs Vereinfachung der Betrachtung werde nun die Wurfbahn nicht mehr als Resultierende aus der gleichförmigen Bewegung in der Richtung $\overline{OB}$ und der freien Fallbewegung in der Richtung $\overline{OC}$ (gleich $\overline{BA}$), sondern als Resultierende aus der gleichförmigen Bewegung $\overline{OE}$ und der gleichförmig verzögerten $\overline{ED}$ angesehen.

Die Geschwindigkeit der Bewegung $\overline{OE}$ ist $c \cdot \cos \alpha$, die Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung $\overline{ED}$ ist $c \cdot \sin \alpha$.

Kommt nun der Körper in t Sekunden nach D, so sind seine Wege in horizontaler und vertikaler Richtung

$$x = c \cdot \cos \alpha \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

$$\text{und } y = c \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Die **Wurfzeit** ergibt sich aus der Erwägung, daß für sie $y = 0$ sein muß. Es muß also sein

$$c \sin \alpha \cdot t = \frac{1}{2} g t^2, \text{ woraus}$$

$$t = \frac{2 c \sin \alpha}{g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

wird. Wird dieser Wert in x eingesetzt, so ergibt sich die **Wurfweite**

$$W = c \cdot \cos\alpha \frac{2c\sin\alpha}{g} = \frac{c^2}{g} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{W = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(30)}$$

Da $\sin 2\alpha = \sin[180 - 2\alpha]$ ist, folgt, daß die Wurfweiten bei den Wurfwinkeln α und $(90 - \alpha)$ gleich groß werden.

Die **Wurfhöhe** H folgt aus y, wenn man in dessen Gleichung für t den halben Wert aus (29) einsetzt.

$$H = c\sin\alpha \cdot \frac{c\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{c^2\sin^2\alpha}{g^2} = \frac{c^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2\sin^2\alpha}{g}, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{H = \frac{c^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(31)}$$

Die Beziehung zwischen den Größen y und x heißt die Gleichung der Wurfkurve. Es waren

$$x = c \cdot \cos\alpha \cdot t$$
$$y = c\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Aus ersterer Gleichung ist $t = \dfrac{x}{c \cdot \cos\alpha}$.

Nach Substitution dieses Wertes in die Gleichung für y folgt dann

$$y = c \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{c\cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{c^2\cos^2\alpha} = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2c^2\cos^2\alpha} = x\operatorname{tg}\alpha\left[1 - \frac{x}{2\dfrac{c^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha}\right]$$

$$y = x\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{x}{W}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Nun } W &= \frac{c^2}{g} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\ H &= \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2\alpha \end{aligned}\right\} \frac{W}{H} = \frac{\dfrac{c^2}{2g}\sin^2\alpha}{\dfrac{c^2}{g} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$$

$$\text{Demnach } \operatorname{tg}\alpha = 4\frac{H}{W}$$

Es wird also $y = x\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \dfrac{x}{W}\right) = 4\dfrac{H}{W}x\left(1 - \dfrac{x}{W}\right)$

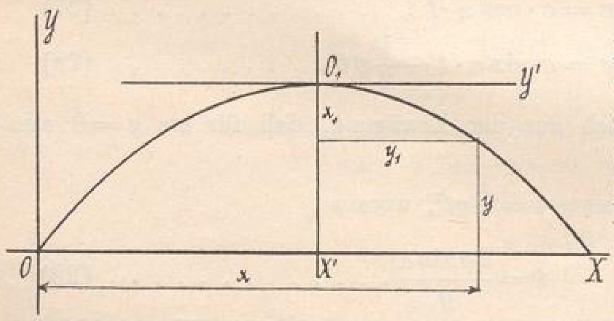

Fig. 11.

Diese Gleichung der Wurfkurve läßt deren Art nicht erkennen. Die Kurve werde deshalb auf die Achsen $\overline{O_1X'}$ (Symetrieachse) und $\overline{O_1Y'}$ (Scheiteltangente) bezogen, Dann ist zu setzen für

$$x = y_1 + \frac{W}{2}$$
$$y = H - x_1, \text{ Fig. 11.}$$

Es wird dann

$$y = (H - x_1) = 4\,\frac{H}{W}\left(\frac{W}{2} + y_1\right) \cdot \left[1 - \frac{\frac{W}{2} + y_1}{W}\right]$$

$$H - x_1 = \frac{4\,H}{W^2} \cdot \left(\frac{W}{2} + y_1\right) \cdot \left(\frac{W}{2} - y_1\right)$$

$$H - x_1 = \frac{4\,H}{W^2} \cdot \left(\frac{W^2}{4} - {y_1}^2\right)$$

$$H - x_1 = H - \frac{4\,H}{W^2} \cdot {y_1}^2 \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{{y_1}^2 = \frac{W^2}{4\,H} \cdot x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(32)}$$

Diese Gleichung gehört einer Parabel an; deren Parameter ist

$$p = \frac{W^2}{8\,H} = \frac{\left(\frac{c^2}{g}\right)^2 \cdot \left(2 \sin\alpha \cos\alpha\right)^2}{8\,\frac{c^2}{2\,g}\sin^2\alpha} \quad \text{oder}$$

$$p = \frac{c^2}{g} \cdot \cos^2\alpha.$$

Beispiele.

