Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

A. Allgemeines über Planmomente, Axialmomente und Polarmomente zweiter Ordnung.

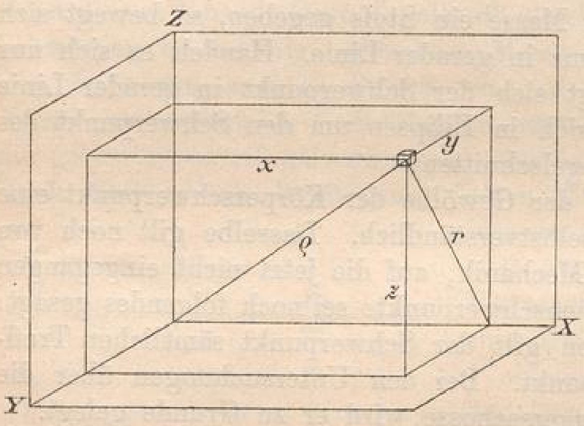
Abschnitt IX.

Die Trägheits- und Centrifugal-Momente der wichtigsten Körper.

A. Allgemeines.

334) Während der vorige Abschnitt die polaren, die axialen und die Plan-Momente erster Ordnung behandelte, sollen hier die entsprechenden Momente zweiter Ordnung abgeleitet werden. Die für die Mechanik wichtigsten sind, wie sich zeigen wird, die axialen, während die Planmomente zur Berechnung der ersteren verwendet werden können.

Fig 249.



335) Begriff des Planmomentes zweiter Ordnung.

Ist m ein kleines Körperteilchen (in der Mechanik ein Massenteilchen), welches von den Koordinatenebenen die Abstände x, y, z hat, so nennt man mx^2, my^2, mz^2 die Planmomente zweiter Ordnung des Massenteilchens in Bezug auf die entsprechenden Koordinatenebenen, die als die Ebene YZ, ZX und XY bezeichnet werden mögen. Handelt es sich um einen Körper, so ist sein Trägheitsmoment eine Summe solcher Ausdrücke, also

$$T_{yz} = \sum mx^2, \quad T_{zx} = \sum my^2, \quad T_{xy} = \sum mz^2.$$

Dabei beziehen sich die Marken der T auf die Ebenen. Die T sind die Planmomente zweiter Ordnung oder die Trägheitsmomente in Bezug auf die drei Grundebenen des Koordinatensystems.

336) Begriff des Axialmomentes zweiter Ordnung.

Ist r der Abstand eines Körperteilchens m von der X-Achse, so ist mr^2 das Axialmoment zweiter Ordnung oder das axiale Trägheitsmoment des Teilchens in Bezug auf diese Achse. Für den ganzen Körper ist

$$T_x = \sum mr^2$$

das axiale Trägheitsmoment oder das Axialmoment zweiter Ordnung für diese Achse.

Da $r^2 = y^2 + z^2$ ist, so folgt $mr^2 = my^2 + mz^2$, also auch

$$\sum mr^2 = \sum my^2 + \sum mz^2,$$

oder

$$T_x = T_{zx} + T_{xy},$$

ebenso ist

$$T_y = T_{xy} + T_{yz}, \quad T_z = T_{yz} + T_{zx}.$$

Also:

Jedes axiale Trägheitsmoment ist gleich der Summe zweier Planmomente zweiter Ordnung in Bezug auf Ebenen, die sich in der Achse des ersten Momentes rechtwinklig schneiden.

337) Begriff des Polarmomentes zweiter Ordnung.

Ist ϱ der Abstand des Körperteilchens m vom Nullpunkte des Koordinatensystems, so ist $m\varrho^2$ sein Polarmoment zweiter Ordnung in Bezug auf diesen Punkt. Für den ganzen Körper ist

$$T_p = \sum m\varrho^2$$

das polare Trägheitsmoment oder das Polarmoment zweiter Ordnung in Bezug auf jenen Punkt.

Nun ist aber $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, folglich auch

$$m\varrho^2 = mx^2 + my^2 + mz^2,$$

ebenso

$$\sum m\varrho^2 = \sum mx^2 + \sum my^2 + \sum mz^2,$$

also

$$T_p = T_{yz} + T_{zx} + T_{xy}.$$

Folglich:

Jedes Polarmoment zweiter Ordnung ist die Summe von drei Planmomenten, deren Ebenen durch den Pol des ersten Momentes gehen und dabei auf einander senkrecht stehen.

Natürlich ist auch

$$T_p = T_{yz} + T_x = T_{zx} + T_y = T_{xz} + T_z,$$

was auch leicht in Worte zu kleiden ist.

338) Verschiebungssatz für das Planmoment zweiter Ordnung.

