Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 8. Bewegung eines ebenen Gebildes in seiner Ebene. Beispiele 41-44

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{d \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} g t_1^2}{d} = \frac{2\frac{gt^2}{2d}}{1 - \frac{g^2 t^4}{4d^2}}$$

$$\frac{d \cdot \frac{gt^2}{2d} + \frac{1}{2} g t_1^2}{d} = \frac{\frac{gt^2}{d}}{1 - \frac{g^2 t^4}{4d^2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(t^2 + t_1^2)}{d} = \frac{\frac{t^2}{d}}{\frac{4d^2 - g^2 t^4}{4d^2}}$$

$$\frac{1}{2}(t^2 + t_1^2) \cdot (4d^2 - g^2 t^4) = 4d^2 t^2 \quad \text{oder umgeformt}$$

$$4d^2\left[\frac{t^2 + t_1^2}{2} - t^2\right] = \frac{t^2 + t_1^2}{2} g^2 t^4$$

$$4d^2 \cdot \frac{t_1^2 - t^2}{2} = \frac{t_1^2 + t^2}{2} g^2 t^4$$

$$\boldsymbol{d = \frac{1}{2} g t^2 \cdot \sqrt{\frac{t_1^2 + t^2}{t_1^2 - t^2}}}$$

§ 8. Bewegung eines ebenen Gebildes in seiner Ebene.

Gelangt eine Gerade $\overline{BC}$ in die Lage $\overline{B'C'}$, so kann man sie in dieselbe durch eine Drehung um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ gebracht denken. Fig. 14. Sind außer der beweglichen Geraden noch bestimmte Bahnlinien der Punkte B und C gegeben, z. B. irgend welche Kurven $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ und wählt man auf der Bahnlinie des Punktes B einen sehr nahe bei B gelegenen Punkt B', so findet man den Punkt C' leicht durch Abtragen der Länge $\overline{BC}$, so daß $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ ist. Konstruiert man nun in B eine Normale zur Kurve BB', in C eine solche zur Kurve CC', so schneiden sich beide in O. — Bei einer Drehung um O werden nun die von B und C beschriebenen Kreise um so mehr mit den wahren Bahnlinien BB' und CC' zusammenfallen, je kleiner BB' gewählt ist. Denkt man sich BB' unendlich klein und $\overline{BC}$ und $\overline{B'C'}$ als zwei unendlich nahbenachbarte Lagen der beweglichen Geraden, so kann man die unendlich kleine Bewegung der Geraden $\overline{BC}$ als mit einer Drehung um O übereinstimmend ansehen. Dieser Punkt O heißt deshalb **der augenblickliche Drehpunkt** oder **Momentanzentrum**, auch

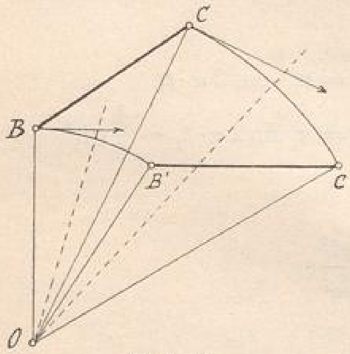

Fig. 14.

Pol für die bewegliche Gerade in der Lage BC. Derselbe ist also bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Geraden.

Die Aufsuchung des Poles für die Bewegung einer ebenen Figur gestattet, daß aus den Bewegungsrichtungen zweier Punkte und der Geschwindigkeit von einem derselben auch Bewegungsrichtungen und Geschwindigkeitsgrößen aller andern gefunden werden können. Sind z. B. die Bewegungsrichtungen von B und D, Fig. 15, bekannt, so liegt der Pol in O. — Zunächst findet man die Geschwindigkeitsrichtung von C normal zu $\overline{OC}$. — Die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte verhalten sich als momentane Umfangsgeschwindigkeiten in Kreisen wie ihre Achsabstände vom Pole. —

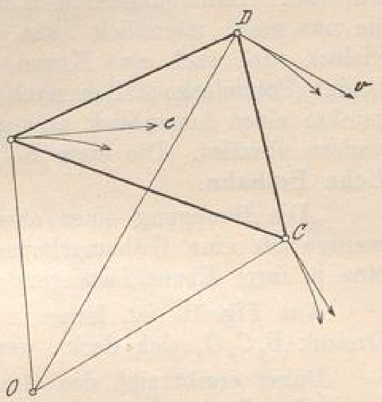

Fig. 15.

