Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 13. Zusammensetzung zweier beliebig gerichteter Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Beispiele 61-62

§ 13. Zusammensetzung zweier beliebig gerichteter Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

In Fig. 34 greifen in den Punkten A und B eines starren Körpers die Kräfte P und Q an. An der Betrachtung wird nichts geändert, wenn man den Angriffspunkt der beiden Kräfte in den Schnittpunkt ihrer Richtungen verlegt.

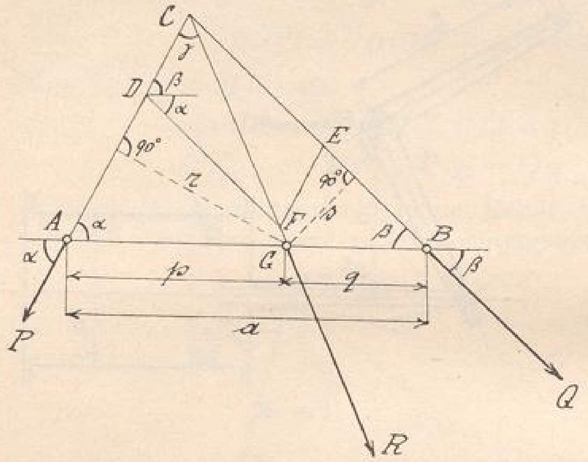

Fig. 34.

Daß sich der Angriffspunkt einer Kraft in irgend einen Punkt ihrer Richtung verlegen läßt, wird einfach und folgendermaßen bewiesen.

Eine Kraft greife im Punkte A eines Körpers an; Fig. 35. — Werden nun im Punkte B, welcher in der Richtung der Kraft K liegt, zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte K hinzugefügt, so ist der Gleichgewichtszustand des Körpers nicht geändert worden. Es heben sich die in A angreifende und die von B aus nach links wirkende Kraft auf, so daß in B nur die rechtswirkende übrigbleibt, welche als von A nach B verlegt seiende aufgefaßt werden kann.

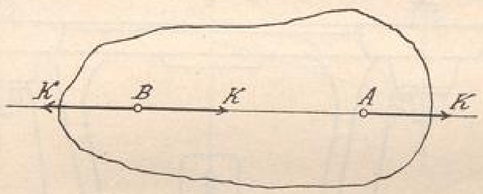

Fig. 35.

Demnach kann in Fig. 34 der Punkt C als gemeinschaftlicher Angriffspunkt der Kräfte P und Q angesehen werden, so daß die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt ist.

Die Größe der Resultierenden ergibt sich aus

$$\boldsymbol{R} = \sqrt{\boldsymbol{P}^2 + \boldsymbol{Q}^2 - 2\,\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}\cos(\alpha+\beta)} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Der Angriffspunkt der Resultierenden kann nun nach G verlegt werden. Die Lage von G ergibt sich aus dem Momentensatz, nach welchem die Summe der Momente der Komponenten gleich sein muß dem Momente der Resultierenden. Es wird somit

$$P \cdot r - Q \cdot s = R \cdot 0, \text{ daraus}$$
$$P \cdot r = Q \cdot s, \text{ d. h.}$$
$$P : Q = s : r.$$

Da laut Figur $r = p \sin\alpha$ und $s = q \sin\beta$ sind, läßt sich auch schreiben

$$P : Q = q \sin\beta : p \sin\alpha \quad \text{oder}$$
$$\frac{P}{\sin\beta} : \frac{Q}{\sin\alpha} = q : p, \quad \text{so daß}$$
$$P \sin\alpha : Q \sin\beta = q : p \quad \text{wird.}$$

Um p und q rechnen zu können, ist nur zu bedenken, daß $p+q=a$ ist. Daher bestimmt sich nach einer kleinen Umformung aus

$$(p+q):p=(P\sin\alpha+Q\sin\beta):Q\sin\beta$$

der Arm p

$$p=\frac{a\cdot Q\sin\beta}{P\sin\alpha+Q\sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42a)$$

Ebenso ergibt sich aus

$$(p+q):q=(P\sin\alpha+Q\sin\beta):P\sin\alpha$$

der Arm q

$$q=\frac{a\cdot P\sin\alpha}{P\cdot\sin\alpha+Q\sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42b)$$

Beispiele.

61. Zwei Kräfte $P=15$ kg und $Q=27$ kg schließen mit den Verlängerungen der Geraden $\overline{AB}$ die Winkel $\alpha=42^0$ und $\beta=48^0$ ein. Man bestimme die Größe der Resultierenden.

Auflösung:
$$R=\sqrt{15^2+27^2-2\cdot15\cdot27\cdot\cos90^0}$$
$$R=\sqrt{225+729}=\sqrt{954}$$
$$\boldsymbol{R\sim 30{,}8\ \text{kg}}$$

62. Zwei Kräfte $P=8$ kg und $Q=12{,}5$ kg greifen an den Endpunkten einer festen, einen Meter langen Stange an und bilden mit den Verlängerungen derselben die Winkel $\alpha=72^0$ und $\beta=40^0$. — Man bestimme die Resultierende R, ferner den Winkel γ zwischen P und R und endlich den Abstand der Angriffspunkte von P und R. — (Bezeichnungen nach Fig. 34.)

Auflösung:
$$R=\sqrt{8^2+12{,}5^2-2\cdot8\cdot12{,}5\cdot\cos120^0}$$
$$R=\sqrt{64+156+200\cdot\cos60^0}$$
$$R=\sqrt{220+100}=\sqrt{320}$$
$$\boldsymbol{R\sim 17{,}9\ \text{kg}}$$

Um den Winkel γ zu finden, wird bestens der Sinussatz angewendet.

$$R:Q=\sin(\alpha+\beta):\sin\gamma$$
$$\sin\gamma=\frac{12{,}5\cdot\sin120^0}{17{,}9}=\frac{12{,}5\cdot0{,}87}{17{,}9}=0{,}605$$
$$\boldsymbol{\gamma=37^0}$$
$$p=\frac{aQ\sin\beta}{P\sin\alpha+Q\sin\beta}$$
$$p=\frac{1\cdot12{,}5\cdot\sin48^0}{8\cdot\sin72^0+12{,}5\cdot\sin48^0}=\frac{12{,}5\cdot0{,}745}{8\cdot0{,}95+12{,}5\cdot0{,}745}$$
$$p=\frac{12{,}5\cdot0{,}745}{7{,}6+12{,}5\cdot0{,}745}=\frac{9{,}3}{16{,}9}$$
$$\boldsymbol{p\sim 0{,}55\ \text{m}}$$