Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

C. Die ausgleichende Arbeit des Schwungrades bei der einfachen Kurbelbewegung.

handelt es sich um $n^2 \cdot 0{,}3$ kg Spannung, aus $n^2 \cdot 0{,}3 = 7{,}5$ folgt $n^2 = 25$ und $n = 5$. Bei 5 Touren also wird bereits die Elastizitätsgrenze erreicht. Wird der Bruchmodul als 11 angenommen, so erfolgt das Zerreifsen bei

$$n = \sqrt{\frac{11}{0{,}3}} = 6{,}055 \text{ Umdrehungen in der Sekunde.}$$

Die Annahme, dafs der Zug sich gleichmäfsig über die ganze Rifsfläche verbreitet, ist nicht ganz richtig, aber für praktische Zwecke zulässig.

Bei anderer Gestaltung des Hauptschnittes kommen die Formeln des Abschnittes 49 zur Geltung.

Will man direkt die Spannung erhalten, so ergiebt sich in Tonnen auf das Quadratmeter die Zugspannung

$$S_1 = \frac{2\,d\,p'\left(r^3 - r_1^3\right)(2\,n\pi)^2}{3\,g\,2\,d\,(r - r_1)} = \frac{p'\left(r^2 + r\,r_1 + r_1^2\right)(2\,n\pi)^2}{3\,g}.$$

Multiplikation mit 1000 und Division durch 1000000 reduziert diese Spannung auf Kilogramm pro Quadratmillimeter, so dafs man dann hat

$$S = \frac{p'\left(r^2 + r\,r_1 + r_1^2\right)(2\,n\pi)^2}{3000\,g},$$

im Beispiele also

$$S = \frac{7{,}5\,(10{,}89 + 9{,}9 + 9)\,4\,\pi^2}{3000 \cdot 9{,}81} = 0{,}2997 \text{ kg/qmm.}$$

Bei den grofsen z. B. in Drahtwalzwerken gebräuchlichen Umdrehungszahlen sind nach Obigem gufseiserne Räder von grofsen Dimensionen unbrauchbar. Sie werden dort durch schmiedeeiserne ersetzt. Bei dem Schrägwalzverfahren (Mannesmann) hat man die Sicherheit noch durch Umspinnung mit Draht zu vergröfsern gesucht.

C. Die ausgleichende Arbeit des Schwungrades bei der einfachen Kurbelbewegung.

420) Der Kurbelradius der Maschine sei r, der Widerstand, auf den Radius r reduziert, sei q, also $q\,r$ das Moment des zu überwältigenden Widerstandes. Man denke sich z. B. die Last q an einem Seile wirkend, welches um die Peripherie des Kurbelkreises geschlungen ist. Die Richtung der Pleuelstange werde stets als horizontal angenommen, was bei der sogenannten Kurbelschleife durchaus richtig, bei Pleuelstangen gewöhnlicher Art angenähert richtig ist, sobald sie mehr als die 5-fache Länge des Kurbelradius haben. Die treibende Maschine werde, wie überall in den Lehrbüchern, zunächst als Voll-

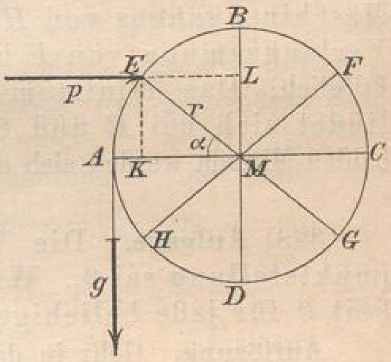
druckmaschine angenommen, so dafs es sich um eine konstante Triebkraft p handelt. T sei das Trägheitsmoment der gesamten Schwungmasse (zu der im angenommenen Beispiele auch die am Seile hängende Last q gehören müfste, wenn sie nicht vollständig abstrakt als Kraft aufgefafst wird).

421) **Aufgabe.** Wie grofs mufs die Triebkraft p theoretisch sein, damit der Gang der Maschine ein periodisch regelmäfsiger werde?

Auflösung. Bei jeder Umdrehung ist die Arbeit $q \cdot 2r\pi$ zu leisten. Ebenso viel Arbeit mufs die Dampfmaschine hergeben*), wenn die Maschine nicht in dauernde Beschleunigung oder in Verlangsamung geraten soll. Der Hin- und Rückgang des Kolbens giebt den Weg $4r$, also ist $p \cdot 4r$ die entsprechende Arbeit der Maschine. Aus $p \cdot 4r = q \cdot 2r\pi$ folgt

1) $$p = \frac{\pi}{2} q = 1{,}5708\, q.$$

Fig. 286.



Die Triebkraft ist also mehr als das $1\frac{1}{2}$ fache der Last, und zwar deshalb gröfser, weil ihr Hebelarm zwischen den Werten Null und r schwankt, während der Hebelarm der Last konstant gleich r bleibt. Bemerkenswert ist, dafs die Gröfse von r für das Resultat gleichgültig ist.