36. Mit welcher Geschwindigkeit und mit welcher Elevation muß ein Projektil gegen die Spitze eines Turms, welcher 600 m entfernt und 246,84 m hoch ist, abgeschlossen werden, damit es dieselbe in 8,5 Sekunden erreiche? Fig. 12.

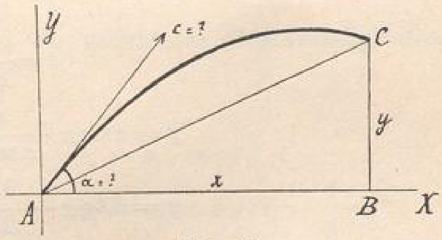

Fig. 12.

Auflösung:

$$x = c \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$y = c \cdot \sin\alpha \cdot t - {}^1\!/_2\, g t^2$$

$$600 = 8{,}5 \cdot c \cos\alpha$$

$$246{,}84 + 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 8{,}5^2 = 8{,}5 \cdot c \cdot \sin\alpha$$

Durch Division beider Gleichungen wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{246{,}84 + 05 \cdot 9{,}81 \cdot 8{,}5^2}{600}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{246{,}84 + 353{,}16}{600} = 1$$

$$\boldsymbol{\alpha = 45^0}$$

Aus $x = 8{,}5 \cdot c \cdot \cos 45$ wird $c = \frac{600}{8{,}5 \cdot 0{,}707}$, also

$$\boldsymbol{c \sim 100\ \mathrm{m}}$$

37. Unter welcher Elevation muß ein Körper geworfen werden, damit
a) die Wurfweite und Steighöhe gleich werden,
b) die Wurfweite viermal so groß werde wie die Steighöhe?

Auflösung:
$$W = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$
$$H = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\text{a)}\quad W = H \ldots \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha$$
$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$
$$\operatorname{tg} \alpha = 4$$
$$\alpha = \mathbf{76^0}$$

$$\text{b)}\quad W = 4H \ldots \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha = 4 \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$
$$2 \sin\alpha \cos\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$
$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$
$$\alpha = \mathbf{45^0}$$

38. Unter welchem Winkel gegen den Horizont muß ein Geschoß, welches eine Anfangsgeschwindigkeit c hat, abgeschossen werden, damit es die Spitze eines Turmes, welcher d Meter entfernt und h Meter hoch ist, treffe?

Auflösung:
$$x = c \cdot \cos\alpha \cdot t$$
$$y = c \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$t = \frac{x}{c \cos\alpha}$$
$$y = c \sin\alpha \cdot \frac{x}{c \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{c^2 \cdot \cos^2\alpha}$$
$$y = d \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{d^2}{c^2 \cdot \cos^2\alpha} = h$$
$$h = d \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g d^2}{2 c^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$
$$\frac{2hc^2}{gd^2} = \frac{2dc^2}{gd^2} \operatorname{tg}\alpha - 1 - \operatorname{tg}^2\alpha$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{2c^2}{gd} \operatorname{tg}\alpha + 1 + \frac{2hc^2}{gd^2} = 0$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c^2}{gd} \pm \sqrt{\frac{c^4}{g^2 d^2} - 1 - \frac{2hc^2}{gd^2}}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\boldsymbol{c^2 \pm \sqrt{c^2 (c^2 - 2gh) - g^2 d^2}}}{\boldsymbol{gd}}$$

39. Zwei Körper werden mit gleicher Geschwindigkeit schief geworfen. Wie groß sind ihre Wurfwinkel, wenn die Steighöhe des ersten Körpers 4 mal so groß ist als die des zweiten?

Auflösung: Die Wurfwinkel betragen zusammen 90^0, also

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$$

$$\text{hierzu } \frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha_1 = 4\frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha_2$$

$$\sin^2\alpha_1 = 4\sin^2(90 - \alpha_1)$$

$$\sin\alpha_1 = 2\cos\alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 2$$

$$\alpha_1 = \mathbf{63^0\,30'}$$

$$\alpha_2 = \mathbf{26^0\,30'}$$

40. Eine Kanone wird auf die Spitze eines Turmes gerichtet. Der Schuß trifft in t Sekunden den Turm in der Horizontalebene durch die Kanone. Ein zweiter Schuß mit andrer Ladung und doppelter Elevation trifft die Spitze des Turms in t_1 Sekunden. Wie weit ist der Turm entfernt? Fig. 13.

