Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

B. Die einfachsten Formen, besonders von der Ordnung Null.

Wie im vorigen Abschnitte wird $\sum 2myy_1 = 0$ und $\sum 2mzz_1 = 0$, dagegen

$$\sum my_1^2 = y_1^2 \sum m = y_1^2 J \quad \text{und} \quad \sum mz_1^2 = z_1^2 \sum m = z_1^2 J.$$

Man erhält also

$$T_1 = T_{zx} + y_1^2 J + T_{xy} + z_1^2 J = (T_{zx} + T_{xy}) + J(y_1^2 + z_1^2) = T_s + Je^2.$$

Folglich gilt der Satz: Verschiebt man die Achse eines Trägheitsmomentes aus der Schwerpunktslage um e, so wächst das Trägheitsmoment um das Produkt aus dem Inhalte und dem Quadrate der Verschiebungsstrecke.

340) Der Satz $T_1 = T_s + e^2 J$ gilt auch vom Polarmomente zweiter Ordnung. Der Beweis ergiebt sich ebenso, wie vorher aus

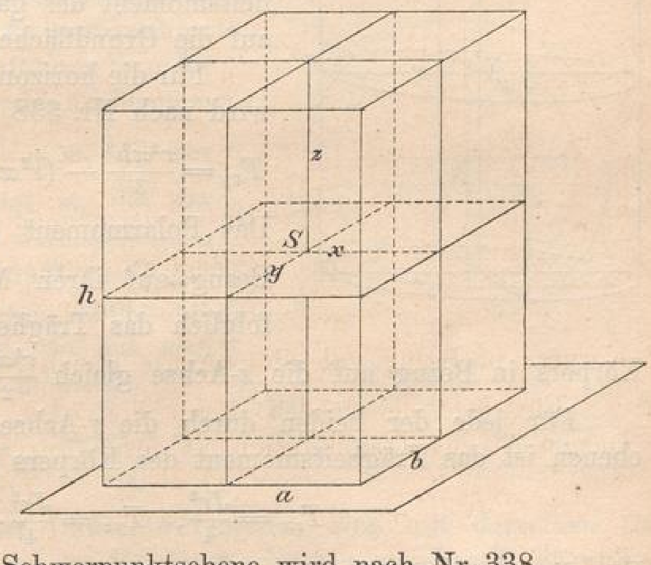
$$T_1 = \sum m(x - x_1)^2 + \sum m(y - y_1)^2 + \sum m(z - z_1)^2,$$

was sich auf $T_s + e^2 J$ reduziert.

B. Die einfachsten Formen, besonders von der Ordnung Null.

341) **Aufgabe.** Die wichtigsten Trägheitsmomente des Rechteckskörpers zu berechnen.

Fig. 251.



Auflösung. Sind a, b und c die drei Kanten, so hat in Fig. 251 jeder Horizontalschnitt die Fläche ab und in Bezug auf die Grundfläche, wenn y der Abstand ist, das Trägheitsmoment aby^2. Dies giebt, wenn man die Schichtenformel anwendet, für den ganzen Körper das Planmoment $ba\frac{c^3}{3}$ oder $J\frac{c^2}{3}$.

Für die parallele Schwerpunktsebene wird nach Nr. 338

$$T_s = J\frac{c^2}{3} - J\left(\frac{c}{2}\right)^2 = J\frac{c^2}{12} = \frac{abc^3}{12}.$$

In Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenebenen ist also

$$T_{xy} = \frac{abc^3}{12}, \quad T_{yz} = \frac{bca^3}{12}, \quad T_{zx} = \frac{cab^3}{12}.$$

Die Axialmomente für die durch S gehenden Koordinatenachsen werden

$$T_x = T_{zx} + T_{xy} = \frac{cab^3}{12} + \frac{abc^3}{12} = \frac{abc}{12}(b^2 + c^2) = \frac{J}{12}(b^2 + c^2),$$

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{abc^3}{12} + \frac{bca^3}{12} = \frac{abc}{12}(c^2 + a^2) = \frac{J}{12}(c^2 + a^2),$$

$$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \frac{bca^3}{12} + \frac{cab^3}{12} = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2) = \frac{J}{12}(a^2 + b^2).$$

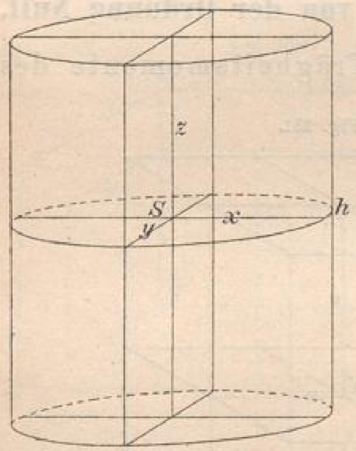
Das Polarmoment für den Schwerpunkt wird

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{J}{12}d^2,$$

wo d die Hauptdiagonale ist.

324) **Aufgabe.** Die wichtigsten Trägheitsmomente für den Kreiscylinder zu berechnen.

Fig. 252.



In Fig. 252 ist jeder Horizontalschnitt gleich $r^2\pi$, sein Trägheitsmoment beim Abstande y von der Grundfläche ist in Bezug auf diese gleich $r^2\pi y^2$. Nach der Schichtenformel ergiebt sich $\frac{r^2\pi h^3}{3} = \frac{Jh^2}{3}$ als Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die Grundfläche.

Für die horizontale Schwerpunktsebene wird nach Nr. 338

$$T_{xy} = \frac{r^2\pi h^3}{3} - (r^2\pi h)\left(\frac{h^2}{2}\right) = \frac{r^2\pi h^3}{12} = \frac{Jh^2}{12}.$$

Das Polarmoment der Grundfläche ist in Bezug auf ihren Mittelpunkt gleich $\frac{r^4\pi}{2}$, folglich das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die z-Achse gleich $\frac{r^4\pi h}{2} = \frac{Jr^2}{2} = T_z$.

Für jede der beiden durch die z-Achse gelegten Koordinatenebenen ist das Trägheitsmoment des Körpers halb so grofs, also

$$T_{zx} = \frac{Jr^2}{4}, \quad T_{yz} = \frac{Jr^2}{4}.$$

Für die durch S gehende x-Achse ist

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \frac{Jr^2}{4} + \frac{Jh^2}{12} = \frac{J}{12}(3r^2 + h^2),$$

für die y-Achse durch S ist ebenso

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{4} = \frac{J}{12}(3r^2 + h^2).$$

Das Polarmoment zweiter Ordnung für S ist

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{4} + \frac{Jr^2}{4} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{2} = \frac{J}{12}(h^2 + 6r^2).$$

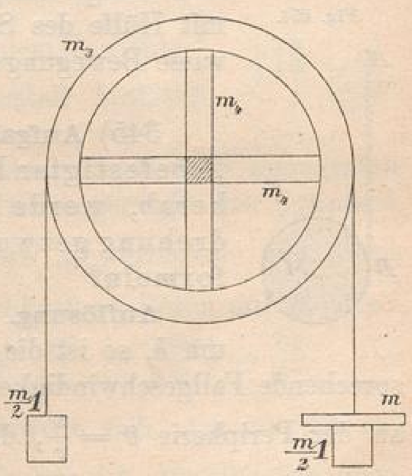
Mechanische Aufgaben über den Cylinder siehe unter Nr. 84, 86, 89, 93, 94, 96 bis 106, wo es sich um Säulen, Achsen und Triebwellen, um schwingende Pendel u. dgl. handelt.

