



## **Die Mechanik fester Körper**

**Blau, Ernst**

**Hannover, 1905**

§ 17. Rechnerische Ermittlung der Resultierenden mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Bedingungen des Gleichgewichtes mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen ...

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76868](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76868)

**§ 17. Rechnerische Ermittlung der Resultierenden mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Bedingungen des Gleichgewichtes mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.**

Diese Aufgabe läßt sich zum Teil auf die in § 11 gelöste zurückführen. In Fig. 43 seien die Kräfte  $P_1, P_2, P_3, \dots$  gegeben. In der Ebene der Kräfte werden zunächst zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen  $OX$  und  $OY$  verzeichnet.

Dann werden in  $O$  die zu den gegebenen Kräften parallelen und entgegengesetzt gleichen Kräfte  $P_1, P_2, \dots$  angebracht.

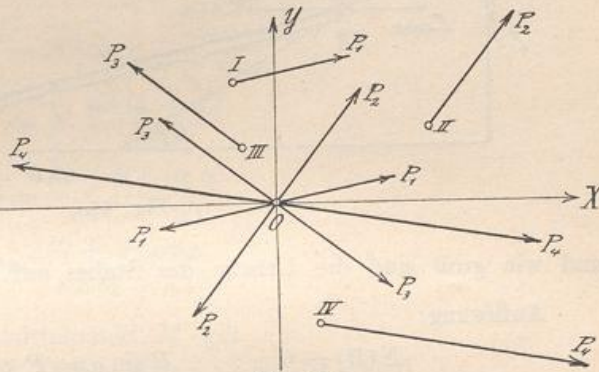


Fig. 43.

Auf diese Art sind in  $O$  vorhanden:

- a)  $n$  Einzelkräfte,
- b)  $n$  Kräftepaare.

Dieselbe Wirkung wie die gegebenen Kräfte bringen nun die Resultierende der  $n$  in  $O$  angreifenden Kräfte und das resultierende Kräftepaar hervor. —

Gleichgewicht ist vorhanden, wenn daher die Gleichungen existieren:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(H) &= 0 \\ \Sigma(V) &= 0 \\ \Sigma(M) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

**Beispiele.**

71. In einer vertikalen Ebene ist ein Balken an eine vertikale zu ersterer senkrechte Ebene gelehnt und in der Horizontalen am Ausweichen gehindert. Wie groß sind die vorkommenden Drücke?

Fig. 44. — Gegeben das Gewicht des Stabes und der Winkel  $\alpha$ . —

Auflösung:

$$\begin{aligned} N &= N' \\ N'' &= G. \end{aligned}$$

In bezug auf den Drehpunkt  $A$  ist

$$N \cdot 2l \sin \alpha - G \cdot l \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N'' = G$$

$$N = \frac{1}{2} G \cot \alpha = N'$$

72. Ein Stab mit dem Gewichte  $G$  kg liegt mit dem einen Ende auf einer horizontalen und mit dem andern Ende auf einer schiefen Ebene, welche mit dem Horizonte den Winkel  $\alpha$  bildet. Von letzterem Ende geht

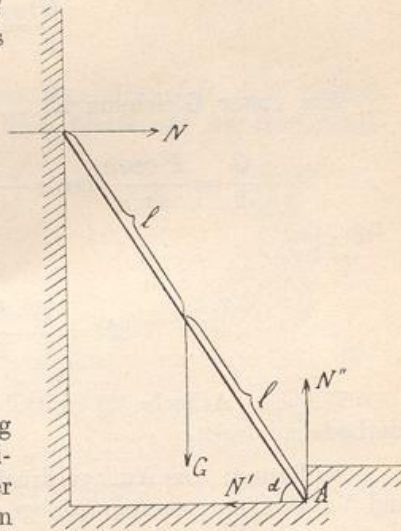


Fig. 44.



ein Faden aus, der am oberen Ende der schiefen Ebene über eine Rolle geht  
Welches Gewicht ist an dessen Ende zu hängen, damit Gleichgewicht besteht

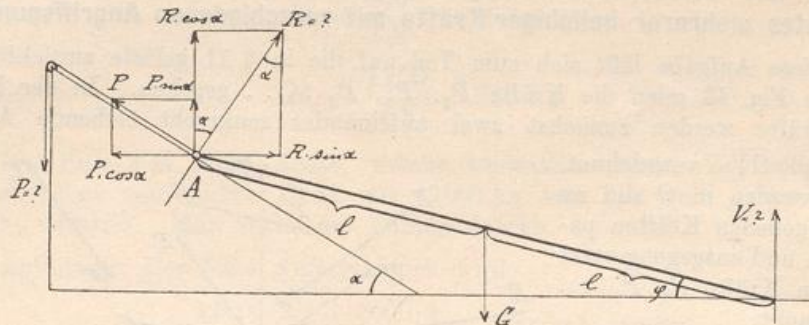


Fig. 45.

und wie groß sind die Drücke des Stabes auf die schiefe Ebene? Fig. 45.