422) **Aufgabe.** In welchen Stellungen ist das statische Moment der Kraft gleich dem der Last?

Auflösung. Für die beliebige Stellung α (Fig. 286) ist das statische Moment der Kraft $pr \sin\alpha$, das der Last ist stets qr. Setzt man beide gleich, so ist

$$pr \sin\alpha = qr$$

oder

$$\frac{\pi}{2} qr \sin\alpha = qr.$$

Daraus folgt

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi},$$

d. h.

2) $$\alpha = 39^0\, 32'\, 30''.$$

---

*) Der Satz von der Erhaltung der Arbeit bei diesem Probleme ist vorher in bekannter Weise elementar zu beweisen.

Dasselbe gilt von den Stellungen

$$-39^0 32' 30'' \text{ und } \pm 140^0 27' 30''.$$

Diese Stellungen sind die einzig möglichen für das Gleichgewicht. Bleibt die Maschine zwischen H und E oder zwischen F und G stehen, so ist es der Dampfkraft p nicht möglich, das Moment der Last zu überwinden und die Maschine in Gang zu setzen. Entweder mufs die Last vermindert oder das Rad mit besonderen Mitteln über die Minimalstellen hinaus getrieben werden, d. h. mindestens $39^0 32\frac{1}{2}'$ über die Totpunktstellung hinaus. Die Vorrichtungen, die dem Maschinenwärter diese Arbeit ermöglichen, sind wohl allgemein bekannt.

Folgerungen. Von H bis E ist das Moment der Triebkraft zu klein, von E bis F ist es zu grofs, von F bis G zu klein, von G bis H zu grofs. Demnach herrscht Verlangsamung des Maschinenganges von H bis E, Beschleunigung von E bis F, Verlangsamung von F bis G, Beschleunigung von G bis H. Folglich: Das Minimum der Drehungsgeschwindigkeit befindet sich bei E und G, das Maximum bei F und H. Die beiden Minima werden sich als gleich herausstellen, ebenso die Maxima.

423) **Aufgabe.** Die Winkelgeschwindigkeit in der Totpunktstellung sei ϑ_1. Wie grofs ist die Winkelgeschwindigkeit ϑ für jede beliebige Stellung α des Kurbelradius?

Auflösung. Geht in der Figur der Endpunkt des Radius von A nach E, so ist die Last um den Bogen $AE = r \cdot \widehat{\alpha}$ gehoben. Die geleistete Arbeit ist also $qr\widehat{\alpha}$, oder, wie aus der Proportion $\alpha : \widehat{\pi} = \alpha^0 : 180^0$ folgt, geleistete Arbeit $= qr\pi\frac{\alpha^0}{180^0}$, wobei man die Gradzeichen dulden möge, um Verwechselungen zu vermeiden.

Der Weg des Dampfkolbens aber ist AK, die aufgewandte Arbeit der Maschine also $p \cdot AK$, oder, da $p = \frac{\pi}{2} q$ und $AK = r(1 - \cos\alpha)$ ist, aufgewandte Arbeit $= \frac{\pi}{2} qr(1 - \cos\alpha)$. Folglich Kraftarbeit — Lastarbeit

$$= \frac{\pi}{2} qr(1 - \cos\alpha) - qr\pi\frac{\alpha^0}{180^0} = qr\pi\left[\tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha) - \frac{\alpha^0}{180^0}\right].$$

Dieser Arbeitsüberschufs, der allerdings positiv und negativ sein kann, wirft sich in die Schwungmassen und bringt deren Arbeitswucht von $\frac{T\vartheta_1^2}{2}$ auf $\frac{T\vartheta^2}{2}$, so dafs sein mufs:

$$\frac{T}{2}(\vartheta^2 - \vartheta_1^2) = qr\pi\left[\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) - \frac{\alpha^0}{180^0}\right].$$

Hieraus ergiebt sich

3) $$\vartheta^2 = \vartheta_1^2 - \frac{2qr\pi}{T}\left[\frac{\alpha^0}{180^0} - \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)\right],$$

woraus sich die Winkelgeschwindigkeit ϑ für jedes α leicht berechnet.

Setzt man für α den Supplementwinkel $180^0 - \alpha$ ein, so verwandelt sich die Formel in

3*) $$\vartheta^2 = \vartheta_1^2 + \frac{2qr\pi}{T}\left[\frac{\alpha^0}{180^0} - \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)\right],$$

so dafs die Summe der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten für Supplementstellungen stets gleich $2\vartheta_1^2$ ist. Daraus folgt, dafs in den Stellungen A, B, C und D, d. h. für 0^0, 90^0, 180^0 und -90^0 die Winkelgeschwindigkeit gleich ϑ_1 ist, was sich bei Einsetzung dieser Winkel auch bestätigt. In der statisch günstigsten Stellung ist also die Geschwindigkeit dieselbe, wie in der Totpunktstellung.