343) Das wichtigste Axialmoment des Hohlcylinders mit den Radien r und r_1.

Für den Kreisring ist das polare Trägheitsmoment $\frac{r^4\pi}{2} - \frac{r_1^4\pi}{2}$ $= \frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^2((r^2 + r_1^2) = \frac{F}{2}(r^2 + r_1^2)$, das entsprechende Axialmoment des Cylinders ist also $\frac{Fh}{2}(r^2 + r_1^2) = \frac{J}{2}(r^2 + r_1^2)$. In der Mechanik ist statt J die Masse $m = \frac{p}{g}$ einzusetzen, wo p in Kilogrammen, $g = 9{,}81$ in Metern gegeben werden kann. (Besser ist es, mit Tonnen und Metern zu rechnen.)

Hierzu vergleiche man die Aufgaben unter 86, 88, 90 über hohle Achsen, Hohlsäulen, Schleif- oder Mühlsteine und Schwungringe.

Fig. 253.



344) Das Gegebene reicht auch hin, in die Theorie der Atwoodschen Fallmaschine einzuführen.*) Ist nämlich m die Masse des treibenden Übergewichtes, $2\left(\frac{m_1}{2}\right) = m_1$ die der beiden Schleppgewichte, m_3 die des Ringes, m_4 die jedes durchgehenden Radarmes, wobei der schraffierte Körper doppelt genommen ist, wofür die Achse weggelassen ist, so hat man als gesamtes Trägheitsmoment

$$(m + m_1)r^2 + 2 \cdot \frac{m_4 d_1^2}{12} + \frac{m_3(r^2 + r_1^2)}{2},$$

denn die aufgehängten Gewichte bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit, als ob sie am Rande des Kreises angebracht wären, so

*) Dieses und die folgenden Beispiele aus der Dynamik können auch an Nr. 43 angeschlossen werden.

dafs der Widerstand durch $(m + m_1) r^2$ dargestellt ist. Für obiges kann man schreiben

$$T = (m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2},$$

denn die Flächendiagonale d_1 des Rechtecks ist gleich $2 r_1$. Das statische Moment der Triebkraft ist $p = mg$. Die Beschleunigung am Radius 1 wird nach der Mechanik

$$\gamma = \frac{\text{stat. Moment der Triebkraft}}{\text{gesamtes Trägheitsmoment}} = g \frac{mr}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

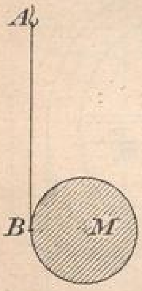
Die Beschleunigung am Radius r ist r-mal so grofs, also hat das treibende Übergewicht die Beschleunigung

$$g_1 = g \frac{mr^2}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

Die Fallbewegung des Übergewichtes geschieht nach den Formeln $v = g_1 t$, $h = \frac{1}{2} g_1 t^2$, $v = \sqrt{2 g_1 h}$. Die Fadenspannung des rechts hängenden Fadens ist $\left(m + \frac{m_1}{2}\right)(g - g_1)$, die des links hängenden $\frac{m_1}{2}(g + g_1)$, die Reibung hat die Differenz beider Spannungen zu überwinden, wenn kein Gleiten stattfinden soll.

Einige Beispiele werden zeigen, wie leicht sich jetzt mit Hülfe des Satzes von der Erhaltung der Arbeit gewisse Bewegungsprobleme ansetzen lassen.

Fig. 254.



345) **Aufgabe.** Ein Cylinder, um den ein bei A befestigter Faden gewickelt ist, falle senkrecht herab, werde aber durch den Faden zur Umdrehung gezwungen. Welches sind die Bewegungsformeln?

Auflösung. Ist sein Gewicht p, und senkt er sich um h, so ist die Arbeit der Schwerkraft ph. Ist die entsprechende Fallgeschwindigkeit v, so ist die Drehungsgeschwindigkeit an der Peripherie $\vartheta = \frac{v}{r}$, die Arbeitswucht (Energie) also

$$A = \frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4} mv^2.$$

Ebenso grofs mufs die geleistete Arbeit ph oder mgh sein. Aus $mgh = \frac{3}{4} mv^2$ folgt $v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = \sqrt{2\left(\frac{2}{3} g\right) h}$, während die entsprechende Formel beim freiem Falle lautet $\sqrt{2gh}$. An Stelle von g tritt also hier $^2/_3 g$, die drei Fallformeln sind demnach hier

$$v = \tfrac{2}{3} g t, \quad h = \tfrac{1}{2} \tfrac{2}{3} g t^2 = \frac{g t^2}{3}, \quad v = \sqrt{2 \left(\tfrac{2}{3} g\right) h}.$$

Durch den Drehungszwang wird also die Fallgeschwindigkeit für jeden Zeitpunkt auf $^2/_3$ der freien Fallgeschwindigkeit herabgesetzt.

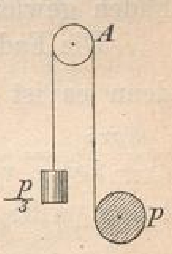
Wie grofs ist die Fadenspannung bei diesem Beispiele? Es ist $g - g_1 = g - \frac{2}{3} g = \frac{g}{3}$, die Spannung also $m \frac{g}{3} = \frac{p}{3}$. Oder wenn man den Vorgang eingehender analysieren will: Die Fadenspannung ist die Kraft, welche die Drehung hervorruft. Die Beschleunigung der letzteren ist am Rande $\frac{2}{3} g$, am Radius 1 also $\gamma = \frac{2g}{3r}$. Gleichzeitig ist aber

$$\gamma = \frac{\text{Moment der Kraft}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{p_1 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2 p_1}{mr},$$

wo p_1 die drehende Kraft ist. Es folgt $\frac{2 p_1}{mr} = \frac{2g}{3r}$, d. h. $p_1 = \frac{mg}{3} = \frac{p}{3}$.

Die Fadenspannung beträgt also nur den dritten Teil des Cylindergewichtes. Dieses Resultat soll später zur Aufklärung über gewisse Reibungsverhältnisse benutzt werden. Statt den Faden bei A zu befestigen, kann man ihn dort über eine leicht bewegliche Rolle legen und durch das Gewicht $\frac{p}{3}$ anspannen. Der am Faden herabrollende Cylinder p hält dann dem Gewichte $\frac{p}{3}$ das Gleichgewicht, wie leicht experimentell bestätigt werden kann.

