Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 11. Zusammensetzung mehrere Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte nach vorhergegangener Zerlegung derselben Horizontal- und Vertikalkomponenten. Beispiele 55- 58

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Auflösung: Die Resultierende von P_1 und P_2 ist

$$R = \sqrt{15^2 + 10^2 + 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 60} + \sqrt{225 + 100 + 300 \cdot 0{,}5}$$

$$\boldsymbol{R \sim 21{,}8 \text{ kg}}$$

Die Größe von P_3 ergibt sich mit $P_3 = R = 21{,}8$ kg. — P_3 ist R entgegengerichtet. Heißt der Winkel, den R mit P_1 einschließt, β, dann wird

$$\sin \beta = \frac{P_2}{R} \sin \alpha = \frac{10 \cdot 0{,}87}{21{,}8} = 0{,}4$$

$$\beta = 23^0\,30'$$

Da P_3 mit R einen Winkel von 180^0 und R mit P_2 einen Winkel von $36^0\,30'$ bildet, ist $\sphericalangle (P_3, P_2) = 180^0 - 23^0\,30'$, d. h.

$$\boldsymbol{\sphericalangle (P_3, P_2) = 156^0\,30'}$$

§ 11. Zusammensetzung mehrerer Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte nach vorhergegangener Zerlegung derselben in Horizontal- und Vertikalkomponenten.

Die in vorigem Paragraphen gezeigte rechnerische Ermittlung der Größe der Gesamtresultierenden mehrerer in demselben Punkte angreifenden Kräfte würde wegen der oftmals nacheinander notwendigen Anwendung des Carnot-

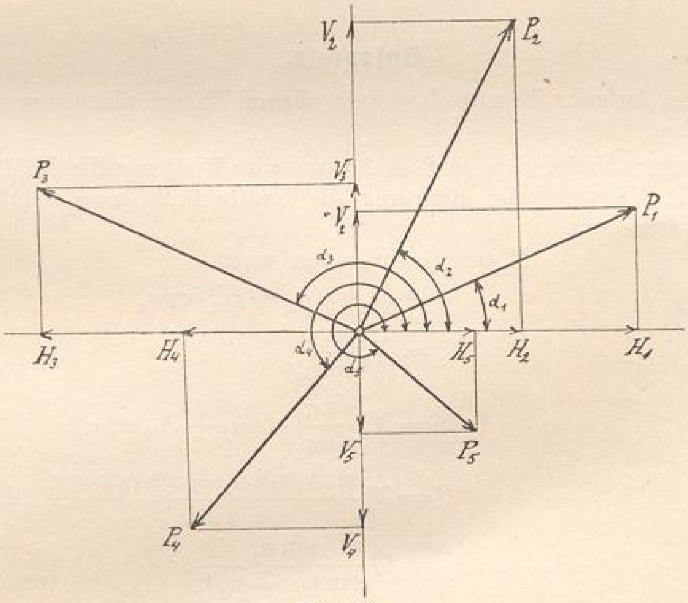

Fig. 28.

schen Satzes umständlich sein. Die graphische Auffindung der Resultierenden andrerseits ist ungenau.

Es empfiehlt sich daher zur Auffindung der Resultierenden folgender einfacher Weg (Aufsuchung der Resultierenden nach vorhergegangener Zerlegung der Kräfte in Horizontal- und Vertikalkomponenten).

Man zerlegt alle Kräfte, siehe Fig. 28, in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen in Komponenten H_1, H_2 . . . . . und V_1, V_2 . . . . . Dadurch ergibt sich in der einen, z. B. horizontalen Richtung die Teilresultierende

$$H_1 + H_2 + \ldots\ldots = \Sigma(H)$$

und in der anderen, z. B. vertikalen, die Teilresultierende

$$V_1 + V_2 + \ldots\ldots = \Sigma(V)$$

Hierbei sind $H_1 = P_1 \cos\alpha_1$, $H_2 = P_2 \cos\alpha_2$ . . . . und
$V_1 = P_1 \sin\alpha_1$, $V_2 = P_2 \sin\alpha_2$ . . . .

Aus $\Sigma(H)$ und $\Sigma(V)$ findet sich einfach die Gesamtresultierende mit

$$\boldsymbol{R = \sqrt{[\Sigma(H)]^2 + [\Sigma(V)]^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(35)}$$

Werden die Winkel, welche R mit $\Sigma(H)$, bzw. mit $\Sigma(V)$, bildet, α und β genannt, so folgen:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\Sigma(\boldsymbol{H})}{\boldsymbol{R}} \\ \cos\beta &= \frac{\Sigma(\boldsymbol{V})}{\boldsymbol{R}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(36)}$$

Sollen sich aber die Kräfte das Gleichgewicht halten, so müssen die beiden Beziehungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma(\boldsymbol{H}) &= 0 \\ \Sigma(\boldsymbol{V}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(37)}$$

Beispiele.