Auch für die Minimal- und Maximalstellung ist die Summe der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten gleich $2\vartheta_1^2$, also

$$\vartheta_{max}^2 + \vartheta_{min}^2 = 2\vartheta_1^2,$$

oder

4) $$\vartheta_1^2 = \frac{\vartheta_{max}^2 + \vartheta_{min}^2}{2}.$$

Folglich: Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit in der Totpunktstellung ist das arithmetische Mittel der Quadrate der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit.

424) Noch klarer tritt das Resultat hervor, wenn man beide Seiten der Gleichung 4) mit $\frac{T}{2}$ multipliziert. Es ergiebt sich

5) $$\frac{T\vartheta_1^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{T}{2}\vartheta_{max}^2 + \frac{T}{2}\vartheta_{min}^2\right],$$

oder

5*) $$A_1 = \frac{A_{max} + A_{min}}{2},$$

d. h. die Arbeitswucht der Schwungmassen in der Totpunktstellung ist das arithmetische Mittel der Arbeitswuchten in den Stellungen der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit.

Dasselbe gilt von den Stellungen $\pm 90^0$. Nach den Bemerkungen zu den Gleichungen 3) ist A_1 auch das arithmetische Mittel der Arbeitswuchten für jedes Paar der dort besprochenen Supplementstellungen.

425) **Aufgabe.** Die Maximal- und die Minimalgeschwindigkeit sollen aus der Totpunktgeschwindigkeit berechnet werden.

Auflösung. Beide berechnen sich nach 3) und 3*) aus der Gleichung

$$\vartheta^2 = \vartheta_1^2 \pm \frac{2 r \pi q}{T}\left[\frac{39^0\, 32'\, 30''}{180^0} - \frac{1}{2}(1 - \cos 39^0\, 32'\, 30'')\right],$$

also:

$$6)\quad \begin{cases} \vartheta_{\max} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \dfrac{0{,}6614\, qr}{T}}, \\ \vartheta_{\min} = \sqrt{\vartheta_1^2 - \dfrac{0{,}6614\, qr}{T}}. \end{cases}$$

Folgerungen: Die gesamte Schwankung ist:

$$\vartheta_{\max} - \vartheta_{\min} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \frac{0{,}6614\, qr}{T}} - \sqrt{\vartheta_1^2 - \frac{0{,}6614\, qr}{T}}.$$

Aus 6) folgt

$$7)\quad \vartheta^2_{\max} - \vartheta^2_{\min} = 1{,}3228 \frac{qr}{T}$$

(was unabhängig von ϑ_1 ist), oder wenn man beiderseits mit $\frac{T}{2}$ multipliziert:

$$\frac{T}{2}\vartheta^2_{\max} - \frac{T}{2}\vartheta^2_{\min} = 0{,}6614\, qr,$$

d. h.

$$8)\quad A_{\max} - A_{\min} = 0{,}6614\, qr = 0{,}6614\, M.$$

Also: Die Arbeitswucht, die von den Schwungmassen in der Beschleunigungsperiode aufgenommen und in der Verlangsamungsperiode wieder abgegeben wird, ist gleich dem 0,6614-fachen des Lastmomentes, oder etwa gleich $\frac{2}{3}$ des Lastmomentes. Die Gröfse der Schwungmasse, die Gröfse ihres Trägheitsmomentes, die mittlere Geschwindigkeit und die mittlere Arbeitswucht der Schwungmasse sind dabei vollständig gleichgültig. Die Arbeitsaufnahme eines Schwungrades ist also nur von dem Lastmomente abhängig.

426) Soll das Schwungrad über die Minimalstelle wirklich hinauskommen, so mufs nach Gleichung 7), in der für $\vartheta_{\min}$ der Grenzwert Null einzusetzen ist,

$$\vartheta_{\max} > \sqrt{1{,}3228\frac{qr}{T}}$$

sein. Die kleinste denkbare Maximalgeschwindigkeit ist also

$$\vartheta'_{\max} = \sqrt{1{,}3228\frac{qr}{T}}.$$

Die kleinste denkbare Totpunktgeschwindigkeit ist also nach 6) zu berechnen aus

$$\vartheta_1^2 = \vartheta'^2_{\max} - 0{,}6614\frac{qr}{T} = 1{,}3228\frac{qr}{T} - 0{,}6614\frac{qr}{T}.$$

Dafs sie mindestens

$$\vartheta_1 = \sqrt{0{,}6614\frac{qr}{T}}$$

sein mufs, ergiebt sich auch aus der zweiten der Formeln 6), die sonst Imaginäres ergeben würde.