Auflösung:

$$\Sigma(H) = 0 \dots R \sin \alpha = P \cdot \cos \alpha$$

$$\Sigma(V) = 0 \dots G - V - R \cos \alpha - P \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma(M)_A = 0 \dots G \cdot l \cos \varphi = V \cdot 2l \cos \varphi.$$

Aus letzterer Gleichung wird  $G = 2V$

$$V = \frac{G}{2}$$

In die zweite Gleichung wird der Wert für  $V$  eingesetzt, so daß folgt

$$G - \frac{G}{2} - R \cos \alpha - P \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\frac{G}{2} = R \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha.$$

Aus erster Gleichung ist  $\dots R = \frac{P \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}$ , somit

$$\frac{G}{2} = \frac{P \cos \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha + P \sin \alpha = P \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \text{ oder}$$

$$G = \frac{2P}{\sin \alpha}$$

$$P = \frac{G \cdot \sin \alpha}{2}, \quad R = \frac{G \cdot \cos \alpha}{2}$$

73. Die Aufgabe 51 mittels der in diesem Paragraphen angegebenen Methode zu lösen.

Auflösung: Die Auflagerdrücke  $N$  und  $N'$  werden zunächst in Horizontal- und Vertikalkomponenten zerlegt. Erstere sind  $N \sin \alpha$  und  $N' \sin \alpha'$ , letztere  $N \cos \alpha$  und  $N' \cos \alpha'$ . — Demnach werden



$$\begin{aligned}
 N \sin \alpha &= N' \sin \alpha' \\
 G + G' &= N \cos \alpha + N' \cos \alpha' \\
 N' &= N \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \\
 G + G' &= N \cos \alpha + N \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cos \alpha' \\
 G + G' &= N \left( \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha'}{\sin \alpha'} \right) \\
 G + G' &= N \cdot \frac{\sin (\alpha + \alpha')}{\sin \alpha'} \\
 N &= \frac{(G + G') \cdot \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} \\
 N' &= \frac{(G + G') \sin \alpha}{\sin (\alpha + \alpha')}
 \end{aligned}$$

In bezug auf den Kugelmittelpunkt  $M'$  gilt

$$N \cos \alpha \cdot a \cos \varphi + N \sin \alpha \cdot a \sin \varphi - G a \cos \varphi = 0$$

$$N \cos \alpha + N \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi = G$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G - N \cdot \cos \alpha}{N \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G - \frac{(G + G') \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} \cdot \cos \alpha}{\frac{(G + G') \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} \cdot \sin \alpha} = \frac{G \cdot \sin (\alpha + \alpha') - (G + G') \sin \alpha' \cos \alpha}{(G + G') \cdot \sin \alpha' \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G \sin \alpha \cos \alpha' + G \cos \alpha \sin \alpha' - G \sin \alpha' \cos \alpha - G' \sin \alpha' \cos \alpha}{(G + G') \sin \alpha' \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G \cot \alpha' - G' \cot \alpha}{G + G'}$$

74. Ein Stab liegt über einer horizontalen Mauerkante  $B$ , mit welcher er einen rechten Winkel bildet. Sein unteres Ende findet auf der Horizontalebene in  $A$  ein Hindernis gegen Ausgleiten. Das Gewicht des Stabes ist  $G$  kg, die Auflagerlänge  $l$ , die Höhe der Mauerkante  $B$  über der Horizontalen  $h$ , die Entfernung der Mauer vom Hindernis  $A \dots b$  und die Entfernung der Richtung des Eigengewichtes des Stabes vom Hindernis  $a$ . — Man bestimme die vorkommenden Drücke?  
Fig. 46.

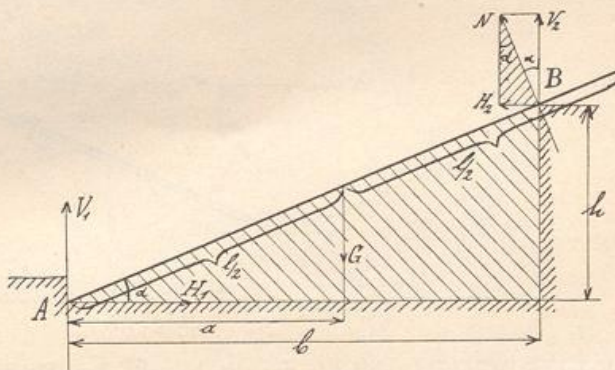


Fig. 46.



