Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 9. Zusammensetzung zweier Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkt. Das Gesetz vom Kräfteparallelogramm. Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte. Beispiele 45- 52

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Zweiter Abschnitt.

Die Statik.

§ 9. Zusammensetzung zweier Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkt. Das Gesetz vom Kräfteparallelogramm. Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte.

Wirkt eine Kraft auf einen Punkt mit der Masse m, so gilt laut Einleitung $P = m \cdot p$. Da die Beschleunigung durch eine Strecke darstellbar ist, wird auch die ihr proportionale Kraft durch eine Strecke dargestellt werden können, deren Richtung und Länge Richtung und Größe (Intensität) der Kraft angeben.

Ist ein materieller Punkt dem Einflusse der in der Richtung $\overline{OA}$, Fig. 21, wirkenden Kraft unterworfen, so erhält er in derselben die Beschleunigung $p = \frac{P}{m}$, deren Größe also durch den m-ten Teil der Zahl von Einheiten von P dargestellt ist.

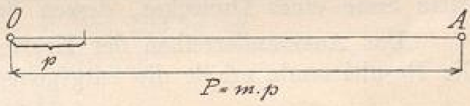

Fig. 21.

Wirken nun zwei Kräfte P_1 und P_2 gleichzeitig auf einen materiellen Punkt von der Masse m ein, so erzeugen sie unabhängig voneinander die Beschleunigungen p_1 und p_2, die in ihren Richtungen auftreten. Die Beschleunigung p, mit welcher sich der Punkt aber wirklich fortbewegt, ist die Resultierende aus p_1 und p_2, d. h. p ist die Diagonale des Parallelogrammes aus demselben, Fig. 22. Diese Beschleunigung ist nun die Wirkung einer **resultierenden Kraft** oder **Mittelkraft** $P = m \cdot p$, welche in der Richtung von p liegt und somit auch die Diagonale eines Parallelogramms wird, das aus den Kräften P_1 und P_2, den **Seitenkräften** oder **Komponenten** zusammengesetzt ist. Das muß sein, weil die durch P_1 und P_2 erzeugten Bewegungen gleichartige, nämlich gleichförmig beschleunigte, sind, weshalb die resultierende Bewegung eine gradlinige ist.

„Dieses Gesetz wird das **Gesetz vom Kräfteparallelogramm** genannt."

Fallen die Richtungslinien beider Kräfte zusammen, so ist die Resultierende gleich deren Summe, wenn die ersteren gleich gerichtet und gleich deren Differenz, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind. In letzterem Falle wird die Resultierende Null, wenn die Kräfte gleich groß sind. Man nennt solche Kräfte **entgegengesetzt gleiche Kräfte.**

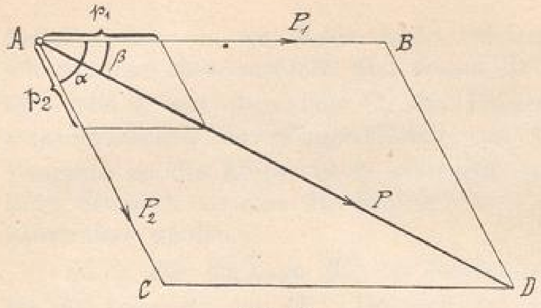

Fig. 22.

Wie nun zwei Kräfte zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden können, so kann auch eine Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, wenn α) deren Richtungen bekannt, β) wenn Richtung und Größe der einen Seitenkraft gegeben sind.

Die Größe der Mittelkraft aus zwei Seitenkräften, die miteinander den Winkel α bilden, bestimmt sich rechnerisch laut Carnotschem Satz aus dem $\triangle ABD$, Fig. 22, mit

$$\boldsymbol{P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 \cdot P_2 \cdot \cos\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(33)}$$

Heißt der Winkel der Resultierenden P mit der einen Seitenkraft $P_1 \ldots \beta$, so gilt $\sin \triangle ABD$ laut Sinussatz

$$P_2 : P = \sin\beta : \sin(180 - \alpha),$$

daher

$$\boldsymbol{\sin\beta = \frac{P_2}{P} \sin\alpha} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(34)}$$

so daß auch die Richtung von P rechnerisch festgelegt ist.

Statt des Kräfteparallelogrammes braucht man nur behufs Auffindung der Resultierenden das sogenannte **Kräftedreieck** ABD zu konstruieren, so daß man auch sagen kann:

„Die Resultierende zweier Kräfte mit demselben Angriffspunkt ist die dritte Seite eines Dreieckes, dessen beide anderen die Komponenten sind.“

„Das Aneinanderreihen der Kräfte muß in demselben Pfeilsinn erfolgen. Die Resultierende erhält die entgegengesetzte Pfeilrichtung.“

Beispiele.

45. Zwei horizontale, zueinander senkrechte Kräfte $P_1 = 12$ kg und $P_2 = 16$ kg wirken auf einen Punkt. Wie groß und wie gerichtet ist ihre Resultierende?

