



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 18. Graphische Ermittlung der Resultierenden mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Graphische Darstellung des Drehmomentes. Beispiele 78-82

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76868](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76868)

Aus 2. Gleichung $N' = T \cdot \operatorname{tg} \alpha' + \frac{1}{2} Q'$

$$Q + Q' = T \cdot \operatorname{tg} \alpha + Q \frac{d}{l+d} + T \cdot \operatorname{tg} \alpha' + \frac{1}{2} Q'$$

$$T \cdot \operatorname{tg} \alpha + T \cdot \operatorname{tg} \alpha' = Q + Q' - Q \frac{d}{l+d} - \frac{1}{2} Q'$$

$$T \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') = \frac{Ql + Qd - Qd}{l+d} + \frac{1}{2} Q' = \frac{Q \cdot l}{l+d} + \frac{1}{2} Q'$$

$$\frac{2l'}{l+d} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}, \text{ folgt } \frac{l'}{l+d} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha'} = \frac{l}{1+d} \cdot \frac{l'}{l}$$

$$\text{d. h. } 2l' \sin \alpha' = (l+d) \sin \alpha$$

$$T \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') = \frac{1}{2} Q' + Q \frac{l \cdot \sin \alpha}{2l' \sin \alpha'} = \frac{Q'l \sin \alpha' + Ql \sin \alpha}{2l' \sin \alpha'}$$

$$T = \frac{Q \cdot l \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{2l' \sin \alpha' (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha')}$$

Da $\frac{c}{2l'} = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin \alpha}$, folgt $c \cdot \sin \alpha = 2l' \sin(\alpha + \alpha')$; ferner ist

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha'}$$

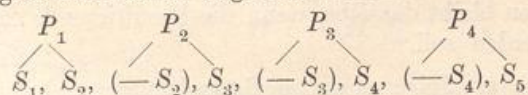
$$T = \frac{Q \cdot l \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{2l' \sin \alpha' \cdot \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha'}}$$

$$T = \frac{Ql \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{2l' \sin \alpha' \frac{c \cdot \sin \alpha}{2l' \cos \alpha \cos \alpha'}}, \text{ somit } \dots T = \frac{Ql \sin \alpha + Q'l \sin \alpha'}{c \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha'}$$

§ 18. Graphische Ermittlung der Resultierenden mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Graphische Darstellung des Drehmomentes.

Es seien, Fig. 50a, die Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben. Behufs Auffindens des Weges zur Ermittlung der Resultierenden derselben auf graphischem Wege dienen folgende Erwägungen.

Man nehme in der Richtung der Kraft P_1 einen Punkt I an und zerlege dort P_1 in die Komponenten S_1 und S_2 . Im Schnittpunkte von S_2 mit P_2 , d. i. in II , werde P_2 durch die Komponenten $(-S_2)$ und S_3 ersetzt. Im Schnittpunkte von S_3 mit P_3 , d. i. in III , werde P_3 in S_4 und $(-S_3)$ zerlegt usw. Es ergibt sich somit folgendes Schema:



Da sich S_2 und $(-S_2)$, S_3 und $(-S_3)$ aufheben, bleiben nur die Kräfte S_1 und S_5 übrig. Sie bringen dieselbe Wirkung hervor wie die ge-

gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 . Ihre Resultierende ist daher auch die Resultierende der gegebenen Kräfte, greift also im Mittelpunkte V an.

Reiht man, Fig. 50b, die Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 nach Größe und Richtung aneinander und verbindet man je ihre Endpunkte mit einem beliebigen Punkte O , dem sogenannten **Pole**, so ist es zweckmäßig, letztere Strahlen, die sogenannten **Polstrahlen**, als obgenannte Komponenten S zu

nehmen. Wie die Figur zeigt, ist dann tatsächlich P_1 zerlegt in S_1 und S_2 , P_2 zerlegt in $(-S_2)$ und S_3 usw. Die Totalresultierende R ist als Resultierende von S_1 und S_5 zu erkennen.

Auf Grund dieser Betrachtungen schlage man daher folgenden Weg zur Aufsuchung der Resultierenden mehrerer Einzelkräfte mit verschiedenen Angriffspunkten ein.