55. Die Aufgabe 50 mittels der in diesem Paragraphen angegebenen Methode zu lösen.

Auflösung: Vorhanden sind in horizontaler Richtung die Kräfte $N_1 \sin\alpha_1$ und $N_2 \sin\alpha_2$, in vertikaler Richtung die Kräfte $G, N_1 \cos\alpha_1$ und $N_2 \cos\alpha_2$. — Es muß nun sein

$$N_1 \sin\alpha_1 = N_2 \sin\alpha_2 \text{ und}$$

$$G = N_1 \cos\alpha_1 + N_2 \cos\alpha_2$$

$$N_1 = N_2 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$

$$G = N_2 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \cos\alpha_1 + N_2 \cos\alpha_2$$

$$G = N_2 \frac{\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_1}, \text{ daher}$$

$$\boldsymbol{N_2 = G \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}}$$

$$\boldsymbol{N_1 = G \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}}$$

56. Die Aufgabe 53 ist ebenfalls mittels der an diesem Paragraphen angegebenen Methode zu lösen.

Auflösung: Werden durch den Angriffspunkt der Kräfte zwei aufeinander senkrechte Achsen gelegt, von denen die eine mit P_1 zusammenfallen möge, dann sind vorhanden

a) In horizontaler Richtung die Kräftekomponenten

$$P_1, \ P_2 \cos 83^0, \ P_3 \cos 150^0, \ P_4 \cos 194^0, \ P_5 \cos 317^0$$

Dann wird $\Sigma(H) = P_1 + P_2 \cos 83^0 - P_3 \cos 30^0 - P_4 \cos 14^0 + P_5 \cos 43^0$

$$= 10 + 25 \cdot 0{,}122 - 8 \cdot 0{,}866 - 12 \cdot 0{,}97 + 12{,}5 \cdot 0{,}73$$

$$= 10 + 3{,}05 - 6{,}928 - 11{,}64 + 9{,}125$$

$$\Sigma(H) = 3{,}6 \text{ kg}$$

b) In vertikaler Richtung ist ebenso

$$\Sigma(V) = P_1 \sin 0^0 + P_2 \sin 83^0 + P_3 \sin 150^0 + P_4 \sin 194^0 + P_5 \sin 317^0$$

$$= 0 + 25 \cdot \sin 83^0 + 8 \cdot \sin 30^0 - 12 \sin 14^0 - 12{,}5 \cdot \sin 43^0$$

$$= 0 + 25 \cdot 0{,}993 + 8 \cdot 0{,}5 - 12 \cdot 0{,}242 - 12{,}5 \cdot 0{,}682$$

$$\Sigma(V) = 17{,}35 \text{ kg}$$

$$R = \sqrt{[\Sigma(H)]^2 + [\Sigma(V)]^2} = \sqrt{13 + 302} = \sqrt{315}$$

$$\boldsymbol{R \sim 18 \text{ kg}}$$

Da $\Sigma(H)$ und $\Sigma(V)$ positiv sind, liegt der Winkel (R, P_1) im ersten Quadranten.

$$\cos \alpha = \frac{\Sigma(H)}{R} = \frac{3{,}6}{18} = \frac{0{,}6}{3} \sim 0{,}2$$

$$\boldsymbol{\alpha \sim 79^0}$$

57. Auf einen Punkt wirken die fünf Kräfte $P_1 = 5$ kg, $P_2 = 15$ kg, $P_3 = 12$ kg, $P_4 = 17$ kg und $P_5 = 10$ kg. — Die Kräfte schließen je miteinander den Winkel 60^0 ein. Man ermittle nach der in diesem Paragraphen angegebenen Methode Größe und Richtung der Resultierenden.