Fig. 255.



Gewöhnlich wird die behandelte Aufgabe anders angegriffen. Man betrachtet B als augenblicklichen Drehungspunkt des Cylinders, so dafs das Trägheitsmoment $\frac{mr^2}{2}$ um mr^2 zu vermehren und gleich $\frac{3}{2} mr^2$ zu setzen ist. Das Moment der Triebkraft in Bezug auf B ist pr, also ist die Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{pr}{\frac{3}{2} mr^2} = \frac{2mgr}{3mr^2} = \frac{2g}{3r}$. Der Punkt M befindet sich am Radius r, bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $g_1 = \frac{2g}{3r} r = \frac{2}{3} g$. Das Resultat ist dasselbe wie oben.

346) Noch stärker läfst sich der Fall verlangsamen, wenn der Faden nicht um die Scheibe oder den Cylinder, sondern um eine Achse mit dem kleineren Radius ϱ gewunden wird. (Vgl. Nr. 93.)

Ist die Fallgeschwindigkeit v, so ist jetzt die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = \frac{v}{\varrho}$. Vernachlässigt man das Gewicht der Achse, welches einzurechnen übrigens keine Schwierigkeiten macht, so wird die Arbeitswucht

$$A = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{r^2 + 2\varrho^2}{2\varrho^2}.$$

Setzt man dies gleich der Arbeit ph der Schwerkraft, d. h. $= mgh$, so folgt

$$v = \sqrt{2\left(g\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}\right)h}.$$

An Stelle von g in der Freifallformel $v = \sqrt{2gh}$ tritt also

$$g_1 = g \cdot \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

was als Beschleunigung in die drei Bewegungsformeln einzuführen ist. Macht man z. B. $r = 10\varrho$, so wird $g_1 = g\frac{2\varrho^2}{100\varrho^2 + 2\varrho^2} = \frac{g}{51}$. Die Fallgeschwindigkeit wird also der 51. Teil der Freifallgeschwindigkeit. (Entsprechende Versuche über Unterrichtszwecke lassen sich mit dem Rade der Atwoodschen Fallmaschine machen, um deren Achse man Fäden gewickelt hat.)

Die Fadenspannung wird hier gröfser als bei der vorigen Aufgabe, denn es ist $g - g_1 = g - g\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{gr^2}{r^2 + 2\varrho^2}$, also die Spannung $\frac{mgr^2}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{pr^2}{r^2 + 2\varrho^2}$. Oder, wenn man die obige Betrachtung wiederholen will: Aus $g_1 = g\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}$ folgt als Winkelbeschleunigung (am Radius 1) $\gamma = \frac{g_1}{\varrho} = \frac{2gr}{r^2 + 2\varrho^2}$. Dieselbe Winkelbeschleunigung wird durch die Fadenspannung p_1 hervorgerufen, so dafs auch

$$\gamma = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{p_1\varrho}{\frac{mr^2}{2}}$$

ist. Aus der Gleichsetzung der rechten Seiten ergiebt sich die Fadenspannung

$$p_1 = \frac{mgr^2}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{pr^2}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

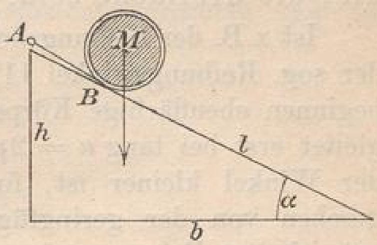
Ist z. B. $r = 10\varrho$, so folgt $p_1 = \frac{50}{51}p$, wo p das Cylindergewicht ist.

Man bemerkt, dafs bei der Herabsetzung der Freifallbeschleunigung von g auf $\frac{1}{51}g$ die Fadenspannung um $\frac{1}{51}$ des Gewichtes vermindert wird. Dies bestätigt die obige Bemerkung über den Ausdruck $m(g - g_1)$.

Der Grund, weshalb wir auf die Fadenspannung überhaupt eingingen, wird sich aus der folgenden Aufgabe ergeben.

347) Der Cylinder ist wiederum mit einem Faden umwickelt. Das Ende desselben sei aber bei A an der schiefen Ebene mit Neigung α befestigt, auf welcher der Cylinder herabrollen soll. Beschleunigung und Fadenspannung sollen berechnet werden, ohne daſs die Reibung berücksichtigt wird.

Fig. 256.



Beim senkrechten Fall ergab sich unter Drehungszwang $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3} g\right) h}$. Man braucht nur $l \sin \alpha$ für h zu setzen, um hier $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3} g\right) l \sin \alpha}$ zu finden, so daſs an Stelle von $g_1 = \frac{2}{3} g$ jetzt $g_1 = \frac{2}{3} g \sin \alpha$ als Beschleunigung tritt. Man kann aber auch so, wie vorher, die Gleichung der Erhaltung der Arbeit benutzen, oder auch B als Drehungspunkt betrachten. Das statische Moment der Schwerkraft in Bezug auf B ist dann $pr \sin \alpha$, das Trägheitsmoment aber $\frac{mr^2}{3} + mr^2 = \frac{2}{3} mr^2$. Es folgt die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{pr \sin \alpha}{\frac{3}{2} mr^2} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{r},$$

also für M, d. h. für den Radius r, das r-fache oder $g_1 = \frac{2}{3} g \sin \alpha$.

Die Drehung wird, wenn keine Reibung vorhanden ist, durch die Fadenspannung p_1 hervorgerufen, so daſs auch ist: $\gamma = \frac{p_1 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2 p_1}{mr}$. Gleichsetzung beider Ausdrücke für γ giebt

$$p_1 = \frac{mg \sin \alpha}{3} = \frac{p \sin \alpha}{3}.$$

348) Diese Fadenspannung giebt uns an, wie groſs die Reibung mindestens sein muſs, um das Herabgleiten zu verhindern und die Cylinderbewegung zu einer rein rollenden zu machen.