„Man reihe die Kräfte nach Größe und Richtung aneinander, nehme einen beliebigen Pol an und ziehe die Polstrahlen. Hierauf zeichne man durch einen Punkt I der ersten Kraft je eine Parallele zum ersten und zum zweiten Polstrahl und zwar letztere Parallele bis zur zweiten Kraft, d. h. bis II . Dann ziehe man durch II eine Parallele zum dritten Polstrahl bis zur dritten Kraft, d. h. bis III ,

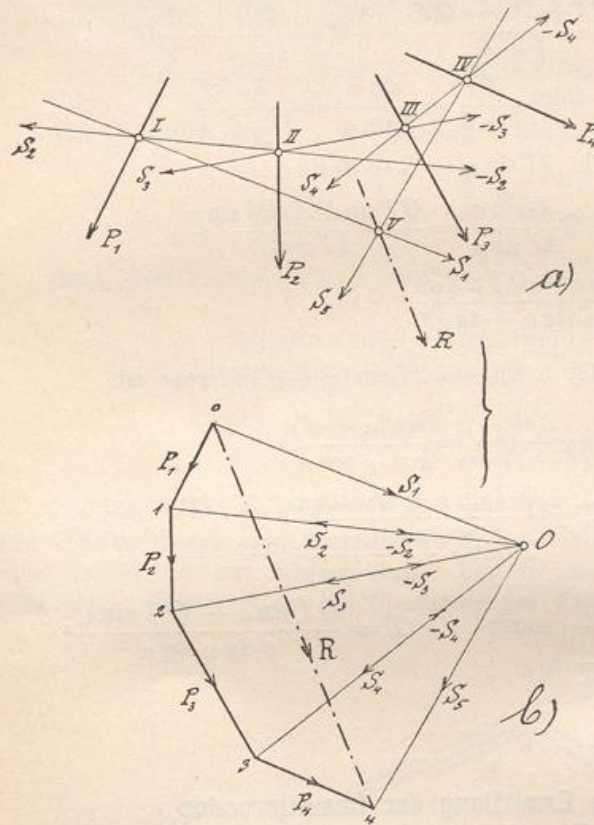


Fig. 50.

durch letzteren Punkt eine Parallele zum vierten Polstrahl bis zur nächsten Kraft, usw. Der Schnittpunkt der äußersten Polstrahlen ergibt den Angriffspunkt der Resultierenden.“

„Kräftezug und Polstrahlen zusammen heißen **Kräftepolygon**, der Linienzug I, II, III, IV, V wird **Seilpolygon** genannt.“

„Die Größe und Richtung der Resultierenden ergibt sich aus dem Kräftepolygon.“

„Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn die Resultierende mehrerer parallelen Kräfte gesucht werden soll.“

Im Anschluss an obige einfache Betrachtungen soll nun gleich gezeigt werden, wie das Drehmoment mehrerer Kräfte in bezug auf einen bestimmten Drehpunkt graphisch gefunden wird.

In Fig. 51 ist mittels des soeben beschriebenen Verfahrens Größe, Angriffspunkt und Richtung der Resultierenden der Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4

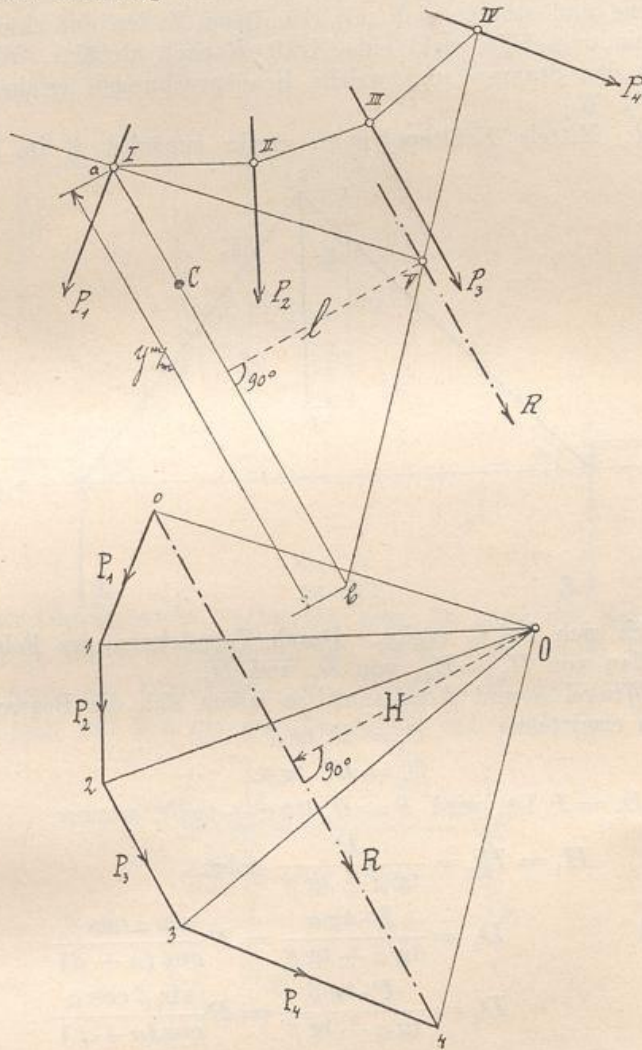


Fig. 51.