Es ist z. B.

$$v : c = \overline{OD} : \overline{OB}.$$

Sind die Richtungen von v und c und die Größe von c gegeben, dann folgt

$$v = c \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}.$$

Sind die Bahnen zweier Punkte des ebenen Gebildes einander parallel, so liegt der Pol in unendlicher Ferne und die Bewegung des ebenen Gebildes ist eine fortschreitende. —

Sucht man für einen 2., 3. . . . ., Lagenwechsel der Geraden $\overline{BC}$ die zugehörigen Pole auf, so erhält man als geometrischen Ort derselben ein Polygon, welches in eine Kurve übergeht, falls die benachbarten Lagen der Geraden $\overline{BC}$ unendlich nahe sind. Dieses Polygon heißt **Polvieleck** bzw. **Polbahn**, wenn es eine Kurve ist, Fig. 16.

Die Drehung um den Pol O erfolgt um den Winkel α_1. — Um sie bequemer übersehen zu können, denke man sich eine Gerade $\overline{PP_1} = \overline{OO_1}$ fest mit der Geraden $\overline{BC}$ so verbunden, daß sie mit der letzteren den Winkel α_1 bildet. Dann wird bei der Drehung der Geraden $\overline{BC}$ in die Lage $\overline{B_1C_1}$ die Gerade $\overline{PP_1}$ nach $\overline{OO_1}$ kommen und somit die Bewegung von $\overline{BC}$ gerade ersetzen können.

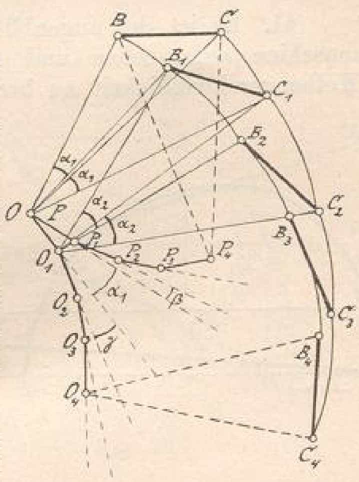
Fig. 16.

Damit nun nach der Zurücklegung eines weiteren Drehungswinkels α_2 der Punkt P_2 auf O_2 falle, muß

$$\beta + \gamma = \alpha_2, \text{ also}$$
$$\beta = \alpha_2 - \gamma$$

gemacht werden. Hiernach steht der Punkt P_2 fest.

Wenn nun die Punkte P der Reihe nach mit den Punkten O in der beschriebenen Weise zusammenfallen, so führt das Vieleck $PP_1P_2 \ldots .$ offenbar eine Rollbewegung auf dem Vieleck $OO_1O_2 \ldots$ aus. — Die Folge dieser Rollbewegung ist dann, daß die bewegliche Figur $\overline{BC}$ der Reihe nach die vorgeschriebenen Lagen $\overline{B_1C_1}$, $\overline{B_2C_2}$ .... einnimmt.

Rücken die einzelnen Lagen der Geraden $\overline{BC}$ unendlich nahe, so ergibt, wie schon angeführt wurde, der geometrische Ort aller Pole die sogenannte Polbahn. Dabei nähern sich in den beiden Polvielecken die Eckpunkte, bis sie nur mehr unendlich nahe von einander entfernt sind. Das zweite Polvieleck wird auch eine Kurve. — Die gleich langen, unendlich kleinen Seiten beider Polvielecke fallen nach unendlich kleinen Drehungen um ihre Eckpunkte einen Augenblick zusammen, so daß das eine Polvieleck sich auf dem andern abwälzt. Die erste Polbahn heißt **feste Polbahn**, die zweite **bewegliche Polbahn**.

„Die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene kann also aufgefaßt werden als eine Wälzungsbewegung einer mit ihr verbundenen Polbahn um eine in ihrer Ebene festliegende Polbahn."

Aus Fig. 16 ist ferner zu ersehen, daß das Dreieck BCP_4 mit dem Dreieck $B_4C_4O_4$ sich deckt, wenn der Pol P_4 mit dem Pol O_4 zusammenfällt.

Daher ergibt sich das Gesetz:

„Das Dreieck, dessen Grundlinie die Endlage der bewegten Geraden und dessen Spitze der Endpunkt der festen Polbahn ist, ist kongruent jenem Dreiecke, welches als Grundlinie die Anfangslage der bewegten Geraden und als Spitze den Endpunkt der beweglichen Polbahn hat."

Mit Hilfe dieses Gesetzes können aus den Lagen einer bewegten Geraden die Polbahnen konstruiert werden.

Beispiele.

41. Es ist der augenblickliche Drehpunkt der Schubstange einer Dampfmaschine aufzusuchen und hierauf mit Hilfe derselben die augenblickliche Kolbengeschwindigkeit zu bestimmen. Fig. 17.