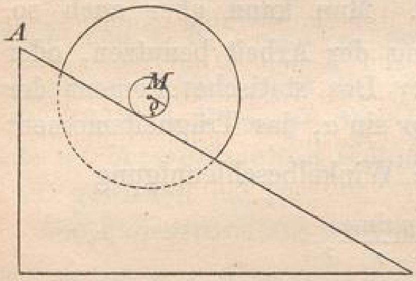
Ist also der Reibungskoeffizient für Gleitung μ, die Reibung selbst also hier $\mu p \cos \alpha$, so ist im vorliegenden Falle $\mu p \cos \alpha = \frac{p \sin \alpha}{3}$, d. h.

$$\mu = \frac{1}{3} \operatorname{tang} \alpha.$$

Bei den gleitenden Körpern ist bekanntlich der Koeffizient $\mu = \operatorname{tang} \alpha$; man hat also für den rollenden Cylinder das bemerkenswerte Resultat, dafs sein Gleiten schon durch den dritten Teil derjenigen Reibung verhindert wird, die einen nicht rollenden Körper vom Gleiten abhält. Mit anderen Worten: Bei nicht rollenden Körpern findet das Gleiten bereits statt bei tang $\alpha \leqq \mu$, bei dem rollenden Cylinder erst bei tang $\alpha \geqq 3\mu$. Die Steigung der schiefen Ebene darf also hier die dreifache sein, ohne dafs Gleitung stattfindet.*)

Ist z. B. der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}2$, so folgt aus tang $\alpha = 0{,}2$ der sog. Reibungswinkel $11^0\,18'\,40''$. Sobald die Neigung gröfser ist, beginnen ebenflächige Körper zu gleiten. Der rollende Cylinder aber gleitet erst bei tang $\alpha = 2\mu = 0{,}6$, d. h. bei $\alpha = 30^0\,57'\,50''$. Sobald der Winkel kleiner ist, findet lediglich ein Rollen statt, und abgesehen von der geringfügigen rollenden Reibung gelten die oben entwickelten Bewegungsformeln. Ist dagegen die Neigung gröfser, so findet Rollen und Gleiten zugleich statt. Dies ist ein ganz anderer Fall mit besonderen Bewegungsgleichungen. Später soll auf diesen schwierigen Fall noch eingegangen werden.

Fig. 257.



349) Das obige Resultat ändert sich sofort, wenn der Cylinder unter Auflagerung auf eine Achse auf der schiefen Ebene herabrollt.

Zunächst werde hier wiederum die Reibung weggedacht, dafür aber ein Faden, der bei A befestigt ist, um die Achse gewunden. Nach Art der obigen Entwicklung erhält man als Beschleunigung des Punktes M

$$g_1 = g \sin\alpha \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

als Winkelbeschleunigung (am Radius 1) also

$$\gamma = \frac{g_1}{\varrho} = \frac{2g\sin\alpha\,\varrho}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

Die Fadenspannung p_1 am Radius ϱ giebt aber für dasselbe γ den Wert

$$\gamma = \frac{p_1\varrho}{\frac{m r^2}{2}} = \frac{2p_1\varrho}{m r^2}.$$

*) In mehreren Lehrbüchern und Abhandlungen finden sich in dieser Beziehung irrtümliche Ableitungen, die auf der falschen Annahme fufsen, dafs der Reibungswinkel derselbe bliebe.

Aus der Gleichsetzung beider Werte ergiebt sich als Fadenspannung

$$p_1 = \frac{m g r^2 \sin\alpha}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{p \sin\alpha r^2}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

Ist z. B. $r = 10\varrho$, so wird $p_1 = p \sin\alpha \frac{50}{51}$. Ebenso grofs mufs die gleitende Reibung sein, wenn das Gleiten verhindert werden und blofses Rollen stattfinden soll. Der Koeffizient berechnet sich für den Grenzfall aus

$$\mu p \cos\alpha = \frac{p \sin\alpha r^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

also

$$\mu = \frac{r^2}{r^2 + 2\varrho^2} \operatorname{tang}\alpha,$$

im gewählten Beispiele also $\alpha = \frac{50}{51} \operatorname{tang}\alpha$, so dafs der Grenzwinkel aus $\operatorname{tang}\alpha = \frac{51}{50}\mu$ zu berechnen ist.

Ist z. B. wieder $\mu = 0{,}2$, so wird der Grenzwinkel, wie aus $\operatorname{tang}\alpha = \frac{51}{50} \cdot 0{,}2$ folgt, $\alpha = 11^0\, 31'\, 50''$, während er für nur gleitende Körper war: $11^0\, 18'\, 40''$. Der Unterschied ist also jetzt ein weit weniger auffallender als bei dem einfach aufliegenden Cylinder, wo der eine Winkel fast dreimal so grofs war als der andere.

Ein entsprechender Versuch kann wieder gemacht werden, indem man das Rad der Atwoodschen Fallmaschine mit der Achse auf zwei parallel gestellte Lineale legt und so auf schiefer Ebene herabrollen läfst. Angenommen, der Reibungskoeffizient wäre 0,2, so würde bei α gröfser als $11^0\, 31'\, 50''$ fast nur ein Herabgleiten, kaum ein Rollen bemerkbar sein, während ein Cylinder noch bei nahe $30^0\, 58'$ einfach herabrollen würde. Für $\varrho = 0$, d. h. für unendlich dünne Achsen, hört der Unterschied ganz auf.

Versuche dieser Art sind mit so einfachen Hülfsmitteln durchzuführen und werfen so überraschendes Licht auf die entsprechenden Punkte der Bewegungslehre und der Reibungstheorie, dafs ihre Nichtberücksichtigung in den Lehrbüchern eine erhebliche Lücke bedeutet.

350) Nur noch ein Beispiel für die schiefe Ebene sei angegeben: das der herabrollenden Kugel unter dem Einflusse der Reibung oder des um den gröfsten Kreis gelegten Fadens. Das Trägheitsmoment der Kugel war schon in Nr. 174 abgeleitet worden. Die Arbeitsgleichung würde hier lauten

$$A = pl \sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + \left(\frac{2}{5} mr^2\right) \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \left(\frac{2}{5} mr^2\right) \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{7}{5} \frac{mv^2}{2}.$$

Aus der Gleichung folgt als Geschwindigkeit des Mittelpunktes

$$v = \sqrt{2\left(\tfrac{5}{7}\, g \sin\alpha\right) l},$$

als Beschleunigung desselben also $g_1 = \frac{5}{7}\, g \sin\alpha$, sodafs die Winkelbeschleunigung ist

$$\gamma = \frac{5\, g \sin\alpha}{7\, r}.$$

Die Fadenspannung p_1 giebt aber die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{p_1\, r}{T} = \frac{p_1\, r}{\frac{2}{5}\, m r^2} = \frac{5\, p_1}{2\, m\, r}.$$

Gleichsetzung beider Werte bestimmt die Fadenspannung als

$$p_1 = \tfrac{2}{7}\, p \sin\alpha.$$

Ersetzt man für den Grenzfall p_1 wieder durch die Reibung, so folgt

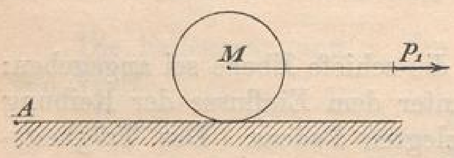
$$\mu p \cos\alpha = \tfrac{2}{7}\, p \sin\alpha,$$

d. h. $$\mu = \tfrac{2}{7} \operatorname{tang}\alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\alpha = \tfrac{7}{2}\, \mu.$$

Daraus ergeben sich wiederum entsprechende Folgerungen. Beim Reibungskoeffizienten $\mu = 0{,}2$ würde $\operatorname{tang}\alpha = \frac{7}{2} 0{,}2 = 0{,}7$ den Grenzwinkel $\alpha = 34^0\, 39'\, 30''$ (statt $11^0\, 18'\, 40''$) für das blofse Rollen ergeben.