gesucht worden. In bezug auf den Drehpunkt C ist das Drehmoment

$$M = R \cdot l.$$

Durch C werde eine Parallele zu R zwischen den äußersten Seilpolygonseiten $y = \overline{ab}$ verzeichnet. Nun ist laut Figur

$$\triangle abV \sim \triangle oO4, \text{ daher}$$

$$y : l = R : H \text{ oder}$$

$$M = R \cdot l = H \cdot y \dots \dots \dots (46)$$

„ H heißt Poldistanz.“

„Man findet somit das Drehmoment mehrerer Kräfte, indem man die Poldistanz H mit der zwischen den äußersten Seilpolygonseiten liegenden und durch den Drehpunkt parallel zur Resultierenden gezogenen Strecke y multipliziert.“

Beispiele.

78. Zwei durch ein Gelenk verbundene Stäbe \overline{ab} und \overline{bc} liegen in einer vertikalen Ebene und stützen sich mit den freien Enden auf eine horizontale. An ihrer Verbindungsstelle wirkt eine Kraft P nach abwärts. Wie groß sind die Drücke in den Stangen und welche Beanspruchungen erfahren die Aufgestellen? Fig. 52.

Auflösung: Mittels Kräftepolygons werde zunächst P in K_1 und K_2

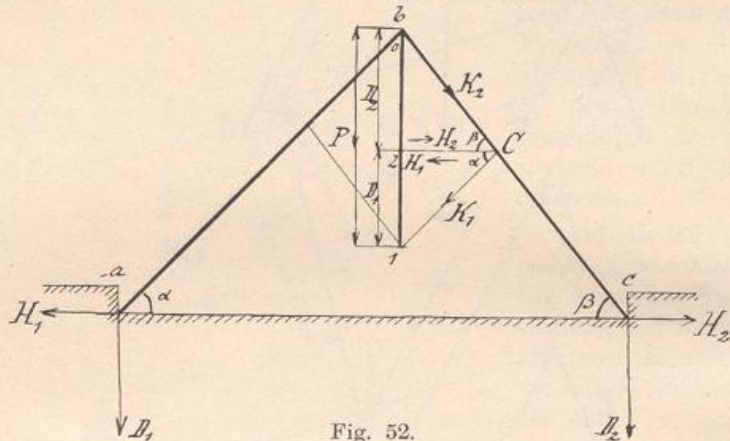


Fig. 52.

zerlegt, wodurch sich Pol C ergibt. Durch Verzeichnen des Polstrahles $\overline{C2}$ folgen die Größen von $H_1 = H_2$, von D_1 und D_2 .

Sind die Winkel α und β bekannt, so lassen sich die Beanspruchungen auch analytisch ermitteln.

$$D_1 = H_1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$D_2 = H_2 \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Da $D_1 + D_2 = P$ ist, wird $P = H_1 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$, woraus

$$H_1 = H_2 = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \text{ folgt.}$$

$$\text{Dann wird} \quad D_1 = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = P \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos (\alpha + \beta)}$$

$$D_2 = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = P \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$$

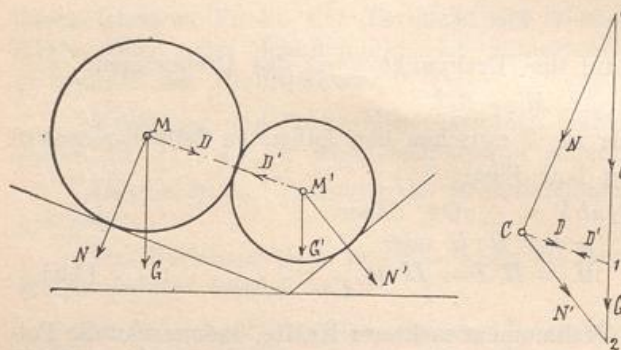


Fig. 53.

79. Die Aufgabe 51 graphisch zu lösen. Fig. 53.

Auflösung:

Die Kräfte G und G' werden verzeichnet. Hierauf werden die Polstrahlen $\overline{C0}$ und $\overline{C2}$ parallel zu N und N' gezogen. Die Verbindungslinie $\overline{C1}$ ergibt dann die Lage der Zentrale der Kugeln, wenn diese sich im Gleichgewichte befinden.