Auflösung: Bekannt sind die Größen  $G, a, b, h, l$

$$H_1 = H_2$$

$$G = V_1 + V_2$$

In bezug auf  $A$  wird

$$G \cdot a - H_2 \cdot h - V_2 \cdot b = 0.$$

Diese drei Gleichungen enthalten vier Unbekannte. Es ist daher noch eine Gleichung zur Lösung der Aufgabe nötig. Diese Gleichung ergibt sich wegen Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke mit

$$\frac{H_2}{V_2} = \frac{h}{b}.$$

Daraus ist

$$H_2 = \frac{h}{b} \cdot V_2.$$

Demnach wird

$$G \cdot a - \frac{h}{b} \cdot V_2 \cdot h - V_2 \cdot b = 0$$

$$G \cdot a = V_2 \left( \frac{h^2}{b^2} + b \right) = V_2 \frac{h^2 + b^2}{b} = V_2 \cdot \frac{l^2}{b}$$

$$V_2 = G \frac{a \cdot b}{l^2}$$

$$H_1 = H_2 = G \cdot \frac{a h}{l^2}$$

$$V_1 = G - V_2 = G - G \frac{a b}{l^2}$$

$$V_1 = G \frac{l^2 - a b}{l^2}$$

$$N = \sqrt{H_2^2 + V_2^2} = \sqrt{G^2 \cdot \frac{a^2 h^2}{l^4} + G^2 \cdot \frac{a^2 b^2}{l^4}} = \frac{G \cdot a}{l^2} \cdot \sqrt{h^2 + b^2}$$

$$N = G \cdot \frac{a}{l}$$

75. Ein Stab lehnt sich gegen zwei in einer Horizontalen sich schneidenden, schiefen Ebenen, welche mit dem Horizonte die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha'$  bilden. —

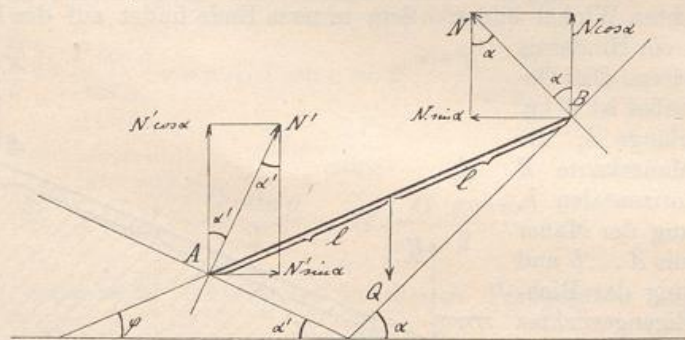


Fig. 47.

Welchen Winkel schließt der Stab mit der Horizontalen ein, wenn er im Gleichgewicht ist? Fig. 47.



Auflösung:

$$Q = N \cdot \cos \alpha + N' \cos \alpha'$$

$$N \sin \alpha = N' \sin \alpha'$$

$$N' = N \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

$$Q = N \cdot \cos \alpha + N \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cdot \cos \alpha'$$

$$N = \frac{Q}{\cos \alpha + \sin \alpha \cot \alpha'} \text{ und}$$

$$N' = \frac{Q}{\cos \alpha + \sin \alpha \cot \alpha'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

In bezug auf den Drehpunkt  $A$  gilt

$$Q \cdot l \cdot \cos \varphi = N \cdot \cos \alpha \cdot 2l \cos \varphi + N \cdot \sin \alpha \cdot 2l \sin \varphi$$

$$Q \cdot \cos \varphi = \frac{Q}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cot \alpha'} \cdot \frac{(2 \cos \varphi \cos \alpha + 2 \sin \alpha \sin \varphi)}{2 \cos (\alpha - \varphi)}$$

$$\cos \varphi \left( \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha'}{\sin \alpha'} \right) = 2 \cos (\alpha - \varphi)$$

$$\cos \varphi \cdot \sin (\alpha + \alpha') = 2 \sin \alpha' \cdot \cos (\alpha - \varphi)$$

$$\cos \varphi \cdot \sin (\alpha + \alpha') = 2 \sin \alpha' \cdot (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi)$$

$$\sin (\alpha + \alpha') = 2 \sin \alpha' (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi)$$

$$2 \sin \alpha \sin \alpha' \operatorname{tg} \varphi = \sin \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha' - 2 \sin \alpha' \cos \alpha$$

$$2 \sin \alpha \sin \alpha' \operatorname{tg} \varphi = \sin \alpha \cos \alpha' - \cos \alpha \sin \alpha'$$