351) Da die Lehrbücher elementaren Charakters auf die entwickelten Unterschiede keine Rücksicht nehmen, kommen bisweilen gelegentlich der Reibung unmögliche Beispiele vor, durch welche die bestehenden Unklarheiten noch unterstützt werden. Fast nirgends wird man z. B. folgende naheliegende Aufgabe gestellt oder berücksichtigt finden:

Fig. 258.



Ein Cylinder vom Gewichte p werde durch eine an seiner Achse angreifende Horizontalkraft p_1 auf horizontaler Bahn bewegt. Wie grofs mufs die gleitende Reibung mindestens sein, damit nicht Gleitung, sondern nur Rollen entstehe?

Zunächst werde wieder von der Reibung abgesehen und das Rollen durch einen Faden, der bei A befestigt und um den Cylinder geschlungen ist, erzwungen. Legt nun der Angriffspunkt den Weg h zurück, so ist die Arbeitsgleichung

$$A = p_1 h = \frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}\frac{p_1}{m}\right)h},$$

für den Punkt M also die Beschleunigung $g_1 = \frac{2}{3}\frac{p_1}{m}$ und demnach die Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{2p_1}{3mr}$. Wie früher ist zugleich die Fadenspannung p_2: $\gamma = \frac{p^2 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p^2}{mr}$, und durch die Gleichsetzung ergiebt sich $\frac{2p_2}{mr} = \frac{2p_1}{3mr}$ oder $p_2 = \frac{p_1}{3}$.

Wie grofs also auch das Gewicht und der Radius des Cylinders seien, die Fadenspannung ist in allen Fällen der dritte Teil der Zugkraft.

Soll demnach auch ohne Faden nur Rollung ohne jedes Gleiten stattfinden, so mufs die Reibung mindestens der dritte Teil der Zugkraft sein. Sie ist aber in diesem Falle μp, also ist der Minimalwert für μ zu berechnen aus $\mu p = \frac{p_1}{3}$, d. h. er ist $\mu = \frac{p_1}{3p}$.

Sobald $\mu < \frac{p_1}{3p}$ oder $p_1 > 3\mu p$ ist, findet Gleitung und Rollung zugleich statt, und ganz neue Bewegungsgleichungen sind zu bilden. Ist z. B. $\mu = 0{,}2$, so mufs p_1 unterhalb $0{,}6\,p$ bleiben, damit nur Rollung stattfinde.

Unter dieser Bedingung bewegt sich dann M, abgesehen von der geringfügigen rollenden Reibung, nach den Formeln

$$v = \frac{2p_1}{3m}t,\quad l = \frac{1}{2}\frac{2p_1}{3m}t^2,\quad v = \sqrt{2\frac{2p_1}{3m}l},$$

die Drehung aber gehorcht den Formeln

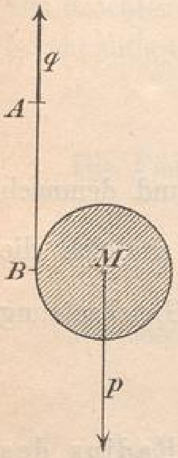
$$\vartheta = \frac{2p_1}{3mr}t,\quad \omega = \frac{1}{2}\frac{2p_1}{3mr}t^2,\quad \vartheta = \sqrt{2\frac{2p_1}{3mr}\omega}.$$

352) Wie aber erfolgt die Bewegung, wenn jene Bedingung nicht stattfindet, d. h. wenn $p_1 > 3\mu p$ ist?

Die Lösung ergiebt sich durch folgende Hülfsaufgabe, die auch an sich nicht ohne Interesse ist.

Ein Faden sei um einen Cylinder vom Gewichte p geschlungen; er werde durch eine Kraft q bei A senkrecht nach oben gezogen. Wie bewegen sich die Punkte M und A, und wie dreht sich der Cylinder?

Fig. 259.



Auflösung. Man zerlege p in q und $p - q$. Die Kraft q und die nach oben gerichtete $(-q)$ bilden das Kräftepaar, welches den Cylinder in Drehung versetzt, die Kraft $p - q$ zieht ihn nach unten. Die Drehung erfolgt also mit der Beschleunigung $\gamma = \frac{qr}{\left(\frac{mr^2}{2}\right)} = \frac{2q}{mr}$, also am Rande mit der Beschleunigung $g_1 = \frac{2q}{m}$. Die Senkung des Punktes M geschieht mit der Beschleunigung $g_2 = \frac{p-q}{m}$. Der Punkt B senkt sich erstens mit der Beschleunigung g_2, steigt aber zweitens mit der Beschleunigung g_1, seine wirkliche Beschleunigung, ebenso die von A, ist demnach

$$g_2 - g_1 = \frac{p-q}{m} - \frac{2q}{m} = \frac{p-3q}{m}.$$

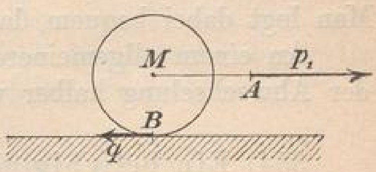
(Ist $p = 3q$, so steht A still, was mit dem früher behandelten Falle übereinstimmt.)

Es ist nicht überflüssig, auch hier den Satz von der Erhaltung der Arbeit zu prüfen. Die Arbeitswucht der bewegten Masse ist $\frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2}$. Ist h die Senkung von M, so ist $v = \sqrt{2g_2h}$, also $\frac{mv^2}{2} = mg_2h = (p-q)h$. Ist ferner ω der Drehungsweg für den Radius 1, so ist die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = \sqrt{2\gamma\omega}$, also $T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mr^2}{2}\cdot\gamma\omega = \frac{mr^2}{2}\cdot\frac{2q}{mr}\omega = qr\omega$. Nun ist aber $\omega : h = \gamma : g_2 = \frac{2q}{mr} : \frac{p-q}{m}$, also $\omega = \frac{2ph}{r(p-q)}$. Folglich ist $T\frac{\vartheta^2}{2} = qr\omega = \frac{2q^2h}{p-q}$. Die Summe der Arbeitsfähigkeiten ist also $(p-q)\,h + \frac{2q^2h}{p-q} = \frac{h}{p-q}[p + 3q^2 - 2pq]$. Ist dies eben so grofs wie die geleisteten Arbeiten? Die Kraft p hat den Weg h nach unten, die Kraft q den Weg h_1 nach oben zurückgelegt; die Leistungen sind also zusammen $ph - qh_1$. Es ist aber $h_1 : h = g_3 : g_2 = \frac{h-3q}{m} : \frac{h-q}{m}$, also $h_1 = h\frac{p-3q}{p-q}$ und $qh_1 = qh\frac{p-3q}{p-q}$. Die Arbeitsleistung ist also $ph - qh\frac{p-3q}{q-p}$

$= \frac{h}{p-q}[p^2 + 3q^2 - 2pq]$. Dies stimmt mit dem obigen Resultate überein, die Giltigkeit des Satzes ist also nachgewiesen.