Man erkennt daraus, dafs bei gegebenem Lastmoment und gegebener Schwungmasse die Maximalgeschwindigkeit und ebenso die Totpunktgeschwindigkeit unter gewisse Minimalwerte nicht herabsinken dürfen. Will man jedoch mit geringerer Maximalgeschwindigkeit arbeiten, so mufs man das Trägheitsmoment T der Schwungmasse vergröfsern, denn das gestattete Minimum ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente. Schon daraus wird man den Schlufs ziehen, dafs man grofse Schwungmassen anwenden mufs, wenn man der Maschine möglichst geringe Tourenzahl bei einiger Regelmäfsigkeit des Ganges geben will.

Man sieht ferner, dafs die gröfste mögliche Schwankung diejenige zwischen dem kleinsten Maximalwerte und Null sein wird, also $\sqrt{1{,}3228\frac{qr}{T}}$, was sich später noch deutlicher zeigen wird.

427) In der Technik berechnet man die Schwankungen vom Mittelwerte der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit aus, der ϑ_m sein mag. Dem wird genügt, wenn man

$$9)\quad \begin{cases} \vartheta_{\max} = \vartheta_m + \dfrac{\vartheta_m}{n} = \vartheta_m\left(1 + \dfrac{1}{n}\right), \\ \vartheta_{\min} = \vartheta_m - \dfrac{\vartheta_m}{n} = \vartheta_m\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

setzt, woraus eben folgt

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_{\max} + \vartheta_{\min}}{2}.$$

Man bezeichnet dann $\frac{1}{n}$ als die Schwankung (vom Mittelwerte aus gerechnet) und n als den Schwankungskoeffizienten.

Durch Addition und Subtraktion folgt aus den Gleichungen 9)

$$\vartheta_{\max} + \vartheta_{\min} = 2\,\vartheta_m,$$

$$\vartheta_{\max} - \vartheta_{\min} = \frac{2\,\vartheta_m}{n},$$

und durch Multiplikation erhält man aus den letzteren

10) $$\vartheta^2_{\max} - \vartheta^2_{\min} = \frac{4\,\vartheta^2_m}{n}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit 7), so findet man

$$\frac{4\,\vartheta^2_m}{n} = 1{,}3228\,\frac{qr}{T},$$

oder

11) $$\frac{\vartheta^2_m}{n} = 0{,}3307\,\frac{qr}{T} = 0{,}3307\,\frac{M}{T}.$$

Sind also gegeben das Widerstandsmoment M, das Trägheitsmoment T und die Mittelgeschwindigkeit $\vartheta_m = \frac{\vartheta_{\max} + \vartheta_{\min}}{2}$, so läſst sich die Schwankung $\frac{1}{n}$ leicht berechnen.

428) Für den Techniker ist die wichtigste Aufgabe die, für eine zulässige Schwankung $\frac{1}{n}$ die dazu nötige Schwungmasse zu bestimmen. Ihr Trägheitsmoment ergiebt sich aus

11*) $$T = \frac{0{,}3307\,Mn}{\vartheta^2_m}.$$

Aus

11**) $$\frac{1}{n} = \frac{0{,}3307\,M}{\vartheta^2_m\,T}$$

folgt ohne weiteres, daſs die Schwankung umgekehrt proportional dem Trägheitsmomente und dem Quadrate der Mittelgeschwindigkeit ϑ_m ist, welche letztere jedoch nicht mit der mittleren Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit verwechselt werden darf. Man ist trotzdem berechtigt, daraus abzulesen, daſs man bei groſser Umdrehungsgeschwindigkeit auch mit einem kleineren Schwungrade grofse Regelmäfsigkeit des Ganges erzielen kann. Der Ausschlag $\frac{\vartheta_m}{n}$ wird in jedem Falle $\frac{0{,}3307\,M}{\vartheta_m T}$.

429) **Aufgabe.** Wie unterscheidet sich die Mittelgeschwindigkeit ϑ_m von der Totpunktgeschwindigkeit ϑ_1?

Auflösung. Es war

$$\vartheta_1^2 = \frac{\vartheta^2_{\max} + \vartheta^2_{\min}}{2} = \frac{\vartheta^2_m\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \vartheta^2_m\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{2} = \vartheta^2_m\left[1+\frac{1}{n^2}\right],$$

also

12)
$$\vartheta_1 = \vartheta_m\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Die Totpunktgeschwindigkeit ist also stets ein wenig gröfser, als der Mittelwert ϑ_m. Ist z. B. die Schwankung, von diesem aus gerechnet, $\frac{1}{50}$, so ist

$$\vartheta_1 = \vartheta_m\sqrt{1+\tfrac{1}{2500}} = \sim \vartheta_m\left(1+\tfrac{1}{5000}\right) = \sim 1{,}0002\,\vartheta_m.$$

Bei grofsen Geschwindigkeiten darf man also Totpunktgeschwindigkeit und Mittelgeschwindigkeit zur Not mit einander vertauschen, bei geringer Umdrehungsgeschwindigkeit aber nicht. Die Unterschiede können sogar sehr grofs werden. Bei der kleinsten möglichen Maximalgeschwindigkeit und der zugehörigen Minimalgeschwindigkeit Null z. B. ist die Mittelgeschwindigkeit $\vartheta_m = \frac{1}{2}\sqrt{1{,}3228\frac{qr}{T}}$, die Totpunktgeschwindigkeit dagegen $\vartheta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 1{,}3228\frac{qr}{T}}$, so dafs sich beide verhalten wie $\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{1}{2}}$, oder wie $1 : \sqrt{2}$, also etwa wie $1 : 1{,}41$, wobei die Vertauschung doch wohl etwas bedenklich sein dürfte.

