Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 14. Zusammensetzung paralleler und gleichgerichteter Kräfte. Beispiele 63-65

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

§ 14. Zusammensetzung paralleler und gleichgerichteter Kräfte.

In den Endpunkten einer materiell gedachten, starren Linie $\overline{AB}$ oder wie man auch anders sagen kann, in den Punkten A und B eines starren Körpers, greifen zwei parallele und gleich gerichtete Kräfte P und Q an, Fig. 36. Es sind Größe, Richtung und Angriffspunkt der Resultierenden zu bestimmen.

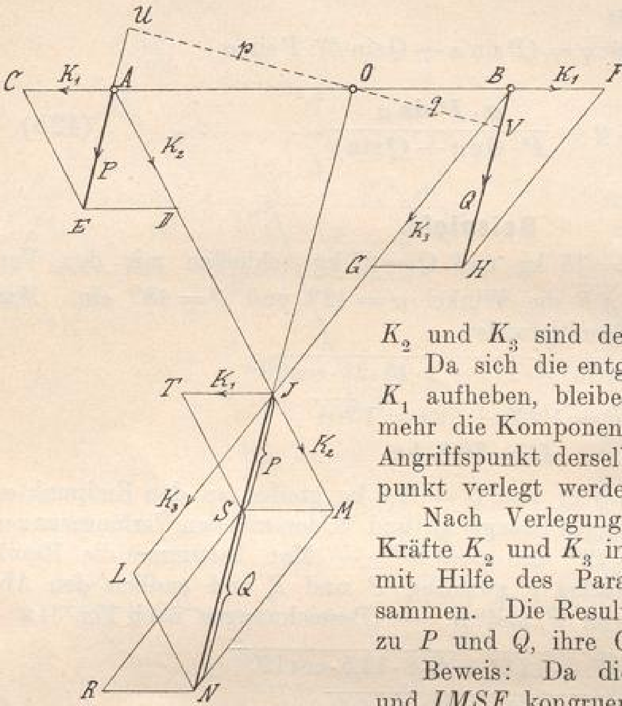

Fig. 36.

Zunächst werden zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte K_1 in A und B hinzugefügt. Diese können als Komponenten von P und Q betrachtet werden. Die andern Komponenten K_2 und K_3 sind demnach auch bestimmt.

Da sich die entgegengesetzt gleichen Kräfte K_1 aufheben, bleiben für die Betrachtung nur mehr die Komponenten K_2 und K_3 übrig. Der Angriffspunkt derselben kann in ihren Schnittpunkt verlegt werden.

Nach Verlegung des Angriffspunktes der Kräfte K_2 und K_3 in Fig. 36 setze man letztere mit Hilfe des Parallelogrammes $IMNL$ zusammen. Die Resultierende IN ist nun parallel zu P und Q, ihre Größe ist $(P+Q)$.

Beweis: Da die Parallelogramme $ACED$ und $IMSF$ kongruent sind, ist zunächst

$$\overline{IS} \# \overline{AE} \# P$$

Werden $\overline{SR}$ und $\overline{MN}$ parallel und gleich $\overline{BG} = K_3$ gemacht, so sind auch die Parallelogramme $SMRN$ und $BFGH$ kongruent, daher

$$\overline{SN} \# \overline{BH} \# Q$$

Nun ist $\overline{IN} = \overline{SI} + \overline{SN}$ die Resultierende R, also ist

$$\boldsymbol{R = P + Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

„Die Resultierende paralleler und gleichgerichteter Kräfte ist parallel zu letzteren und ihre Größe ist gleich der Summe derselben."

Der Angriffspunkt der Resultierenden kann nun nach O verlegt werden.

Die Lage derselben ist zunächst bestimmt durch die Werte von p und q. Für den Fall des Gleichgewichtes muß nach dem Momentensatz sein

$$P \cdot p = Q \cdot q \text{ oder}$$
$$P : Q = q : p$$

Nun sind die Dreiecke AOU und BOV ähnliche, daher ergibt sich

$$q : p = \overline{BO} : \overline{AO}, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{P : Q = \overline{BO} : \overline{AO}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44a)$$

„Die Kräfte verhalten sich verkehrt wie die Entfernungen ihrer Angriffspunkte von dem Angriffspunkte der Resultierenden."

„Der Angriffspunkt der Resultierenden liegt der größern Kraft näher."

Beweis: Aus . . . . $P : Q = \overline{BO} : \overline{AO}$ ist

$$P : (P + Q) = BO : (BO + AO), \text{ d. h.}$$

$$\overline{BO} = \frac{P}{R} \cdot \overline{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44\,b)$$

Ebenso ergibt sich durch ähnliche Folgerung

$$\overline{AO} = \frac{Q}{R} \cdot \overline{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44\,c)$$

Wenn nun $Q > P$ ist, so ist auch $\overline{AO} > \overline{BO}$ oder $\overline{BO} < \overline{AO}$, d. h. O liegt Q näher als P.

Sind drei parallele, gleichgerichtete Kräfte vorhanden, so setze man erst zwei zusammen, dann diese Resultierende mit der dritten Kraft. Es wird die Größe der Totalresultierenden gleich der Summe der Größen der gegebenen Kräfte.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes der Resultierenden mehrerer parallelen und gleichgerichteten Kräfte wird der Momentensatz angewendet.

Beispiele.

63) Zwei parallele Kräfte greifen in den Endpunkten einer 1,2 m langen Stange an. Ihre Größen sind 12 kg und 18 kg. Wie groß ist die Resultierende und welchen Abstand hat ihr Angriffspunkt von den Endpunkten der Stange?