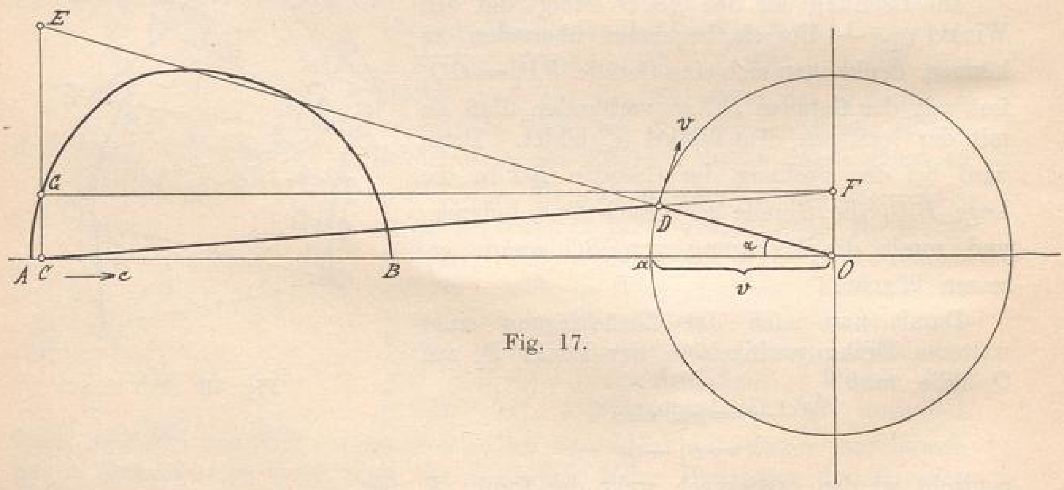

Fig. 17.

Auflösung: Beim Kurbeldrehungswinkel α ist die Lage der Schubstange $\overline{CD}$. — Der Schnittpunkt der Normalen auf die Geschwindigkeitsrichtungen in C und D ergibt den momentanen Drehpunkt der Schubstange E. — Daher verhält sich

$$c : v = \overline{CE} : \overline{ED}$$

oder wegen

$$\triangle CED \sim \triangle ODF$$

$$c : v = \overline{OF} : \overline{OD}$$

Wird der Kurbelkreishalbmesser $\overline{aO} = v$ gemacht, dann wird

$$c : v = \overline{OF} : v$$

d. h. $\overline{OF}$ ist sofort die Größe der Kolbengeschwindigkeit. Werden alle Kolbengeschwindigkeiten als Ordinaten in den Endpunkten der zugehörigen Kolbenwage aufgetragen, dann erhält man die **Kolbengeschwindigkeitskurve** AGB.

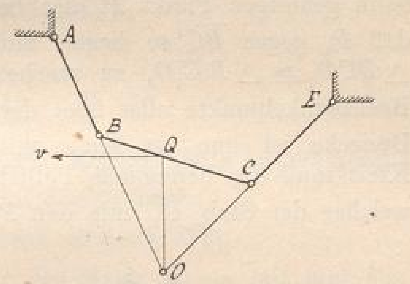

Fig. 18.

42. Es ist jener Punkt der Stange $\overline{BC}$ anzugeben, welcher bei einer unendlich kleinen Verrückung derselben sich horizontal bewegt. Fig. 18.

Auflösung. Der Pol für die skizzierten Lagen der Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{EC}$ ist O. Es wird sich nun jener Punkt Q von $\overline{BC}$ bei einer unendlich kleinen Verrückung dieser Stange horizontal bewegen, dessen Polstrahl vertikal ist. Punkt Q ist demnach bestimmt.

43. Eine Gerade $\overline{BC}$ bewegt sich mit ihren Endpunkten in den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, Fig. 19. Welche Kurve beschreibt irgend ein Punkt D der Geraden und was für Kurven sind die feste und die bewegliche Polbahn?

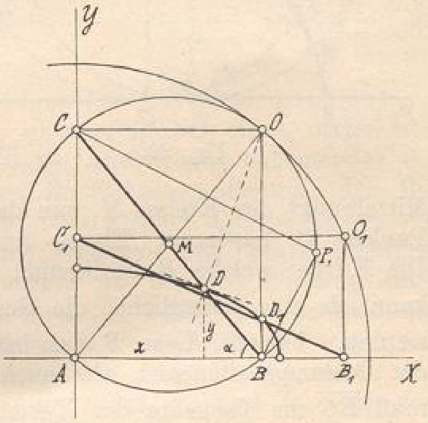

Fig. 19.