Auflösung:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400}$$

$$\boldsymbol{R = 20 \text{ kg}}$$

Schließt die Resultierende mit P_1 den Winkel β ein, so gilt

$$P_1 = R \cos\beta,$$

woraus

$$\cos\beta = \frac{P_1}{R} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ ist}$$

$$\boldsymbol{\beta = 53^0\, 10'}$$

46. Auf einem Punkt A wirken zwei Kräfte $P_1 = 400$ kg und $P_2 = 600$ kg unter einem Winkel $\alpha = 40^0\, 35'$. Wie groß ist die diesen beiden Kräften das Gleichgewicht haltende Kraft und welche Richtung hat sie?

Auflösung:

$$R = \sqrt{400^2 + 600^2 + 2 \cdot 400 \cdot 600 \cdot \cos 40^0\,35'}$$

$$R = \sqrt{160000 + 360000 + 480000 \cdot 0{,}759}$$

$$R = \sqrt{160000 + 360000 + 364000} = \sqrt{884000}$$

$$\boldsymbol{R \sim 940\ \mathbf{kg}}$$

$$\sin\beta = \frac{P_2}{R}\sin\alpha$$

$$= \frac{600}{940} \cdot 0{,}65 \sim 0{,}415$$

$$\beta = \mathbf{24^0\,30'}$$

47. Ein G kg schwerer Körper liegt auf einer schiefen Ebene, welche mit dem Horizonte den Winkel α bildet. Wie groß ist der Normaldruck auf die schiefe Ebene und wie groß ist die Kraft, welche den Körper von ihr herunterbewegt?

Auflösung: Entwirft man eine Figur, so wird ersichtlich, daß das Gewicht des Körpers und der Normaldruck N auf die schiefe Ebene den Winkel α bilden. Daher wird

$$\boldsymbol{N = G \cos\alpha}$$

Ebenso findet man leicht die bewegende Komponente mit

$$\boldsymbol{P = G \cdot \sin\alpha}$$

48. Welchen Normaldruck N erleidet eine wagerechte Ebene durch einen 500 kg schweren Körper, wenn an letzterem eine Kraft von 320 kg unter einem Winkel von $\alpha = 60^0$ gegen den Horizont aufwärts wirkt?

Auflösung: Die Vertikalkomponente V von 320 kg ist

$$V = 320 \cdot \sin 60^0 = 320 \cdot 0{,}87$$

$$V \sim 278\ \text{kg}$$

Daher ergibt sich der Normaldruck auf die Unterlage

$$N = 500 - 278$$

$$\boldsymbol{N = 222\ \mathbf{kg}}$$

49. Eine Dampfmaschine hat den Zylinderdurchmesser $D = 350$ mm und arbeitet mit einem größten Dampfüberdrucke von 6 Atm. — Wie groß sind die Drücke in der Schubstange und auf den Kreuzkopf in dem Momente, in welchem erstere senkrecht zur Kurbel steht?

Auflösung: Der Druck auf den Kolben ist $\frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot 6 = 5750$ kg. Heißt der Winkel, welchen Kolbenstange und Schubstange einschließen, α, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5} \sim 0{,}2, \text{ somit } \alpha = 11^0\,18'$$

Der Druck in der Schubstange wird

$$S = \frac{5750}{\cos\alpha} = \frac{5750}{0{,}98}$$

$$\boldsymbol{S = 5880\ \mathbf{kg}}$$

Der Druck auf den Kreuzkopf ergibt sich mit $K = 5750 \cdot \operatorname{tg}\alpha$

$$\boldsymbol{K = 1150\ \mathbf{kg}}$$

50. Eine Kugel liegt auf zwei schiefen Ebenen, welche mit dem Horizonte die Winkel α_1 und α_2 bilden und welche sich in einer Horizontalen schneiden. Welche Drücke empfangen die schiefen Ebenen? Fig. 23.

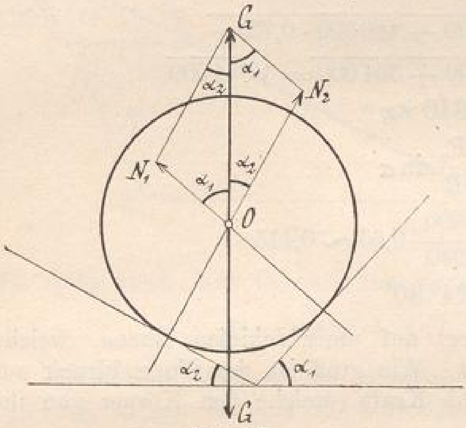

Fig. 23.

Auflösung: Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Resultierende aus den Gegendrücken der schiefen Ebenen entgegengesetzt gleich G ist. Es wird

$$N_1 : G = \sin\alpha_2 : \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\boldsymbol{N_1 = G \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}}$$

$$N_2 : G = \sin\alpha_1 : \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\boldsymbol{N_2 = G \cdot \frac{\sin\alpha_1}{(\sin\alpha_1 + \alpha_2)}}.$$

51. Zwei Kugeln mit den Gewichten G und G' stützen sich gegen zwei mit der Horizontalebene die Winkel α und α' bildende Ebenen. Welchen Winkel schließt die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte mit der Horizontalen ein, wenn sie im Gleichgewichte sind? Fig. 24.