80. Wie groß muß die in D , Fig. 54, angreifende Kraft K sein, damit der Hebel im Gleichgewicht bleibe?

Auflösung: Man trage $P_1 = 0,1$ und $P_2 = 1,2$ an und wähle einen beliebigen Pol C_1 . Nach Verzeichnung der Polstrahlen ziehe man $I IV \parallel OC_1$, $I II \parallel 1, C_1$ und $II III \parallel 2, C_1$.

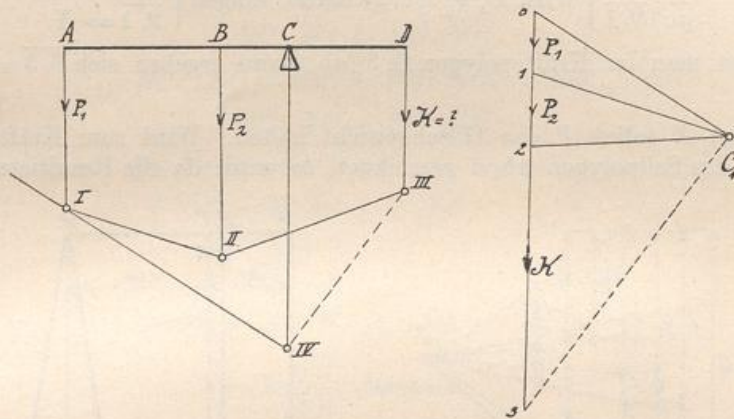


Fig. 54.

Soll nun Gleichgewicht vorhanden sein, so muß die Resultierende von P_1 , P_2 und K durch C hindurchgehen, d. h. auch durch den Punkt IV . $III IV$ ist somit der letzte Polstrahl. Wird im Kräftepolygon $C_1 3 \parallel III IV$ gezogen, so folgt mit $2, 3$ die gesuchte Größe der Kraft K .

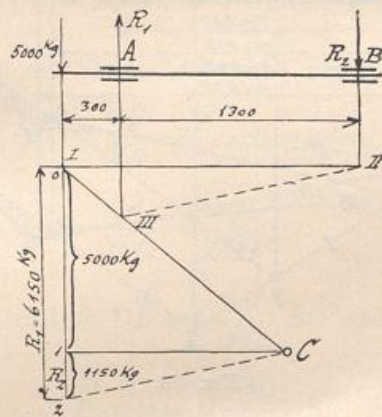


Fig. 55.

81. Die Auflagerdrücke R_1 und R_2 in Beispiel 67 sind graphisch zu ermitteln. Fig. 55.

Auflösung: Man nehme in der Richtung von 5000 kg einen Punkt I an und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Polstrahlen $0, C$ und $1, C$. $II III$ ergibt sich dann als Schlußlinie des Seilpolygones. Wird im Kräftepolygon $C, 2 \parallel II III$ gezogen, so ergibt sich $R_1 = 0,2$ und $R_2 = 1,2$ und zwar ist R_1 hinaufgerichtet, während R_2 nach abwärts wirkt.

82. Die Theorie der Dezimalwaage soll graphisch gegeben werden. Fig. 56.

Auflösung: Die Last Q ruhe irgendwo auf der Brücke. Dieselbe werde durch das Kräftepolygon zunächst in die Komponenten I und II zerlegt. Zu diesem Ende ziehe man

$$\left. \begin{array}{l} \overline{ga_1} \parallel \overline{O,0} \\ \overline{gc} \parallel \overline{O,1} \end{array} \right\} \text{Wird } \overline{O,2} \parallel \overline{a_1c} \text{ gemacht, folgen } \begin{cases} \overline{O,2} = Z \\ \overline{2,1} = X \end{cases}$$

Verzeichnet man im Kräftepolygon $\overline{O,3} \parallel \overline{ab}$, dann ergeben sich $\overline{O,3} = Y_1$ und $\overline{3,2} = Y$.