Diese Bemerkung soll nur dazu dienen, auf die Unzulässigkeit des Verfahrens aufmerksam zu machen, dessen sich einige Lehrbücher bedienen, wenn sie solche Vertauschungen ohne jede Vorsichtsmafsregel vornehmen.

Nach Gleichung 11**) wird nun allerdings bei grofsem ϑ_m die Schwankung $\frac{1}{n}$ sehr klein, der Unterschied zwischen mittlerer Geschwindigkeit, Mittelgeschwindigkeit und Totpunktgeschwindigkeit ebenfalls klein, jedenfalls weit kleiner als Unterschied $\frac{\vartheta_m}{n}$ oder $\frac{0{,}3307\,M}{\vartheta_m T}$, der den Gesamtausschlag vom Mittelwerte aus bezeichnet. Bei gröfserer Umdrehungszahl also wird es für technische Zwecke berechtigt sein, ϑ_1, ϑ_m und die mittlere Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit etwa ϑ_0, mit einander zu verwechseln. Dann ist man noch in der Lage, Pferdestärken und Tourenzahl (pro Minute) einzuführen.

430) **Aufgabe.** Welche Beziehung findet zwischen dem statischen Momente des Widerstandes $M = qr$, der Anzahl von Pferdestärken N und der Tourenzahl m statt?

Auflösung. Bei jeder Umdrehung wird die Last q um $2r\pi$ gehoben, also die Arbeit $2r\pi q$ geleistet, die Arbeit pro Sekunde ist also bei m minutlichen Umdrehungen $\frac{2r\pi qm}{60}$, also, wenn z. B. in Meterkilogrammen gerechnet war, $N = \frac{2r\pi qm}{60 \cdot 75}$ Pferdestärken. Demnach ist das Lastmoment

$$13)\qquad M = qr = \frac{75 \cdot 60 N}{2\pi m}$$

zu setzen. Die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit aber ist jetzt

$$\vartheta^0 = \frac{2r\pi m}{60}.$$

Darf man nun ϑ_m und ϑ_0 verwechseln, so geht Gleichung 11**) über in

$$\frac{1}{n} = \frac{0{,}3307\,\frac{75 \cdot 60 \cdot N}{2\pi m}}{\frac{4r^2\pi^2 m^2}{3600} \cdot T},$$

woraus folgt:

$$14)\qquad n = \frac{Tm^3}{21\,600 N},$$

oder auch

$$15)\qquad T = \frac{21\,600 Nn}{m^2}.$$

Dies ist die auf den technischen Hochschulen gebräuchliche Formel*). Schon sie ist streng genommen nur eine Annäherungsformel für den

*) Die höhere Rechnung würde für die halbe Umlaufszeit die Formel

$$t = \frac{1}{\vartheta_1}\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \frac{2qr}{T\vartheta_1^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\alpha - \widehat{\alpha}\right)}}$$

ergeben. Auf die Berechnung der wirklichen mittleren Geschwindigkeit $\vartheta_m = \frac{\pi}{t}$ wird jedoch auch auf der Hochschule wegen der Schwierigkeit der Auswertung des Integrals verzichtet. Vergl. meinen Aufsatz in der Zeitschr. d. V. deutscher Ingenieure, Bd. 34, S. 30 u. s. w.

Fall großer Geschwindigkeiten. Weit komplizierter würde die Rechnung werden, wenn man statt der Volldruckmaschine die Expansionsmaschine behandeln wollte. Immerhin würde die Berechnung von hohem Interesse sein, sowohl bei Zugrundlegung des Mariotteschen Diagramms (gleichseitige Hyperbel) als des adiabatischen Diagramms für atmosphärische Luft bezw. gesättigte Dämpfe. Hier sind graphische Darstellungen vorzuziehen, wie sie am Schlusse zur Sprache kommen sollen.

431) Aus Gleichung 14) läßt sich folgendes ablesen:

Die Schwankung der Maschine ist direkt proportional der Anzahl der Pferdestärken, umgekehrt proportional der Schwungmasse und umgekehrt proportional der dritten Potenz der Tourenzahl.