Auflösung: Es ist

$$\Sigma(H) = 5 + 15 \cdot \cos 60^0 + 12 \cdot \cos 120^0 + 17 \cdot \cos 180^0 + 10 \cdot \cos 240^0$$

$$= 5 + 15 \cdot 0{,}5 - 12 \cdot \cos 60^0 + 17 \cdot (-1) - 10 \cdot \cos 60^0$$

$$= 5 + 7{,}5 - 22 \cdot 0{,}5 - 17 = 12{,}5 - 28$$

$$\Sigma(H) = -15{,}5 \text{ kg}$$

Ebenso wird

$$\Sigma(V) = 5 \cdot \sin 0^0 + 15 \cdot \sin 60^0 + 12 \cdot \sin 120^0 + 17 \cdot \sin 180^0 + 10 \cdot \sin 240^0$$

$$= 0 + 15 \cdot \sin 60^0 + 12 \sin 60^0 + 17 \cdot 0 - 10 \cdot \sin 60^0$$

$$= 17 \cdot \sin 60^0 = 17 \cdot 0{,}866$$

$$\Sigma(V) = +14{,}7 \text{ kg}$$

Resultierende und ihr Winkel mit P_1 liegen im zweiten Quadranten

$$R = \sqrt{(-15{,}5)^2 + 14{,}7^2} = \sqrt{240 + 216} = \sqrt{456}$$

$$\boldsymbol{R \sim 21{,}6 \text{ kg}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\Sigma(H)}{R} = \frac{-15{,}5}{21{,}6} = -0{,}717$$

$$\alpha = 180^0 - 44^0\,10'$$

$$\boldsymbol{\alpha \sim 135^0\,50'}$$

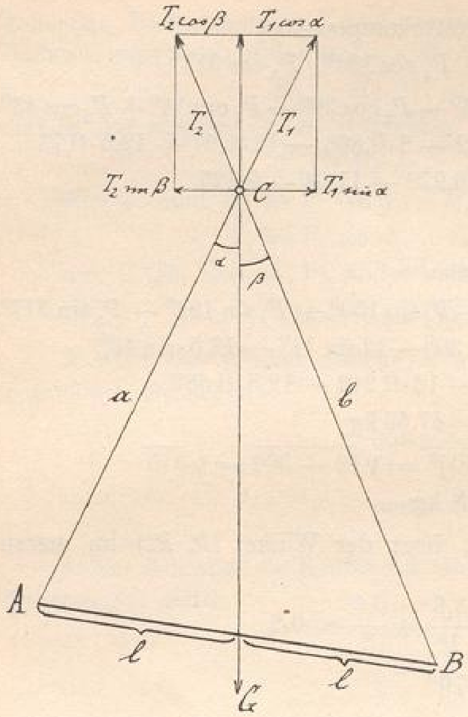

Fig. 29.

58. Ein Stab ist an seinen Enden durch zwei verschieden lange Fäden, die von einem festen Punkte ausgehen und a und b lang sind, aufgehängt. Welche Spannungen sind in den Fäden vorhanden, wenn der Stab die Länge $2l$ und das Gewicht G hat? Fig. 29.

Auflösung:

$\Sigma(H) = 0 \ldots T_1 \sin\alpha = T_2 \sin\beta$

$\Sigma(V) = 0 \ldots G = T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta.$

Da G durch den Schnitt von a und b hindurchgehen muß, damit zwischen T_1, T_2 und G Gleichgewicht bestehe, muß sein

$$a \cdot \sin\alpha = b \cdot \sin\beta, \text{ d. h.}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{b}{a}$$

$$\text{Somit } G = T_1 \cos\alpha + T_1 \cdot \frac{b}{a} \cos\beta$$

$$= T_1 \cdot \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{a}$$

Aus ΔABC ergibt sich .... $a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta) = 4l^2$

Hierzu .... $T_1^2 (a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 = a^2 G^2$

Durch Ausführung der letzteren Gleichungen resultieren

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\cos\beta + 2ab\sin\alpha\sin\beta = 4l^2 \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + 2ab\cos\alpha\cos\beta = \frac{a^2G^2}{T_1^2} \text{ oder}$$

$$a^2 - a^2\sin^2\alpha + b^2 - b^2\sin^2\beta + 2ab\cos\alpha\cos\beta = \frac{a^2G^2}{T_1^2} \quad \ldots (\beta)$$

Werden Gleichungen (α) und (β) addiert, so wird

$$\frac{a^2G^2}{T_1^2} + 4l^2 = 2a^2 + 2b^2 - (a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta)$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - \underbrace{(a\sin\alpha - b\sin\beta)^2}_{\text{Null}}$$

$$a^2G^2 + 4l^2T_1^2 = T_1^2 \cdot (2a^2 + 2b^2), \text{ demnach}$$

$$\boldsymbol{T_1 = \frac{G \cdot a}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4l^2}}} \text{ und } \boldsymbol{T_2 = T_1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{G \cdot b}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4l^2}}}$$