Beide Seiten der Gleichung durch  $2 \sin \alpha \sin \alpha'$  dividiert, ergibt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} (\cot \alpha' - \cot \alpha).$$

76. Ein Stab lehnt sich gegen eine horizontale und gegen eine vertikale Ebene. In einem Punkte ist er mit einem Faden verbunden, dessen anderes Ende im Schnittpunkte erstgenannter Ebenen fest ist. Welche Spannung entsteht im Faden, wenn er mit der Horizontalen nach Annahme der Gleichgewichtslage des Stabes den Winkel  $\beta$  und der Stab mit ihr den Winkel  $\alpha$  bildet? Fig. 48.

Auflösung:

- a)  $\Sigma(H) = 0 \dots N_1 = S \cdot \cos \beta$   
 b)  $\Sigma(V) = 0 \dots G + S \cdot \sin \beta - N_2 = 0$   
 $N_2 = G + S \sin \beta$   
 c)  $\Sigma(M) = 0$ , z. B. in bezug auf Drehpunkt  $A$ .

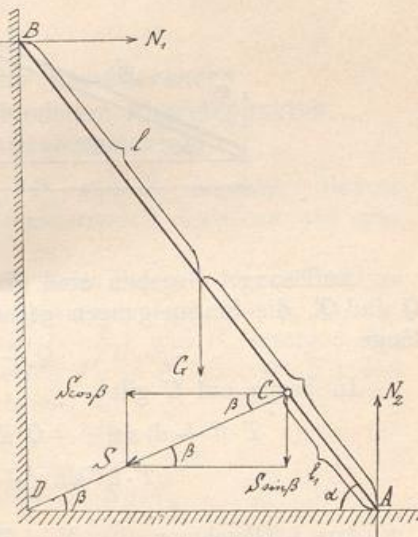


Fig. 48.



$$\begin{aligned}
N_1 \cdot 2l \sin \alpha - G \cdot l \cdot \cos \alpha - S \cdot \cos \beta \cdot l_1 \sin \alpha - S \cdot \sin \beta \cdot l_1 \cos \alpha &= 0. \\
S \cdot \cos \beta \cdot 2l \sin \alpha - S \cos \beta \cdot l_1 \sin \alpha - S \sin \beta l_1 \cos \alpha &= G l \cos \alpha \\
S \cdot [2l \sin \alpha \cos \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta - l_1 \sin \beta \cos \alpha] &= G \cdot l \cdot \cos \alpha \\
S \cdot \left[ 2 \cdot \sin \alpha \cos \beta - \frac{l_1}{l} \sin \alpha \cos \beta - \frac{l_1}{l} \sin \beta \cos \alpha \right] &= G \cos \alpha \\
S \cdot \left[ 2 \sin \alpha \cos \beta - \frac{l_1}{l} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \right] &= G \cdot \cos \alpha \\
S \cdot \left[ 2 \sin \alpha \cos \beta - \frac{l_1}{l} \cdot \sin (\alpha + \beta) \right] &= G \cdot \cos \alpha.
\end{aligned}$$

Aus  $\triangle ACD$  folgt . . . .  $l_1 : 2l \cos \alpha = \sin \beta : \sin (\alpha + \beta)$ , also

$$\frac{l_1}{l} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Dann wird . . . .  $S \cdot \left[ 2 \sin \alpha \cos \beta - \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \cdot \sin (\alpha + \beta) \right] = G \cdot \cos \alpha$

$$2S \cdot (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = G \cdot \cos \alpha$$

$$2S \cdot \sin (\alpha - \beta) = G \cdot \cos \alpha$$

$$S = \frac{G}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$$

77. Zwei Stäbe in einer Vertikalebene stehen auf einer horizontalen Ebene. Ihre unteren Enden sind durch einen Faden verbunden. Das obere Ende des einen Stabes ist mit irgend einem Punkte des zweiten durch ein Gelenk verbunden. Wie groß ist die Spannung des Fadens? Fig. 49.