Was diese dritte Potenz anbetrifft, so scheint darin ein Widerspruch gegen die Formel 11) zu liegen, nach der die Schwankung dem Quadrate der Geschwindigkeit, also auch dem der Tourenzahl, umgekehrt proportional war. Der Widerspruch ist jedoch nur ein scheinbarer, denn wenn die Maschine doppelt so schnell (bei gleicher Belastung) geht, wird auch die Anzahl der Pferdestärken verdoppelt, so daß der Faktor $\frac{1}{2^3}$ auf $\frac{2}{2^3}$ oder $\frac{1}{2^2}$ reduziert wird. Man erkennt wiederum, daß man bei doppelter Umdrehungsgeschwindigkeit (und doppelter Anzahl der Pferdestärken) mit dem vierten Teile des Trägheitsmomentes, dieselbe Regelmäßigkeit erzielt.

Darf man das Trägheitsmoment der Last q vernachlässigen, was stets gestattet ist, sobald es sich um einen nur passiv wirkenden Widerstand handelt (z. B. um die Reibung, die niemals eine entgegengesetzte Bewegung der Maschine aktiv hervorrufen kann) und will man beim Schwungrade nur den Ring, nicht aber die Radarme, die Achse und die Nabe berücksichtigen, so kann man Aufgaben der folgenden Art ohne weiteres lösen:

432) **Aufgabe.** Ein Schwungring habe den Radius R. Wie schwer ist er zu nehmen, damit bei N Pferdestärken und m minutlichen Touren die Schwankungen der Maschine, vom Mittelwerte aus gerechnet, den Betrag $\frac{1}{n}$ nicht überschreiten?

Auflösung. Ist P das Gewicht des Rades, so ist $\frac{P}{g}$ seine Masse, $\frac{P}{g} \cdot R^2 = \frac{P}{9{,}81} R^2$ sein Trägheitsmoment, wobei in Metern und Kilogrammen zu rechnen ist. In Formel 15) eingesetzt, giebt dies

$$\frac{P}{g} R^2 = \frac{21\,600\,Nn}{m^3},$$

also ist das gesuchte Gewicht des Ringes

$$P = \frac{9,81 \cdot 21\,600 \cdot Nn}{R^2 m^3}.$$

Leistet z. B. die Maschine 100 Pferdestärken bei 60 Touren, und soll die Schwankung, vom Mittelwerte aus gerechnet, $\frac{1}{100}$ nicht übersteigen, so ergiebt sich als Gewicht des Ringes, wenn der Radius $R = 2$ m sein soll,

$$R = \frac{9,81 \cdot 21\,600 \cdot 100 \cdot 100}{4 \cdot 60^3} = \frac{9,81 \cdot 216\,000\,000}{4 \cdot 216\,000} = 2452 \text{ kg}.$$

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Maschine ist dabei 2π, die Maximalgeschwindigkeit $2\pi\left(1 + \frac{1}{100}\right)$, die Minimalgeschwindigkeit $2\pi\left(1 - \frac{1}{100}\right)$, wobei bezüglich des Ausdrucks mittlere Geschwindigkeit von der oben erörterten Erlaubnis zur angenäherten Berechnung Gebrauch gemacht worden ist.

Bei dieser Aufgabe war der Radius des Ringes schlechthin gleich R angenommen. In Wahrheit handelt es sich um einen äufseren Radius R und einen inneren Radius R_1. (Das vorige R ist nicht etwa das arithmetische Mittel der beiden jetzigen Radien, sondern sein Quadrat ist das Mittel der jetzigen Radienquadrate.) Also:

433) **Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe für einen Schwungring mit rechteckigem Querschnitte und den Radien R und R_1 zu lösen.

Auflösung. Das Trägheitsmoment ist jetzt:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{R^2 + R_1^2}{2}.$$

Einsetzung in Gleichung 15) giebt als Gewicht des Ringes

$$P = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 21\,600\,Nn}{m^2 (R^2 + R_1^2)}.$$

Sind z. B. für das vorige Zahlenbeispiel die beiden Radien $R = 2,3$ m und $R_1 = 2$ m, so ergiebt sich unter denselben Bedingungen das Gewicht 2112 kg.

434) **Aufgabe.** Ein Schwungring habe den Radius R und das Gewicht P. Welche Schwankung macht die Maschine bei N Pferdestärken und m minutlichen Umdrehungen?

Auflösung.

$$\frac{1}{n} = \frac{9,81 \cdot 21\,600 \cdot N}{PR^2 m^3}.$$

Ist z. B. $P = 5000$ kg, $R = 2$ m, Tourenzahl m $= 60$ und Zahl der Pferdestärken $N = 100$, so folgt

$$\frac{1}{n} = \frac{9{,}81 \cdot 21600 \cdot 100}{5000 \cdot 4 \cdot 60^2} = \sim \frac{1}{204}.$$

Berücksichtigt man dagegen beide Radien, so lautet die Lösung

$$\frac{1}{n} = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 21\,600\, N}{P\left(R^2 + R_1^2\right) m^3}.$$

Dasselbe Beispiel, jedoch mit $R = 2{,}3$ und $R_1 = 2$ giebt als Schwankung $\frac{1}{237}$.