353) Die Anwendung auf das Reibungsproblem ist nun sehr einfach. Das Gewicht des Cylinders sei wiederum p, die ziehende Kraft p_1, die gleitende Reibung $q = \mu p$ und $p_1 > 3q$, wie vorausgesetzt werden musste, um Rollung und Gleitung zugleich zu erhalten. Die rollende Reibung bleibe unberücksichtigt. Die Beschleunigung der Drehung erfolgt

Fig. 260.



durch das Kräftepaar $\pm q$ am Radius r, ist also $\gamma = \frac{qr}{\left(\frac{mr^2}{2}\right)}$ $= \frac{2\mu pr}{mr^2} = \frac{2\mu g}{r}$. An der Peripherie ist die Beschleunigung $g_1 = 2\mu g$. Der Kraftüberschufs $p_1 - q = p_1 - \mu p$ bringt die davon unabhängige Beschleunigung von M hervor, und diese wird $g_2 = \frac{p_1 - \mu p}{m}$. Die Schleifung des Punktes B hat die Beschleunigung

$$g_3 = g_2 - g_1 = \frac{p_1 - \mu p}{m} - 2\mu g = \frac{p_1 - 3\mu p}{m}.$$

(Das Schleifen ist Null, sobald $p_1 = 3\mu p$ ist. Es findet statt, sobald $p_1 > 3\mu p$ ist, es findet nicht statt, sobald $p_1 < 3\mu p$ ist. Die Anfangsgeschwindigkeit war als Null vorausgesetzt.) Der von M zurückgelegte Weg l verhält sich zum Reibungswege l_1 wie g_2 zu g_3

Die Arbeitsgleichung würde sein

$$A = p_1 l = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} + ql_1,$$

wo der letzte Posten die Reibungsarbeit ist. Dafs aber

$$p_1 l - ql_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2}$$

ist, war schon bei dem Hülfsbeispiele nachgewiesen worden.

Die Bewegungsgleichungen für M sind

$$v = \frac{p_1 - \mu p}{m} t, \quad l = \frac{1}{2}\frac{p_1 - \mu p}{m} t^2, \quad v = \sqrt{2\frac{p_1 - \mu p}{m} l};$$

die Gleichungen für die Drehung sind

$$\vartheta = \frac{2\mu g}{r} t, \quad \omega = \frac{1}{2}\frac{2\mu g}{r} t^2, \quad \vartheta = \sqrt{2\frac{2\mu g}{r}\omega}.$$

Das Schleifen geschieht nach den Formeln

$$v_1 = \frac{p_1 - 3\mu p}{m} t, \quad l_1 = \frac{1}{2}\frac{p_1 - 3\mu p}{m} t^2, \quad v_1 = \sqrt{2\frac{p_1 - 3\mu p}{m} l_1}.$$

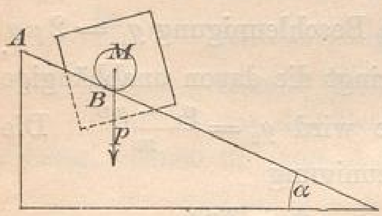
Ist die Reibung $\mu p > \frac{p_1}{3}$, so wirkt sie trotzdem stets nur in der Stärke $\mu p = \frac{p_1}{3}$. Setzt man dies ein, so wird das Schleifen Null, und die Formeln werden die früheren.

Die Richtigkeit des Ganzen kann man erproben, indem man untersucht, ob der Satz von der Erhaltung der Arbeit gewahrt bleibt. Man legt dabei bequem das Ende der ersten Sekunde zu grunde.

An einem allgemeineren Beispiele soll dies durchgeführt werden; der Abwechselung halber werde dabei die Behandlung geändert.

354) Ein beliebig gestalteter Körper rolle unter Achsenlagerung von schiefer Ebene herab. Die Achse habe den Radius ϱ, und ihre Mittellinie gehe durch den Schwerpunkt des Körpers. Wie erfolgt die Bewegung?

Fig 261.



Zunächst sei die Reibung Null und das Drehen durch den bei A befestigten und um den Cylinder geschlungenen Faden erzwungen. Die Bewegung ist Drehung um M und gleichzeitige Verschiebung oder auch Drehung um den jedesmaligen Berührungspunkt B allein. Das Moment der Schwerkraft in bezug auf diesen ist $p \sin\alpha$, die Winkelbeschleunigung also

$$\gamma = \frac{p\varrho \sin\alpha}{T + m\varrho^2} = g\frac{m\varrho \sin\alpha}{T + m\varrho^2}.$$

Ebenso grofs ist die Winkelbeschleunigung der Drehung um M. Die geradlinige Beschleunigung von M ist

$$g_1 = \gamma\varrho = \frac{p\varrho^2 \sin\alpha}{T + m\varrho^2} = g\frac{m\varrho^2 \sin\alpha}{T + m\varrho^2}.$$

Die Fadenspannung ist

$$p_1 = mg \sin\alpha - mg_1 = mg \sin\alpha\left(1 - \frac{m\varrho^2}{T + m\varrho^2}\right) = mg \sin\alpha\frac{T}{T + m\varrho^2}.$$

Soll die Reibung den Faden ersetzen, so muss sein

$$\mu p \cos\alpha \geqq p \sin\alpha\frac{T}{T + m\varrho^2};$$

der Koeffizient also

$$\mu \geqq \operatorname{tang}\alpha\frac{T}{T + m\varrho^2}.$$

Der Reibungswinkel für gegebenes μ folgt schliefslich aus

$$\operatorname{tang}\alpha = \mu \cdot \frac{T + m\varrho^2}{T}.$$

Ist tang α kleiner, so findet die Bewegung nach den soeben berechneten Beschleunigungen g_1 und γ statt. Ist tang α gröfser, so findet Gleitung und Rollung zugleich statt. Die Drehung entsteht durch das Kräftepaar $\pm \mu p \cos \alpha$ mit dem Hebelarme ϱ, hat also die Winkelbeschleunigung

$$\gamma_1 = \frac{\mu p \cos \alpha \varrho}{T} = g \frac{\mu m \varrho \cos \alpha}{T};$$

der Kraftüberschuss $p \sin \alpha - \mu p \cos \alpha$ giebt die fortschreitende Beschleunigung für M, nämlich

$$g_1 = \frac{p \sin \alpha - \mu p \cos \alpha}{m} = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

An der Peripherie ist die Drehbeschleunigung

$$g_2 - \gamma_1 \varrho = \frac{\mu p \cos \alpha \varrho^2}{T} = g \frac{\mu m \cos \alpha \varrho^2}{T},$$

die Beschleunigung des Schleifens ist also

$$g_3 = g_1 - g_2 = g \left(\sin \alpha - \mu \cos \alpha \frac{T + m\varrho^2}{T} \right).$$

(Das Schleifen ist Null, sobald $\mu \leq \operatorname{tang} \alpha \frac{T + m\varrho^2}{T}$ ist, die Probe stimmt also. Ist die Reibung gröfser, so wirkt sie trotzdem nur wie die Fadenspannung, nämlich nach dem Gesetze $\mu = \operatorname{tang} \alpha \frac{T + m\varrho^2}{T}$.)

