# Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

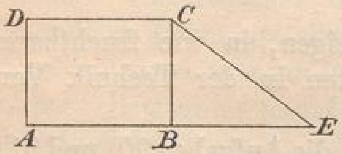
A. Das Schwungrad als Ansammler der Energie.

gaben über das Zerreifsen der Schwungräder durch Centrifugalkräfte sollen auch zur Sprache kommen, obwohl der Gegenstand schon in Abschnitt 49 behandelt worden ist.

## A. Das Schwungrad als Ansammler der Energie.

410) **Aufgabe.** Eine Dampfmaschine leiste bei einer sekundlichen Umdrehung 300 Pferdestärken. Wie schwer müfste der Schwungring von 3 m mittlerem Radius sein, um nach Abstellung der Triebkraft denselben Widerstand 10, 20, 30 Sekunden lang zu überwinden?

Fig. 284.




**Auflösung.** Die sekundliche Leistung der Maschine beträgt $300 \cdot 75\,\text{mkg} = 22{,}5$ Metertonnen. Das Auslaufdiagramm für 10 Sekunden ist unter der Annahme konstanten Widerstandes ein Dreieck $BCE$, welches halb so grofs ist, als das entsprechende Rechteck $ABCD$ für eine konstante Maschinenleistung von gleicher Dauer. Der Widerstand kann durch Lote von gleicher Länge, die auf die Diagrammfläche aufzusetzen sind, dargestellt werden. Vom Schwungrad, dessen Arbeitswucht $\frac{T\vartheta^2}{2}$ ist, wird also eine Arbeit von $\frac{10}{2} \cdot 22{,}5$ Metertonnen beansprucht. Es ist demnach zu setzen

$$\frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{10}{2} \cdot 22{,}5$$

oder

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{r^2(2\pi)^2}{2} = \frac{10}{2} \cdot 22{,}5,$$

also

$$p = \frac{10 \cdot 22{,}5}{4} \cdot \frac{g}{9\pi^2} = \frac{225 \cdot 9{,}81}{36\,\pi^2} = 6{,}2 \text{ Tonnen} = 62 \text{ Doppelzentner.}$$

Für 20 Sekunden sind 12,4, für 30 Sekunden 18,6 Tonnen erforderlich.

**Bemerkungen.** Für blofse Überschlagungsrechnungen kann man $\frac{9{,}81}{\pi^2} = 1$ setzen, was bei diesem Beispiele 6,25 Tonnen geben würde.

Die allgemeine Formel für diese Art von Aufgaben ergiebt sich bei $n$ sekundlichen Umdrehungen und einer sekundlichen Leistung $L$ der Maschine für eine gegebene Auslaufszeit $t$ aus

$$\frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{t}{2} L \quad \text{oder} \quad \frac{p}{g}\frac{r^2(2n\pi)^2}{2} = \frac{t}{2} L$$

als

1) $$p = \frac{gtL}{4r^2n^2\pi^2} = \frac{gtL}{4(rn\pi)^2}.$$

Ist eine der andern Gröfsen als Unbekannte betrachtet, so folgt daraus:

2) $$t = \frac{4p\,(rn\pi^2)}{gL},$$

3) $$L = \frac{4p\,(rn\pi)^2}{gt},$$

4) $$r = \sqrt{\frac{gtL}{4n^2\pi^2 p}} = \frac{1}{2n\pi}\sqrt{\frac{gtL}{p}},$$

5) $$n = \frac{1}{2r\pi}\sqrt{\frac{gtL}{p}}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich entsprechende Aufgaben lösen und an sie allgemeinere Betrachtungen anknüpfen.

411) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste bei einer sekundlichen Umdrehung 400 Pferdestärken, ihr Schwungring wiege 20 Tonnen bei 3 m mittlerem Radius. Wie lange kann das Rad nach Abstellung der Triebkraft den gesamten Widerstand noch überwinden?

**Auflösung.** Die Sekundenleistung der Maschine ist $L = \frac{400 \cdot 75}{1000} = 30$ Metertonnen. Gleichung 2) giebt

$$t = \frac{4 \cdot 20 \cdot 3^2\pi^2}{9{,}81 \cdot 30} = 24{,}14 \text{ Sekunden.}$$

412) **Aufgabe.** Die Leistung einer Maschine bei einer sekundlichen Umdrehung soll bestimmt werden, nachdem sich ergeben hat, dafs das Schwungrad von 20 Tonnen Gewicht und 3 m Radius nach Abstellung der Triebkraft den gesamten Widerstand noch 20 Sekunden lang überwinden kann.