Auflösung. ad a) Der Punkt D der Geraden habe von C den Abstand a und von B den Abstand b — seine Koordinaten seien x und y. Ist in der gezeichneten Lage der Geraden deren Winkel mit der X-Achse α, dann gilt

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\alpha \\ y &= b\sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{oder}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos\alpha \\ \frac{y}{b} &= \sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{somit}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

d. h. der Punkt beschreibt eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der X- und Y-Achse ist. Die Halbachsen der Ellipse sind a und b.

ad b) Für die Lage $\overline{BC}$ der Geraden liegt der Pol in O. Da er der 4. Eckpunkt eines Parallelogramms wird, ist sein Abstand vom Achsenschnittpunkt (vom Ursprung des Koordinatensystems) gleich $(a + b)$ — für jede andere Lage der Geraden ist letzterer ebenfalls $(a + b)$, so daß die feste

Polbahn sich als ein Kreis ergibt, dessen Mittelpunkt mit dem Achsenschnittpunkt zusammenfällt und dessen Radius $(a + b)$ ist. Die Verbindungslinie von D mit dem Pole O, der Polstrahl $\overline{DO}$, muß nun senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung von D stehen, woraus folgt, daß die Tangente an die Ellipse in D senkrecht zum Polstrahl $\overline{OD}$ ist. Die Ellipse kann demnach als eine die Senkrechte zu den Polstrahlen tangierende Kurve konstruiert werden.

ad c) Für die Lage $\overline{BC}$ der bewegten Geraden liegt der feste Pol in O, für die Lage $\overline{B_1C_1}$ in O_1. Um nun den zu dem Punkte O_1 der festen Polbahn gehörigen Punkt P_1 der beweglichen zu finden, ist nur zu bedenken, daß P_1 gegen $\overline{BC}$ so liegen muß wie O_1 gegen $\overline{B_1C_1}$. Man hat also nur $\triangle BCP_1 \cong \triangle B_1C_1O_1$ zu machen, so daß P_1 bestimmt ist. Der Ort der Rechtwinkelpunkte aller über der Hypotenuse $\overline{BC}$ gezeichneten rechtwinkligen Dreiecke ist nun ein Kreis mit dem Durchmesser $\overline{BC} = (a + b)$. Dieser Kreis muß die bewegliche Polbahn sein. Die gegebene Bewegung also, bei welcher der Stab $\overline{BC}$ mit den Punkten B und C den Achsen $\overline{AX}$ und $\overline{AY}$ folgt, kann auch bewirkt werden durch eine Kolbenbewegung des kleineren Kreises mit dem Durchmesser $\overline{BC}$ auf dem inneren Umfange des größeren Kreises mit dem Halbmesser $\overline{BC}$.

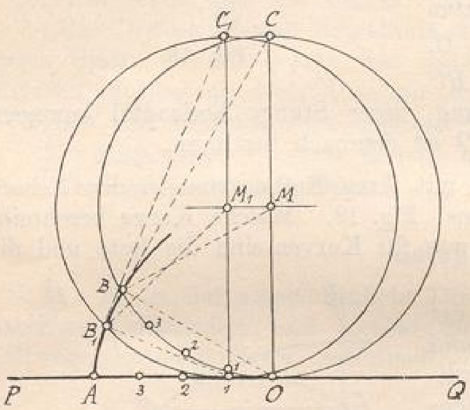

Fig. 20.

44. Welche Bewegung macht der Punkt B des Kreises OBC, Fig. 20, wenn letzterer sich auf der Geraden $\overline{PQ}$, die er in O berührt, abwälzt?

Auflösung. Der Bogen OB werde in eine bestimmte Zahl gleicher Teile, z. B. in 4 gleiche Teile geteilt. Kommt 1 des Kreises mit der Geraden in Berührung, dann ist der sich bewegende Punkt von 1 um $\overline{1B}$ und vom Mittelpunkt des Kreises M_1 um dessen Radius entfernt. So ist die Lage des Punktes B_1 bestimmt. Ebenso findet man leicht alle anderen Lagen von B. Die Kurve, welche B beschreibt, heißt gemeine Zykloide. Der Kreis OBC kann als eine bewegliche, die Gerade $\overline{PQ}$ als eine feste Polbahn aufgefaßt werden. Für die Lage B des bewegten Punktes ist O der Pol, daher $\overline{OB}$ der Drehungshalbmesser, also auch die Normale der Zykloide in B. Folglich muß $\overline{BC}$ die Tangente der Zykloide in B sein. Die analytische Geometrie beweist mit Hilfe der Rechnung, was hier durch die einfache Betrachtung sich so leicht ergeben hat.