Genauer pflegt die Praxis nicht zu rechnen. Will man die Aufgaben durch Einrechnung der Radarme u. s. w. komplizierter machen, so stellen sich bei einfacherer Gestaltung dieser Teile Schwierigkeiten nicht in den Weg.

Endlich sei noch folgende Aufgabe gestellt:

435) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste N Pferdestärken bei m minutlichen Umdrehungen. Wieviel Arbeit hat das Schwungrad in der günstigen Periode aufzunehmen und in der ungünstigen wieder abzugeben?

Auflösung. Nach Gleichung 8) war die aufzunehmende und abzugebende Arbeit

$$A_{\max} - A_{\min} = 0{,}6614\, pr.$$

Nach Gleichung 13) war aber

$$qr = \frac{75 \cdot 60 N}{2 \pi m}.$$

Folglich ist die Arbeitsaufnahme und Abgabe der Schwungmasse

$$A = 0{,}6614 \frac{75 \cdot 60 N}{2 \pi m} = \sim 473{,}7 \frac{N}{m}.$$

Werden z. B. 100 Pferdestärken bei 50 Touren geleistet, so ist die Aufnahme und Abgabe von Arbeit

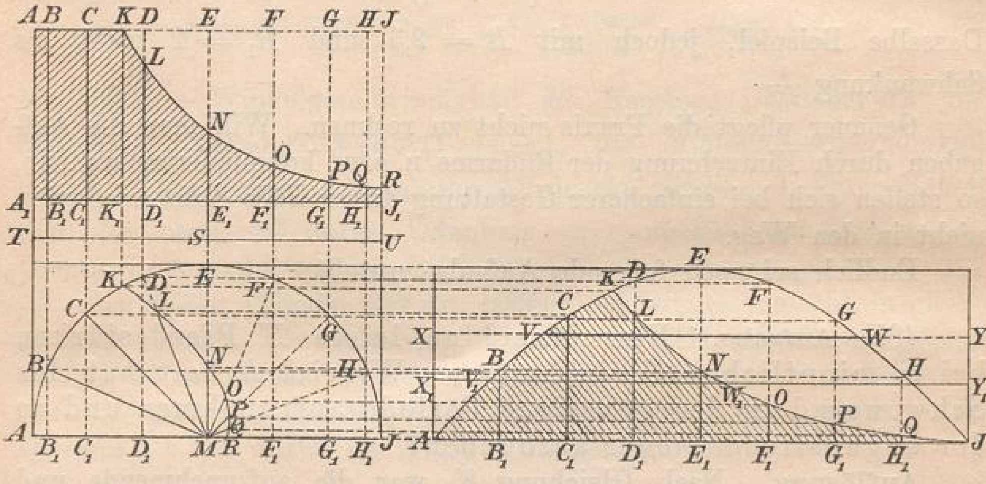
$$A = 473{,}7 \cdot \tfrac{100}{50} = 947{,}4 \text{ mkg},$$

wobei die Gröfse des Schwungrades, die der Schwankung u. s. w. ganz gleichgültig ist.

436) Ein leichtverständliches Diagramm für die Geschwindigkeitsverhältnisse des Schwungrades erhält man, indem man durch einen Punkt ein Strahlenbüschel legt und auf jedem Strahle die der entsprechenden Kurbelstellung zugehörige Geschwindigkeit aufträgt. Die Endpunkte geben die verlangte Diagrammkurve.

Durch ein anderes Diagramm (Fig. 287) läfst sich veranschaulichen, wie sich die Verhältnisse der Schwungradarbeit gestalten, wenn nicht von der Volldruckmaschine, sondern von der Expansionsmaschine die Rede ist, möge nun das Mariottesche Diagramm, oder das adiabitische für Druckluft oder Dämpfe, oder endlich ein beliebiges Indikatordiagramm zu Grunde gelegt werden.

Fig. 287.



In Figur 287 ist der Fall des Mariotteschen Diagramms und der der Volldruckmaschine zugleich behandelt.

Als Expansionsdiagramm ist dasjenige für $\frac{1}{4}$ Füllung gewählt, so dafs $SN = \frac{1}{2}\,TA$, $UR = \frac{1}{4}\,TA$ ist und das Diagramm von einer gleichseitigen Hyperbel begrenzt wird. TU ist die Grundlinie, A_1J_1 die atmosphärische Linie des Diagramms. Die schraffierte Fläche giebt also den Überdruck an. Die Überdruckshöhe A_1A ist halb so grofs, wie die Grundlinie des Diagramms gezeichnet worden, was bei der Willkürlichkeit des Mafsstabes der Allgemeinheit keinen Eintrag thut. Ebenso grofs ist der Radius des Kurbelkreises, von dem nur die Hälfte gezeichnet zu werden braucht.