Auflösung: $R = 12\text{ kg} + 18\text{ kg}$

$$\boldsymbol{R = 30\text{ kg}}$$

Der Abstand des Angriffspunktes der Resultierenden von dem der Kraft 12 kg beträgt

$$\overline{AO} = \frac{18}{30} \cdot 1{,}2 = \frac{3 \cdot 1{,}2}{5} = \frac{3{,}6}{5}$$

$$\boldsymbol{\overline{AO} = 0{,}72\text{ m}}$$

$$\text{Ebenso } \overline{BO} = \frac{12}{30} \cdot 1{,}2 = \frac{6 \cdot 1{,}2}{15} = \frac{7{,}2}{15} = \frac{2{,}4}{5}$$

$$\boldsymbol{\overline{BO} = 0{,}48\text{ m}}$$

$$\overline{AO} + \overline{BO} = 1{,}2\text{ m (stimmt)}$$

64. Es soll eine möglichst einfache Konstruktion für den Mittelpunkt zweier paralleler Kräfte P und Q gefunden werden.

Auflösung: Man mache in Fig. 37 $\overline{AE} = Q$ und $\overline{BF} = P$. Sodann verbinde man E mit F. Die Gerade EF schneidet AB im gesuchten Mittelpunkt O der Kräfte. Der Beweis ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEO und BFO.

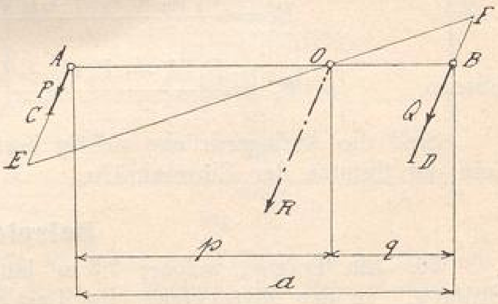

Fig. 37.

65. Für die in Fig. 38 gegebenen Kräfte den Mittelpunkt O zu finden.

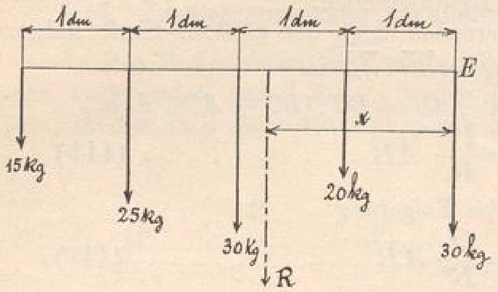

Fig. 38.

Auflösung: Laut Momentensatz gilt in bezug auf den Drehpunkt E

$$15 \cdot 4 + 25 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 1 \; R \cdot x$$

$$R = 120 \text{ kg}$$

$$x = \frac{60 + 75 + 60 + 20}{120}$$

$$x = \frac{215}{120} = \frac{43}{24}$$

$$\boldsymbol{x = 1{,}79 \text{ dm}}$$

§ 15. Ermittlung von Auflagerdrücken.

Befindet sich ein belasteter Träger auf zwei Stützen, so werden dieselben gewisse Drücke, welche **Stützdrücke** heißen, aufzunehmen haben. Statt der Stützen kann man sich nun in A und B, Fig. 39, zwei Kräfte R_1 und R_2

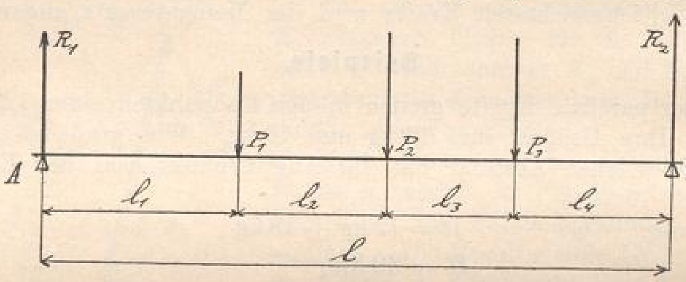

Fig. 39.

nach aufwärts angebracht denken, so daß der Träger in seiner Lage verbleibt. Diese letzteren Drücke heißen **Auflagerdrücke**. Sie können aufgefaßt werden als Resultierende aller vorhandenen Einzelnkräfte, so daß sie mit Hilfe des Momentensatzes leicht zu ermitteln sind. Um den Auflagerdruck R_1 zu finden, nimmt man den Punkt B als Drehpunkt an, um R_2 zu bestimmen, stellt man die Momentengleichung in bezug auf den Punkt A auf, weil sich dann Beziehungen ergeben, die nur je eine Unbekannte enthalten.

$$R_1 \cdot l = P_1 (l_2 + l_3 + l_4) + P_2 (l_3 + l_4) + P_3 \cdot l_4$$

$$R_1 = \frac{P_1 (l_2 + l_3 + l_4) + P_2 (l_3 + l_4) + P_3 l_4}{l}$$

ebenso

$$R_2 = \frac{P_1 \cdot l_1 + P_2 (l_1 + l_2) + P_3 (l_1 + l_2 + l_3}{l}$$

Sind die Auflagerdrücke richtig bestimmt, dann muß ihre Summe gleich sein der Summe der Einzelnkräfte.

Beispiele.

66. Ein Träger, welcher 1,5 m lang ist, liegt mit beiden Enden auf Stützen. In der Mitte greift eine Last von 25 kg, 0,3 m vom rechten Ende eine Last von 45 kg an. Wie groß sind die Auflagerdrücke?