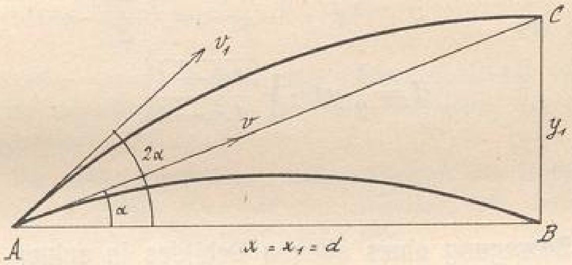

Fig. 13.

Auflösung: Es seien die unter α und 2α gerichteten Geschwindigkeiten v und v_1.

Dann gelten die Gleichungen:

$$x = v\cos\alpha\cdot t \qquad\qquad x_1 = v_1\cdot\cos 2\alpha\cdot t_1$$

$$y = v\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad\qquad y_1 = v_1\sin 2\alpha\cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^{\,2}$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} d &= v\cos\alpha\cdot t \\ \frac{1}{2}gt^2 &= v\cdot\sin\alpha\cdot t \end{aligned}\right\}\operatorname{tg}\alpha = \frac{gt^2}{2d}$$

Aus den beiden andern ebenso:

$$\left.\begin{aligned} d &= v_1\cos 2\alpha\cdot t_1 \\ y_1 + \frac{1}{2}gt_1^{\,2} &= v_1\sin 2\alpha\cdot t_1 \end{aligned}\right\}\operatorname{tg}2\alpha = \frac{y_1 + \frac{1}{2}gt_1^{\,2}}{d}$$

Da $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha}$ ist und ferner $y_1 = d\cdot\operatorname{tg}\alpha$ wird, folgt

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{d \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} g t_1^2}{d} = \frac{2\frac{gt^2}{2d}}{1 - \frac{g^2 t^4}{4d^2}}$$

$$\frac{d \cdot \frac{gt^2}{2d} + \frac{1}{2} g t_1^2}{d} = \frac{\frac{gt^2}{d}}{1 - \frac{g^2 t^4}{4d^2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(t^2 + t_1^2)}{d} = \frac{\frac{t^2}{d}}{\frac{4d^2 - g^2 t^4}{4d^2}}$$

$$\frac{1}{2}(t^2 + t_1^2) \cdot (4d^2 - g^2 t^4) = 4d^2 t^2 \quad \text{oder umgeformt}$$

$$4d^2\left[\frac{t^2 + t_1^2}{2} - t^2\right] = \frac{t^2 + t_1^2}{2} g^2 t^4$$

$$4d^2 \cdot \frac{t_1^2 - t^2}{2} = \frac{t_1^2 + t^2}{2} g^2 t^4$$

$$\boldsymbol{d = \frac{1}{2} g t^2 \cdot \sqrt{\frac{t_1^2 + t^2}{t_1^2 - t^2}}}$$

§ 8. Bewegung eines ebenen Gebildes in seiner Ebene.

Gelangt eine Gerade $\overline{BC}$ in die Lage $\overline{B'C'}$, so kann man sie in dieselbe durch eine Drehung um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ gebracht denken. Fig. 14. Sind außer der beweglichen Geraden noch bestimmte Bahnlinien der Punkte B und C gegeben, z. B. irgend welche Kurven $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ und wählt man auf der Bahnlinie des Punktes B einen sehr nahe bei B gelegenen Punkt B', so findet man den Punkt C' leicht durch Abtragen der Länge $\overline{BC}$, so daß $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ ist. Konstruiert man nun in B eine Normale zur Kurve BB', in C eine solche zur Kurve CC', so schneiden sich beide in O. — Bei einer Drehung um O werden nun die von B und C beschriebenen Kreise um so mehr mit den wahren Bahnlinien BB' und CC' zusammenfallen, je kleiner BB' gewählt ist. Denkt man sich BB' unendlich klein und $\overline{BC}$ und $\overline{B'C'}$ als zwei unendlich nahbenachbarte Lagen der beweglichen Geraden, so kann man die unendlich kleine Bewegung der Geraden $\overline{BC}$ als mit einer Drehung um O übereinstimmend ansehen. Dieser Punkt O heißt deshalb **der augenblickliche Drehpunkt** oder **Momentanzentrum**, auch

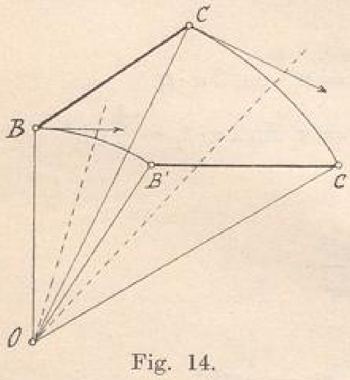

Fig. 14.