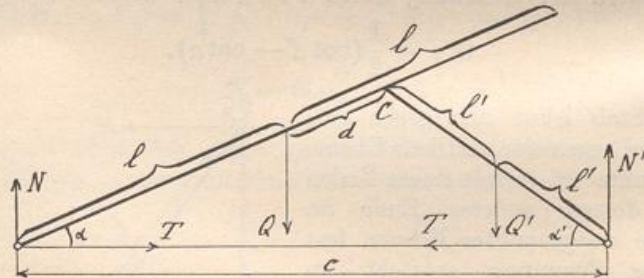


Fig. 49.

Auflösung: Gegeben sind die Stablängen  $2l$  und  $2l'$ , die Stabgewichte  $Q$  und  $Q'$ , die Stabneigungen gegen die Horizontale  $\alpha$  und  $\alpha'$  und die Fadenlänge  $c$

$$Q + Q' = N + N'$$

In bezug auf  $C$  gilt

$$T \cdot (l + d) \sin \alpha + Q \cdot d \cos \alpha - N \cdot (l + d) \cdot \cos \alpha = 0$$

$$T \cdot 2l' \sin \alpha' + Q' l' \cos \alpha' - N' \cdot 2l' \cos \alpha' = 0.$$

Aus 1. Gleichung . . . .  $N = T \cdot \operatorname{tg} \alpha + Q \frac{d}{l + d}$



Aus 2. Gleichung . . . .  $N' = T \cdot \operatorname{tg} \alpha' + \frac{1}{2} Q'$

$$Q + Q' = T \cdot \operatorname{tg} \alpha + Q \frac{d}{l+d} + T \cdot \operatorname{tg} \alpha' + \frac{1}{2} Q'$$

$$T \cdot \operatorname{tg} \alpha + T \cdot \operatorname{tg} \alpha' = Q + Q' - Q \frac{d}{l+d} - \frac{1}{2} Q'$$

$$T \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') = \frac{Ql + Qd - Qd}{l+d} + \frac{1}{2} Q' = \frac{Q \cdot l}{l+d} + \frac{1}{2} Q'$$

$$\frac{2l'}{l+d} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}, \text{ folgt } \frac{l'}{l+d} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha'} = \frac{l}{1+d} \cdot \frac{l'}{l}$$

$$\text{d. h. } 2l' \sin \alpha' = (l+d) \sin \alpha$$

$$T \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') = \frac{1}{2} Q' + Q \frac{l \cdot \sin \alpha}{2l' \sin \alpha'} = \frac{Q'l \sin \alpha' + Ql \sin \alpha}{2l' \sin \alpha'}$$

$$T = \frac{Q \cdot l \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{2l' \sin \alpha' (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha')}$$

Da  $\frac{c}{2l'} = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin \alpha}$ , folgt  $c \cdot \sin \alpha = 2l' \sin(\alpha + \alpha')$ ; ferner ist

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha'}$$

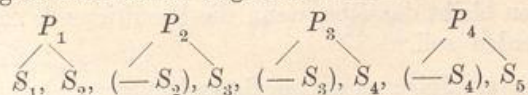
$$T = \frac{Q \cdot l \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{2l' \sin \alpha' \cdot \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha'}}$$

$$T = \frac{Ql \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{2l' \sin \alpha' \frac{c \cdot \sin \alpha}{2l' \cos \alpha \cos \alpha'}}, \text{ somit } \dots T = \frac{Ql \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{c \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha'}$$

### § 18. Graphische Ermittlung der Resultierenden mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Graphische Darstellung des Drehmomentes.

Es seien, Fig. 50a, die Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  gegeben. Behufs Auffindens des Weges zur Ermittlung der Resultierenden derselben auf graphischem Wege dienen folgende Erwägungen.

Man nehme in der Richtung der Kraft  $P_1$  einen Punkt  $I$  an und zerlege dort  $P_1$  in die Komponenten  $S_1$  und  $S_2$ . Im Schnittpunkte von  $S_2$  mit  $P_2$ , d. i. in  $II$ , werde  $P_2$  durch die Komponenten  $(-S_2)$  und  $S_3$  ersetzt. Im Schnittpunkte von  $S_3$  mit  $P_3$ , d. i. in  $III$ , werde  $P_3$  in  $S_4$  und  $(-S_3)$  zerlegt usw. Es ergibt sich somit folgendes Schema:



Da sich  $S_2$  und  $(-S_2)$ ,  $S_3$  und  $(-S_3)$  . . . . aufheben, bleiben nur die Kräfte  $S_1$  und  $S_5$  übrig. Sie bringen dieselbe Wirkung hervor wie die ge-