**Auflösung.** Nach 3) ist

$$L = \frac{4 \cdot 20 \cdot 3^2 \cdot 1^2 \cdot \pi^2}{9{,}81 \cdot 20} = 36{,}22 \text{ mt/s (Metertonnen pro Sekunde),}$$

oder 483 Pferdestärken.

**Bemerkung.** Da das Absperren des Dampfes Zeit beansprucht, müfste man die Geschwindigkeit zunächst höher treiben, sodann den Dampf absperren und die Zeit des Auslaufs von dem Augenblicke ab zählen, wo das Rad eine Tour in der Sekunde macht.

Die gefundene Leistungsfähigkeit ist gewissermafsen die Bruttoleistung der Maschine, denn sämtliche Widerstände sind darin enthalten, z. B. Kolbenreibung, Stopfbüchsenreibung, Reibung der Geradführungen, sämtliche Zapfenreibungen, die Luftwiderstände und dgl. Um die Nettoleistung zu finden, müfste man nicht nur die Triebkraft abstellen, sondern auch den eigentlichen Widerstand (die Last) auslösen und die Dauer des Auslaufs des Rades und der Maschine beobachten.

Angenommen, es handle sich um 600 Sekunden, dann ist die folgende Aufgabe maſsgebend.

413) **Aufgabe.** Mit wieviel Pferdestärken müſste ein konstanter Widerstand einsetzen, um das obige Rad in der Auslaufszeit von 600 Sekunden zur Ruhe zu bringen?

**Auflösung.** Gleichung 3) giebt

$$L_1 = \frac{4 \cdot 20 \cdot 3^2 \cdot 1^2 \cdot \pi^2}{9{,}81 \cdot 600} = 1{,}208 \text{ Metertonnen auf die Sekunde}$$

oder 16,1 Pferdestärken.

Die Nettoleistung der Maschine würde also sein 483 — 16,1 $= \sim 477$ Pferdestärken.

In dem Effektverlust von 16,1 Pferdestärken ist jeder Widerstand enthalten, auch der Einfluſs der etwa hin- und herschwingenden Teile. Die Annahme, daſs der Widerstand konstant sei, ist z. B. im Hinblick auf den Luftwiderstand nicht ganz richtig, das Resultat ist aber für praktische Zwecke hinweisend genau und kann zur Ergänzung der Ergebnisse von Indikator- und Bremsversuchen dienen. In solcher Weise ist man auch imstande, den Arbeitsaufwand, den Lochmaschinen, Pressen u. dgl. für ihre Funktionen erfordern, versuchsweise festzustellen. Da theoretische Vorhersagungen hier kaum möglich sind, müssen Experimente die nötige Unterlage geben.

414) **Aufgabe.** Mit wieviel Pferdestärken müſste ein konstanter Widerstand einsetzen, um obiges Rad in einer Sekunde oder in $\frac{1}{10}$ Sekunde, oder in $\frac{1}{100}$ Sekunde zur Ruhe zu zwingen.

**Auflösung.** Für eine Sekunde bedarf es einer Anfangsarbeit von $L = \frac{4p3^2 1^2 \pi^2}{g \cdot 1} = 724{,}4$ mt/s oder 9640 Pferdestärken, bei $\frac{1}{10}$ Sekunde das 10-fache, bei $\frac{1}{100}$ Sekunde das 100-fache.

**Bemerkung.** Nach den in Nr. 97, 98 und 101 behandelten Formeln kann aber die Schwungradwelle aus Gründen der Festigkeit nur eine begrenzte Anzahl von Pferdestärken übertragen, z. B. die Anzahl

$$N = \frac{\pi n S d^3}{16 \cdot 716\,200} \text{ bezw. } N = \frac{G n \pi^2 d^4}{4 \cdot 360 \cdot 1000 \cdot 16 \cdot 716\,200},$$

daraus geht also hervor, daſs die Triebwelle durch Torsion zerbrechen muſs, wenn das Stillstehen in allzukurzer Zeit geschehen soll. Selbstverständlich können vorher die zu schwach gebauten Radarme nachgeben, oder der Keil, mittels dessen die Nabe auf die Triebwelle gekeilt ist, wird vorher durch Abscherung beseitigt. Letzteres würde noch das am wenigsten schädlich wirkende sein, und deshalb pflegt man den Keil nicht allzuwiderstandsfähig zu machen.

Bezeichnet man den Widerstand, der das Rad schnell zur Ruhe bringen soll, kurzweg als Stofs, so folgt aus Gleichung 3) dafs die Bruchgefahr umgekehrt proportional der Stofsdauer ist. Setzt man in abstrakter Weise $t = 0$, so würde $L = \infty$, das Rad oder die Welle also unter jeder Bedingung zertrümmert werden.