Handelt es sich um das Planmoment $T_s = \sum mx^2$, wobei die Ebene YZ durch den Schwerpunkt des Körpers gehen soll, und verschiebt man die Ebene parallel zu sich selbst um $\pm e$, so geht der Abstand x über in $x \mp e$, also wird das neue Trägheitsmoment

$$T_1 = \sum m\,(x \mp e)^2 = \sum mx^2 + \sum me^2 \mp \sum 2mex,$$

oder in

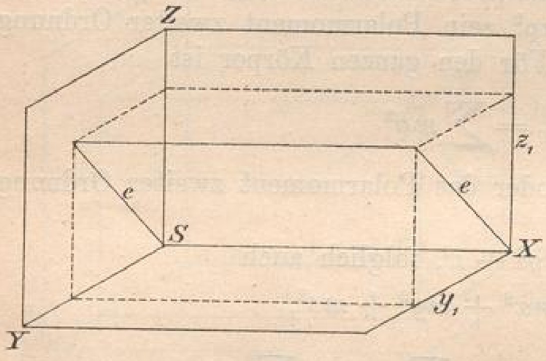
$$T_1 = \sum mx^2 + e^2 \sum m \mp 2e \sum mx.$$

Hier ist $\sum mx^2$ das ursprüngliche Trägheitsmoment T_s, $e^2 \sum m = e^2 J$ das Produkt aus dem Körperinhalte und dem Quadrate der Verschiebungstrecke, $\sum mx$ das statische Moment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende YZ-Ebene, also gleich Null, so dafs man hat

$$T_1 = T_s + e^2 J.$$

Folglich gilt der Satz: Verschiebt man die Ebene des Trägheitsmomentes aus der Schwerpunktslage um $\pm e$, so wächst es um $e^2 J$, d. h. um das Produkt aus dem Körperinhalte und dem Quadrate der Verschiebungsstrecke.

Fig. 250.



339) Verschiebungssatz für das axiale Trägheitsmoment.

Ist T_s das axiale Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, z. B. die X-Achse in Fig. 250 und verschiebt man die Achse um $+e$, so verwandeln sich die Koordinaten y und z in $(y - y_1)$ und $(z - z_1)$, und

$$T_s = \sum my^2 + \sum mz^2 = T_{zx} + T_{xy}$$

geht über in

$$T_1 = \sum m\,(y - y_1)^2 + \sum m\,(z - z_1)^2$$

oder in

$$T_1 = \sum my^2 + \sum my_1^2 - \sum 2myy_1 + \sum mz^2 + \sum mz_1^2 - \sum 2mzz_1.$$

Wie im vorigen Abschnitte wird $\sum 2myy_1 = 0$ und $\sum 2mzz_1 = 0$, dagegen

$$\sum my_1^2 = y_1^2 \sum m = y_1^2 J \quad \text{und} \quad \sum mz_1^2 = z_1^2 \sum m = z_1^2 J.$$

Man erhält also

$$T_1 = T_{zx} + y_1^2 J + T_{xy} + z_1^2 J = (T_{zx} + T_{xy}) + J(y_1^2 + z_1^2) = T_s + Je^2.$$

Folglich gilt der Satz: Verschiebt man die Achse eines Trägheitsmomentes aus der Schwerpunktslage um e, so wächst das Trägheitsmoment um das Produkt aus dem Inhalte und dem Quadrate der Verschiebungsstrecke.

340) Der Satz $T_1 = T_s + e^2 J$ gilt auch vom Polarmomente zweiter Ordnung. Der Beweis ergiebt sich ebenso, wie vorher aus

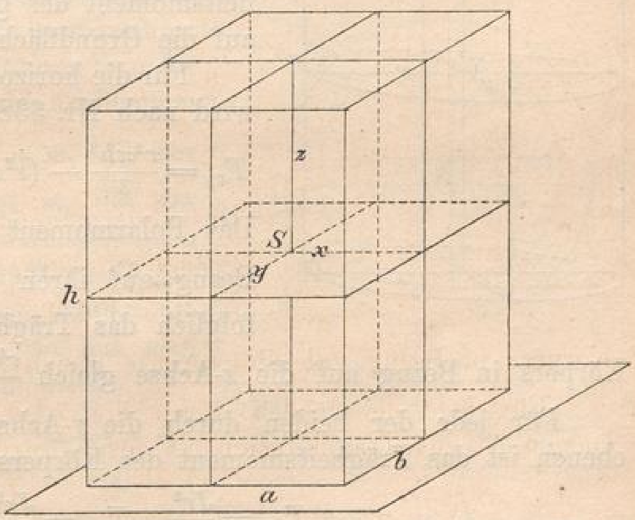
$$T_1 = \sum m(x - x_1)^2 + \sum m(y - y_1)^2 + \sum m(z - z_1)^2,$$

was sich auf $T_s + e^2 J$ reduziert.

B. Die einfachsten Formen, besonders von der Ordnung Null.

341) **Aufgabe.** Die wichtigsten Trägheitsmomente des Rechteckskörpers zu berechnen.

Fig. 251.



Auflösung. Sind a, b und c die drei Kanten, so hat in Fig. 251 jeder Horizontalschnitt die Fläche ab und in Bezug auf die Grundfläche, wenn y der Abstand ist, das Trägheitsmoment aby^2. Dies giebt, wenn man die Schichtenformel anwendet, für den ganzen Körper das Planmoment $ba\frac{c^3}{3}$ oder $J\frac{c^2}{3}$.

Für die parallele Schwerpunktsebene wird nach Nr. 338

$$T_s = J\frac{c^2}{3} - J\left(\frac{c}{2}\right)^2 = J\frac{c^2}{12} = \frac{abc^3}{12}.$$