Der Halbkreis ist durch die Punkte B, C, D, E, F, G, H in acht gleiche Teile geteilt. Rechts davon ist über der Geraden $AJ = r\pi$, die in derselben Weise eingeteilt ist, durch Horizontalprojektion der Kreispunkte auf die entsprechenden Lote die zugehörige Sinuslinie konstruiert. Diese bedeutet das auf die Peripherie übertragene Arbeitsdiagramm bei der Volldruckarbeit.

Angenommen XY sei die Horizontale, für die $AJYX$ gleich der Fläche der Sinuskurve ist, d. h. also $AX = \frac{2}{\pi}r$, so würde die Fläche VEW gleich der Summe der Flächen AXV und JYW sein. Das

Schwungrad würde also in der Überschufsperiode die durch VEW dargestellte Arbeit aufnehmen und in der Verlustperiode ebensoviel abgeben.

Handelt es sich dagegen um das Expansionsdiagramm, so ist folgendermafsen zu verfahren. Auf dem Radius MD des Kurbelkreises ist die Überdruckslinie $D_1 L$ als ML abzutragen und der nun gefundene Endpunkt L ist auf das Lot $D_1 D$ der Sinuslinie zu projizieren, was dort den Punkt L giebt. Ebenso ist mit den übrigen Radien des Kurbelkreises zu verfahren. Die neue Diagrammkurve für die Kurbelperipherie ist also von A bis K die vorige Sinuskurve, von dort ab aber tritt der Expansion entsprechend die Kurve $KLNOPQJ$ für diese ein. Die schraffierte Fläche des neuen Diagramms ist, da bei der Anwendung des Hebelgesetzes die Momente und die Arbeiten sich nicht ändern, gleich der des Expansionsdiagramms.

Berechnet man die letztere theoretisch oder mit Hülfe des Polarplanimeters, so findet man durch Multiplikation der Fläche mit $\frac{1}{r\pi}$ die Höhe AX_1, die das Rechteck AJY_1X_1 der Diagrammfläche gleich macht. Jetzt giebt die Fläche $V_1 W_1 K = AX_1 V_1 + JY_1 W_1$ die Arbeit an, welche das Schwungrad in der Überschufs- und Verlustperiode aufzunehmen bezw. abzugeben hat.

Während bei der Volldruckarbeit die Verlängerung von XY den Kurbelkreis in den Punkten schneidet, wo das Moment der Kraft gleich dem der Last ist und zugleich das Minimum und Maximum der Winkelgeschwindigkeit stattfinden, hat man jetzt $X_1 Y_1$ bis zu den Schnitten mit dem Kreise zu verlängern, um den Minimal- und Maximalpunkt (aber nicht den der Momentengleichheit zwischen Kraft und Last) zu finden.

Ist A die Überschufsarbeit, so hat man für diese Geschwindigkeiten die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} T\vartheta^2_{\max} - \tfrac{1}{2} T\vartheta^2_{\min} = A$$

Fügt man noch die Geschwindigkeit der mittleren Arbeitswucht des Rades als ϑ ein (d. h. das Mittel der Grenzwerte), so geschieht dies durch die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} T\vartheta^2_{\max} + \tfrac{1}{2} T\vartheta_{\min} = 2\,T\frac{\vartheta^2}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\tfrac{1}{2} T\vartheta^2_{\max} = \tfrac{1}{2}\left[2\,T\frac{\vartheta^2}{2} + A\right],$$

$$\tfrac{1}{2} T\vartheta^2_{\min} = \tfrac{1}{2}\left[2\,T\frac{\vartheta^2}{2} - A\right].$$

Will man die Wirkung der Voreinströmung des Gegendampfes berücksichtigen, so hat man dessen Überdrucklinien am Ende des Expansionsdiagramms von dessen Drucklinien abzuziehen, was stellenweise auch Negatives geben kann.

In entsprechender Weise ist mit dem adiabatischen Diagramm für Druckluft, Heifsluft oder Dämpfe zu verfahren.

Will man für die Kurbelbewegung nicht die Sinusversus-Bewegung als mafsgebend annehmen, sondern die verschiedenen Lagen der Pleuelstange berücksichtigen, so hat man von der durch die Kolbenstange übertragenen Druckkraft die in der Richtung der Pleuelstange liegende Komponente zu bilden und von dieser die Tangentialkomponente zu bilden, die dann im Diagramm der Sinuslinie als Lot abzutragen ist.

So gewinnt man genaue graphische Darstellungen für die Arbeitsvorgänge am Schwungrade, während der exakten rechnerischen Durchführung unüberwindliche Integrationsschwierigkeiten im Wege stehen, die nur durch Näherungsrechnungen umgangen werden können.

Die Behandlung der Fälle der Zweicylinder- und Dreicylindermaschinen soll dem Leser überlassen bleiben. Der rechnerische und der graphische Weg schliefsen sich dem für einfache Maschinen gegebenen genau an.