355) Eine weitere Probe werde gemacht, um zu zeigen, wie es sich bei Reibungsproblemen mit dem Satze von der Erhaltung der Arbeit gestaltet.

Ist zunächst l_1 der von M zurückgelegte Weg, so ergiebt sich der Gleitungsweg aus der Proportion $l_3 : l_1 = g_3 : g_1$ als

$$l_3 = l_1 \frac{g_3}{g_1} = l_1 \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha \frac{T + m\varrho^2}{T}}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}.$$

Man setze nun folgende Arbeitsgleichung an:

Arbeit der Kraft = Energie der Massenbewegung + Reibungsarbeit,

oder

Arbeit der Kraft — Reibungsarbeit = Energie der Massenbewegung,

also

$$p l_1 \sin \alpha - \mu p \cos \alpha l_1 \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha \frac{T + m\varrho^2}{T}}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} = \frac{m v^2}{2} + T \frac{\vartheta^2}{2}.$$

Ist diese Gleichung richtig? Als Zeitpunkt wähle man z. B. das Ende der ersten Sekunde. Dann ist

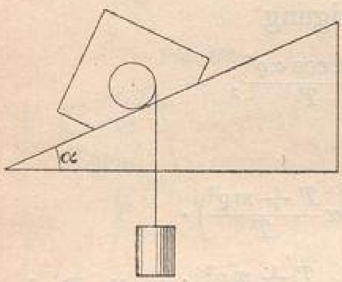
$$l_1 = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),\quad v = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),\quad \vartheta = \gamma = \frac{\mu p\cos\alpha\varrho}{T}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte formt sich die linke Seite um zu

$$\frac{pg}{2}\left[\sin^2\alpha - 2\mu\sin\alpha\cos\alpha + \mu^2\cos^2\alpha\frac{T+m\varrho^2}{T}\right].$$

Die rechte Seite führt auf denselben Wert. Die Probe mit dem Satze von der Erhaltung der Arbeit stimmt also gleichfalls.

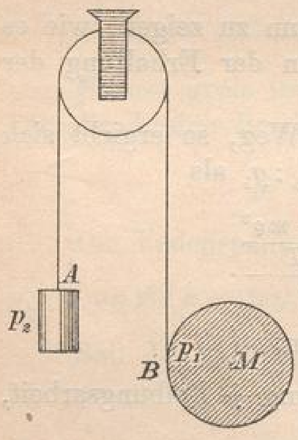
Fig. 262.



Dem Leser bleibe es überlassen, eine ganze Schar hierher gehöriger Aufgaben, z. B. solche, bei denen es sich um das Hinaufrollen handelt, selbst anzusetzen. Um jedoch zu zeigen, wie man die Schwierigkeiten des Ansatzes in mannigfacher Weise überwinden kann, behandeln wir noch ein verwandtes Beispiel.

356) Ein Faden sei über eine leichtbewegliche Rolle gelegt, deren Masse Null sei. An dem Ende A sei ein Gewicht befestigt, das andere Ende sei um einen Cylinder vom Radius r und vom Gewichte p_1 geschlungen, der infolge der Fadenspannung und Schwerkraft abrollen wird. Wie erfolgen die einzelnen Bewegungen?

Fig. 263.



Auflösung. Sinkt A mit der Beschleunigung g_2 statt g, so bleibt die Fadenspannung $S = (g - g_2)\,m_2$. Da die Masse der oberen Rolle als Null angenommen ist, so herrscht auf der andern Seite dieselbe Fadenspannung. Damit ist die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt, bei der es sich um die Fadenspannung g statt S handelte, nur ist noch die Unbekannte g_2 darin. Dort erfolgte die Drehung mit der Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{2S}{m_1 r} = \frac{2m_2(g-g_2)}{m_1 r}$, an der Peripherie also mit $g_3 = \frac{2S}{m_1} = \frac{2m_2(g-g_2)}{m_1}$, M dagegen sank mit der Beschleunigung $g_1 = \frac{p_1 - S}{m_1} = \frac{m_1 g - m_2(g-g_2)}{m_1}$. Die beiden Bewegungen von B sind entgegengesetzt, die wirkliche Bewegung also

$$g_3 - g_1 = \frac{2m_2(g-g_2) - m_1 g + m_2(g-g_2)}{m_1} = \frac{3m_2(g-g_2) - m_1 g}{m_1},$$

und dies ist zugleich die Beschleunigung g_2 von A, sodass

$$g_2 = \frac{3m_2 g - 3m_2 g_2 - m_1 g}{m_1}.$$

Daraus folgt

$$g_2 = \frac{3m_2 - m_1}{3m_2 + m_1} g = g \frac{3p_2 - p_1}{3p_2 + p_1}.$$

Dies in die Gleichungen für γ und g_1 eingesetzt, giebt die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{4m_2 g}{r[3m_2 + m_1]} = \frac{4p_2 g}{r[3p_2 + p_1]},$$

für M aber die Beschleunigung

$$g_1 = g\frac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2} = g\frac{p_1 + p_2}{p_1 + 3p_2}.$$

Setzt man z. B. $p_1 = 3p_2$, so wird, wie in einem früheren Beispiele, $g_2 = 0$, $g_1 = \frac{2}{3} g$. Setzt man $p_1 = \infty$, so wird $g_2 = g$, womit A die gröfste mögliche Geschwindigkeit erhält. Dabei wird $g_1 = \frac{g}{3}$, was die geringste Senkungsbeschleunigung für M giebt. (Ein Steigen von M würde nur möglich sein, wenn man das Gewicht p_2 durch eine Kraft ersetzte, die nicht an die Maximalbeschleunigung g gebunden ist.)

Berücksichtigt man die Masse der oberen Rolle, so wird die Lösung nicht viel schwieriger, nur ist natürlich die Fadenspannung rechts eine andere, als links. Ist nämlich die Spannung links wieder $S = m_2(g - g_2)$, so würde, da die Rolle am Rande die Beschleunigung g_2 erhält und ihre auf den Rand reduzierte Masse $\frac{m_4}{2}$ ist, für die Spannung rechts nur übrig bleiben $S - \frac{m_4}{2} g_2$ oder $S_1 = m_2(g - g_2) - \frac{m_4}{2} g_2 = m_2 g - g_2\left(m_2 + \frac{m_4}{2}\right)$. Von jetzt ab ist die Aufgabe zu behandeln wie vorher.