415) **Aufgabe.** Ein Schwungring vom spez. Gewichte $p'$ mit den Radien $r$ und $r_1$, der durch Rotation einer Rechtecksfläche mit den Seiten $h = r - r_1$ und $d$ entstanden gedacht wird, hat bei $n$ Umdrehungen in der Sekunde welche Arbeitswucht in sich?

**Auflösung.** Das polare Trägheitsmoment der Ringfläche ist

$$\frac{r^4 - r_1^4}{2}\pi = \frac{r^2 + r_1^2}{2}\left(r^2 - r_1^2\right)\pi = F\frac{r^2 + r_1^2}{2}.$$

Hier also wird

$$T = m\frac{r^2 + r_1^2}{2} = \frac{p}{g}\frac{r^2 + r_1^2}{2} = \frac{(r^2 - r_1^2)\pi p'}{g}d\frac{r^2 + r_1^2}{2} = \frac{(r^4 - r_1^2)\pi p' d}{2g},$$

also

$$A = T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{\left(r^4 - r_1^4\right)\pi p'}{2g}d\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{\left(r^4 - r_1^4\right)\pi p' d\, 4 n^2 \pi^2}{4g} = \frac{\left(r^4 - r_1^4\right)\pi^3 p' d n^2}{g}$$

Metertonnen.

Ist z. B. $r = 2\,\mathrm{m}$, $r_1 = 1{,}6\,\mathrm{m}$, $d = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $p' = 7{,}5\,\mathrm{m}$, so würde sein

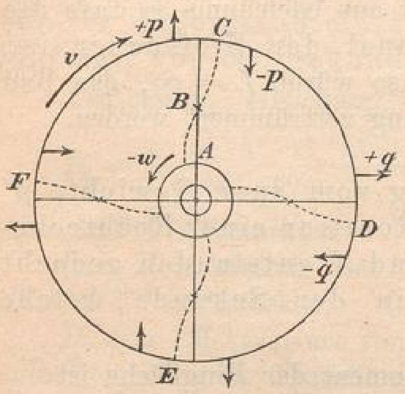
$$A = \frac{(2^4 - 1{,}6^4)\,\pi^3 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}2}{9{,}81}n^2 = 44{,}786\,n^2 \text{ Metertonnen}$$

oder $A = 44\,786\,n^2$ mkg. Also bei 1, 2, 3 Umdrehungen bezw. 44 786 mkg, 179 144 mkg, 403 074 mkg.

Die plötzliche Herabsetzung der Geschwindigkeit von 3 auf 2 sekundliche Umgänge würde schon 403 074 — 179 144 = 223 930 mkg. Zerstörungsarbeit in die Maschinerie werfen. Stofsweise Verlangsamungen also, wie sie beim Walzen, Bohren, Pressen häufig eintreten, müssen bei der Konstruktion berücksichtigt werden. Ebenso würden Stöfse eintreten, wenn man, Schleifsteine, Mühlsteine oder vollständige Transmissionsbetriebe durch plötzlich wirkende Einrückkuppelungen in sofortige Bewegung versetzen wollte. Der Vorgang beim Zerbrechen der Radarme oder des Kranzes ist in Figur 285 dargestellt. Dreht sich das Rad in der Richtung $v$ und ist $-w$ die plötzlich hemmend wirkende Gegenkraft, so wird jeder Radarm $ABC$

gebogen, wie ein beiderseits eingespannter Träger, bei dem $A$ und $C$ die am meisten gefährdeten Stellen sind, während die Biegungsspannung im Wendepunkte $B$ gleich Null ist. Die Biegung des Radarmes bei $C$ wirkt auf den Kranz in Form eines Kräftepaares, welches durch die Kräfte $+p$ und $-p$ angedeutet ist. Entsprechende Komponenten der Kräfte $-p$ und $+q$ können als ein Kräftepaar betrachtet werden, welches den Quadranten (oder Sektor) $CD$ linksdrehend zerbrechen will. Dabei sind $C$ und $D$ und zwei zwischen $C$ und $D$ liegende Punkte als besonders gefährdete Stellen aufzufassen.

Fig. 285.




Die Abnahme der Arbeitswucht des auslaufenden Schwungrades geschieht unter Voraussetzung konstanten Widerstandes nach Mafsgabe des Fallgesetzes und der Zerlegung des Diagramms in Teiltrapeze. Dauert der Auslauf z. B. 10 Sekunden, so wird nach dem Gesetze der ungeraden Zahlen von Sekunde zu Sekunde $\frac{19}{100}, \frac{17}{100}, \frac{15}{100}, \frac{13}{100}, \ldots \frac{5}{100}, \frac{3}{100}, \frac{1}{100}$ der Energie aufgebraucht.

416) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste bei einer sekundlichen Umdrehung 400 Pferdestärken. Der Schwungring soll 20 Tonnen wiegen und imstande sein, den gesamten Widerstand nach Abstellung der Triebkraft 40 Sekunden lang zu überwinden. Wie grofs ist der mittlere Radius zu nehmen?

**Auflösung.** Aus Gleichung 4) folgt

$$r = \frac{1}{1.\pi}\sqrt{\frac{9,81 \cdot 40 \cdot 30}{4 \cdot 20}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{147,15} = 3,861 \text{ m}.$$

Den Aufgaben über den Auslauf der Maschine entpsrechen solche über den Anlauf.

417) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste bei 3 Touren in der Sekunde 400 Pferdestärken. Wieviel Zeit hat sie nötig, beim Blindgange das Schwungrad — abgesehen von den Reibungswiderständen — in diese Geschwindigkeit zu versetzen, wenn dieses bei 3m Radius 20 Tonnen wiegt?

**Auflösung.** Auch hier ist, wie aus der Gleichung

$$\frac{tL}{2} = \frac{T\vartheta^2}{2}$$

hervorgeht, die Gleichung 2) maſsgebend. Man erhält

$$t = \frac{4 \cdot 20\,(3 \cdot 3\pi)^2}{g \cdot 30} = 217{,}2 \text{ Sekunden.}$$

Dies ist 9-fache des Resultates der Aufgabe 411, was sich naturgemäſs daraus erklärt, daſs $t$ dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.

## B. Schwungrad und Centrifugalkraft.

418) Schwungräder werden in der Regel durch Betriebsstockungen in der oben erwähnten Weise zerstört. Bei sehr groſsen Geschwindigkeiten, z. B. beim Durchgehen der unbelasteten Maschine, deren Absperrventil nicht in Ordnung ist, kann die Zerstörung auch durch die Centrifugalkraft erfolgen. Sieht man von den Radarmen vorläufig ab, so handelt es sich um das Abreiſsen der einen Kranzhälfte von der andern. Maſsgebend ist also die im Schwerpunkte $S_1$ vereinigt gedachte Masse jeder Hälfte. (Vgl. Figur 53.)

Ist $d$ die Dicke des Rades mit rechteckigem Hauptschnitt, sind $r$ und $r_1$ die Radien, und ist $p'$ das spezifische Gewicht, so handelt es sich um die Masse $\frac{p}{g} = \frac{\pi}{2}\left(r^2 - r_1^2\right) d \frac{p}{g}$ und um Centrifugalkräfte $m\varrho\,(2\,n\pi)^2$, wo $\varrho$ der Schwerpunktsabstand $\frac{4\left(r^3 - r_1^3\right)}{3\pi\left(r^2 - r_1^2\right)}$, $n$ die Tourenzahl für die Sekunde bedeutet, also um

$$K = \frac{\pi\left(r^2 - r_1^2\right) d p'}{2\,g} \; \frac{4\left(r^3 - r_1^3\right)}{3\pi\left(r^2 - r_1^2\right)}\,(2\,n\pi)^2 = \frac{2\,d p'\left(r^3 - r_1^3\right)(2\,n\pi)^2}{3\,g}.$$

419) **Aufgabe.** Wie groſs ist die Centrifugalkraft, die einen einfach gestalteten Schwungring von den nachstehenden Dimensionen bei einer, zwei, drei Touren in der Sekunde zerreiſsen will? $r = 3{,}3$ m, $r_1 = 3$ m, $d = 0{,}3$ m, $p' = 7{,}5$.

**Auflösung.**

$$K_1 = \frac{2 \cdot 0{,}3 \cdot 75\,(3{,}3^3 - 3^3)\,4\pi^2}{3 \cdot 9{,}81} = \frac{6\pi^2\,(3{,}3^3 - 3^3)}{9{,}81} = \frac{53{,}62\,\pi^2}{9{,}81} = 53{,}94 \text{ Tonnen.}$$

Bei 2 Touren handelt es sich um das 4-fache, bei 3 Touren um das 9-fache u. s. w.

**Bemerkung.** Die gesamte Riſsfläche ist das doppelte Rechteck aus $d$ und $(r - r_1)$, also gleich $2\,d(r - r_1) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$ qm $= 180\,000$ qmm. Von der Spannung 53 940 kg kommen also auf jedes Quadratmillimeter $0{,}2997 = \sim 0{,}3$ kg. Der Tragmodul des Guſseisens ist 7,5 kg. Wann wird er erreicht? Bei $n$ Touren