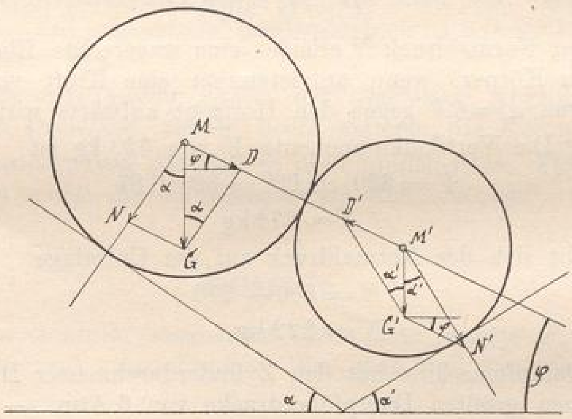

Fig. 24.

Auflösung: Soll Gleichgewicht bestehen, so müssen die Komponenten D und D' gleich sein.

Aus $\triangle\, GMD \ldots D : G = \sin\alpha : \sin\,[90 - (\alpha - \varphi)]$

$$D = G\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha - \varphi)}.$$

Aus $\triangle\, G'M'N' \ldots\ldots D' : G' = \sin\alpha' : \sin\,[180 - \alpha' - (90 + \varphi)]$

$$D' = G'\frac{\sin\alpha'}{\cos(\alpha' + \varphi)}.$$

Daher $\quad G \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha - \varphi)} = G'\frac{\sin\alpha'}{\cos(\alpha' + \varphi)}$ oder

$$G \sin\alpha \cos\alpha' \cos\varphi - G \sin\alpha \sin\alpha' \sin\varphi = G' \sin\alpha' \cos\alpha \cos\varphi + G' \sin\alpha \sin\alpha' \sin\varphi$$
$$G \sin\alpha \cos\alpha' - G \cdot \operatorname{tg}\varphi \sin\alpha \sin\alpha' = G \sin\alpha' \cdot \cos\alpha + G' \cdot \operatorname{tg}\varphi \sin\alpha \cdot \sin\alpha'$$
$$\operatorname{tg}\varphi \cdot [G' \sin\alpha \cdot \sin\alpha' + G \sin\alpha \sin\alpha'] = G \sin\alpha \cos\alpha' - G' \sin\alpha' \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{G \sin\alpha \cos\alpha' - G' \sin\alpha' \cos\alpha}{\sin\alpha \sin\alpha' \cdot (G + G')}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\varphi = \frac{G \cot\alpha' - G' \cot\alpha}{G + G'}}$$

52. Auf zwei gleich schwere Scheiben mit dem Gewichte G kg, welche an gleich langen Faden hängen und sich gegen eine Vertikalwand stützen, wird eine dritte ebensolche Scheibe gelegt. Wann herrscht Gleichgewicht? Fig. 25.

Auflösung. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Komponenten N_1 der ersten beiden Kräfte G gleich sind mit den Komponenten N_2 des dritten Gewichtes.

Die Gleichgewichtsbedingung wird eine Beziehung der Winkel α und β enthalten.

Laut Figur ist

$$\gamma = 180 - (180 - \beta) - \alpha = \beta - \alpha.$$

Im schraffierten Dreiecke gilt

$$N_1 : G = \sin\alpha : \sin(\beta - \alpha)$$
$$N_1 = G \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

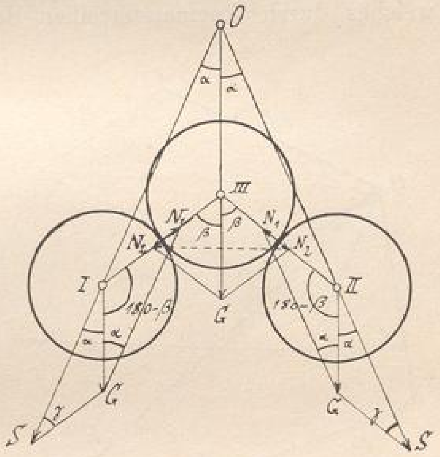

Fig. 25.

ferner wird $N_2 \cos\beta = \frac{G}{2}$, daher

$$N_2 = \frac{G}{2\cos\beta}.$$

Demnach $$G \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{G}{2\cos\beta}$$
$$2 \sin\alpha \cos\beta = \sin\beta \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta$$
$$\sin\beta \cos\alpha = 3 \sin\alpha \cos\beta.$$

Werden beide Seiten der Gleichung durch $\cos\alpha \cos\beta$ dividiert, dann ergibt sich $\boldsymbol{\operatorname{tg}\beta = 3 \operatorname{tg}\alpha}$