357) Auch die Schwungradtheorie läfst sich mit den bisherigen Hülfsmitteln behandeln. Man kann bei gegebener Schwungmasse die Gröfse der Schwankungen in der Geschwindigkeit und umgekehrt aus der zulässigen Schwankung die Schwungmasse berechnen. Über dieses Kapitel vergleiche man den Anhang.

Zu entsprechenden Beispielen können noch herangezogen werden der Drehungskörper mit symmetrischem Schnitt in Nr. 125, besonders der ringförmige Wulst in Nr. 126, die Kugelbetrachtungen in Nr. 174 und 175, besonders die Stofs- und Pendeltheorie, die Energiezunahme der sich zusammenziehenden Erde in Nr. 177, die Drehungsparaboloide verschiedener Ordnung in der Tabelle des Abschnittes 188.

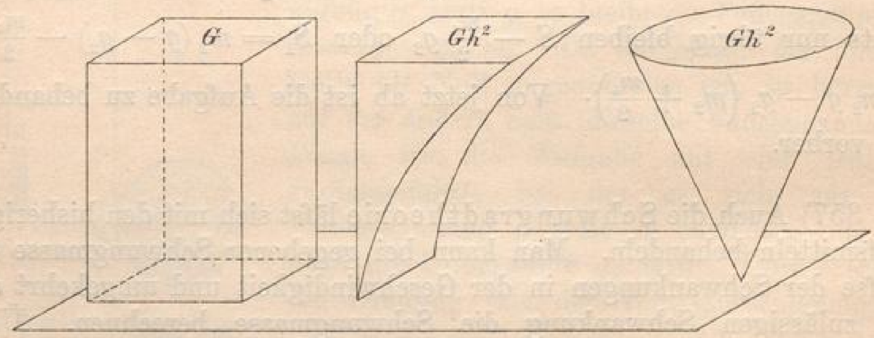
Man erkennt, welch reichen Übungsstoff man schon an diese einfachsten Körperformen anschliefsen kann, und wie viele wichtige Kapitel der Mechanik nur mit Hülfe der Trägheitsmomente erschlossen werden können.

358) In ähnlicher Weise wie der Kreiscylinder und der Rechteckskörper können andere senkrechte Cylinder und Prismen bezüglich der Trägheitsmomente behandelt werden, da jede der früher besprochenen ebenen Flächen als Grundfläche genommen werden kann.

Man beginnt mit T_u. Ist F der horizontale Querschnitt, so folgt Fy^2 als sein Trägheitsmoment, also wird $T_u = \frac{Fh^3}{3}$, und für den Schwerpunktsschnitt wird $T_{xy} = \frac{Fh^3}{12} = \frac{Jh^2}{12}$. Ist ferner t_x das eine axiale Trägheitsmoment der Grundfläche, so ist $t_x h$ das des Körpers für den entsprechenden senkrechten Schnitt, d. h. es ist $T_{xz} = t_x h$. Ist t_y das andere Axialmoment der Grundfläche, so wird $T_{yz} = t_y h$. Für die senkrechte Schwerpunktsachse wird nun $T_z = T_{xz} + T_{yz}$, für die durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte X-Achse wird $T_a = T_{yx} + T_{zx}$, für die Y-Achse $T_y = T_{zy} + T_{xy}$. Endlich wird das Polarmoment für den Schwerpunkt des Körpers $T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx}$.

(Auch für schräge Prismen und Cylinder lassen sich gewisse Momente leicht berechnen, andere aber erfordern Kenntnisse des nächsten Abschnittes. So läfst sich z. B. das schiefe Parallelflach oft in ein senkrechtes Prisma und zwei Dachkörper zerlegen, welche letzteren aber der Ordnung 1 angehören.)

Fig. 264.



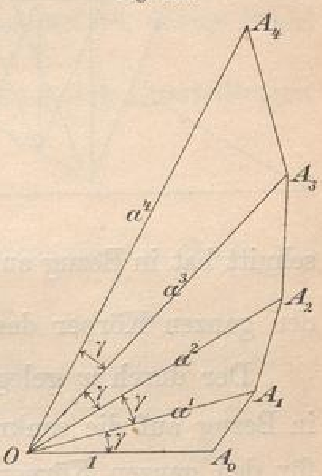
359) Im Anschlufs an Fig. 130 lassen sich auch die Trägheitsmomente der Körper von der Ordnung Null stereometrisch veranschaulichen. Wegen der Querschnittsformel $q_y = Ty^2$ handelt es sich um eine Darstellung durch Körper von der Ordnung 2. So

ist z. B. das Trägheitsmoment des ersten Körpers in Fig. 264 gleich dem Inhalte des zweiten parabolischen und auch des dritten Körpers, sobald nur die letzteren statt der Grundfläche G die Grundfläche Gh^2 erhalten.

Das Axialmoment des ersten in Bezug auf die senkrechte Achse kann man durch ein Prisma oder einen Cylinder von derselben Höhe darstellen, dessen Grundfläche gleich dem polaren Trägheitsmomente der Grundfläche des ersten Körpers ist. Ist letztere z. B. ein Quadrat von der Seite b, so hat man für die Hülfskörper die Grundfläche $\frac{b^4}{6}$ zu nehmen.

Da hier und später für die Linien mehrfach Ausdrücke höherer Dimension auftreten, so sei an folgendes erinnert.

Fig. 265.



360) Um Ausdrücke wie a^2, a^3, a^4, ... als gerade Linien darstellen zu können, mufs man neben der Länge a noch die Länge der Einheit kennen. Man bildet nun aus 1 und a ein beliebiges Dreieck OA_0A_1, setzt auf OA_1 ein ähnliches, auf OA_2 wiederum ein ähnliches und fährt so fort, dann erhält man OA_2 als a^2, OA_3 als a^3, OA_4 als a^4 u. s. w. Dies folgt aus Proportionen wie $1 : a = a : x$ oder $a : a^2 = a^2 : x$ u. s. w.

Schaltet man als Winkelhalbierende die mittleren Proportionalen zweier aufeinanderfolgenden Strahlen ein, so erhält man auch die Längen für $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{2}}$ u. s. w. Fährt man nach unten fort, so erhält man zunächst $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ u. s. w., oder, was dasselbe ist, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, u. s. w. Die so entstehenden Eckpunkte liegen auf einer logarithmischen Spirale. Hat man diese korrekt gezeichnet und läfst man die Winkeltheilung mit Hülfe des probeweisen Zirkelabstechens auf einem Kreisbogen zu, so kann man alle Potenzen von a mit rationalem Exponenten im Prinzip konstruieren. Dreiteilung des Winkels γ giebt dann bis zur Spirale reichende Strahlen von der Länge $a^{\frac{1}{3}}$ und $a^{\frac{2}{3}}$.

C. Körper von der Ordnung 1.

361) Der symmetrische Dreieckskörper mit rechteckiger Grundfläche.

Ist $G = ab$ der Oberschnitt, so ist der Horizontalschnitt in der