Y und X sollen P das Gleichgewicht halten. Wird zum Kräftepolygon $O, 3, 2, 1$ das Seilpolygon $abcd$ gezeichnet, so wird, da die Resultierende aller

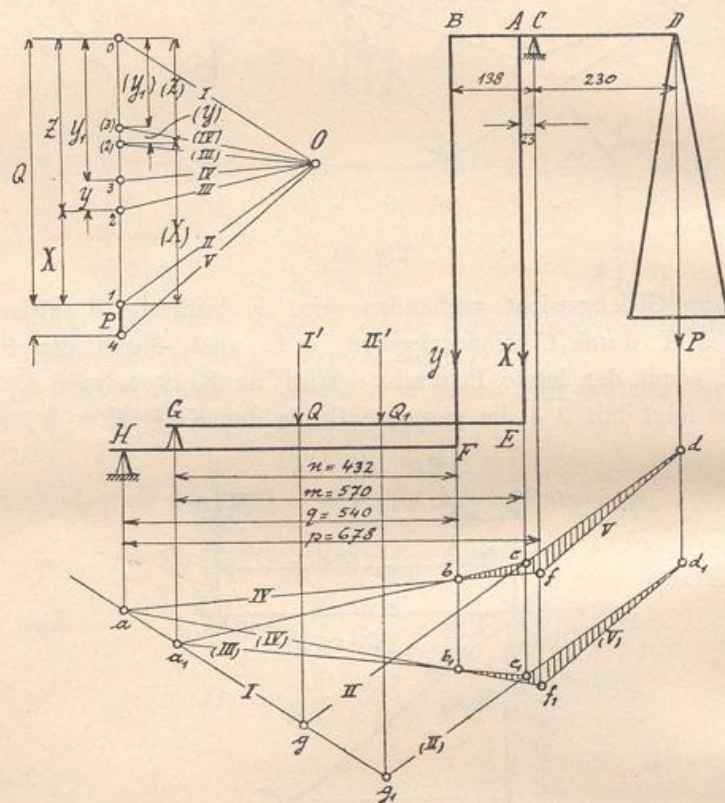


Fig. 56.

Kräfte ihren Angriffspunkt in C haben muß, \overline{fd} die Schlußseite des letzteren. Wird im Kräftepolygon $\overline{O,4} \parallel \overline{fd}$ gezogen, so folgt die Größe von P mit $\overline{1,4}$.

Steht die Last auf der Brücke in II' , so wird die Untersuchung wie früher gemacht.

Da nun P sich so groß wie früher ergeben muß, folgt, daß $\overline{c_1d_1} \parallel \overline{cd}$ und $\overline{f_1d_1} \parallel \overline{fd} \parallel \overline{O,4}$ sein muß.

$$\begin{array}{l} \text{Nun} \\ \triangle aff_1 \sim \triangle abb_1 \\ \triangle a_1c_1c \sim \triangle a_1b_1b \end{array}$$

$$\text{Hieraus } \left. \begin{array}{l} p:q = \overline{ff_1} : \overline{bb_1} \\ m:n = \overline{cc_1} : \overline{bb_1} \end{array} \right\} \text{da } \overline{ff_1} : \overline{bb_1} = \overline{cc_1} : \overline{bb_1},$$

$$\text{ist auch } p:q = m:n.$$

Daher ist $(p - q) : q = (m - n) : n$, d. h.

$$\overline{BC} : \overline{FH} = \overline{AB} : \overline{FG} \text{ oder}$$

$$\overline{BC} : \overline{BA} = \overline{FH} : \overline{FG}$$

$$\overline{BC} : (\overline{BC} - \overline{BA}) = \overline{FH} : (\overline{FH} - \overline{FG}), \text{ somit}$$

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{FH} : \overline{GH}.$$

In bezug auf den Drehpunkt C gilt nun

$$P \cdot \overline{CD} = X \cdot \overline{AC} + Y \cdot \overline{BC}$$

$$Q = X + Z$$

$$Z = Q - X$$

Da $Y \cdot \overline{FH} = Z \cdot \overline{GH}$ ist, folgt

$$Y = Z \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}}, \text{ demnach}$$

$$P \cdot \overline{CD} = X \cdot \overline{AC} + Z \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}$$

$$\text{Daher } P \cdot \overline{CD} = X \cdot \overline{AC} + (Q - X) \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}$$

$$P \cdot \overline{CD} = X \left[\overline{AC} - \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC} \right] + Q \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}.$$

Soll der Zug X in der Stange \overline{AE} ohne Einfluß auf die Wägung sein, so muß

$$\overline{AC} - \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC} = 0 \text{ werden.}$$

$$\text{D. h. es muß gelten } \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}}$$

$$\text{Dann wird } P \cdot \overline{CD} = Q \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC} \text{ oder}$$

$$P \cdot \overline{CD} = Q \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \overline{BC}, \text{ d. h.}$$

$$P \cdot \overline{CD} = Q \cdot \overline{AC}.$$

$$\text{Wenn } \overline{CD} = 10 \cdot \overline{AC} \text{ ist, wird } P = \frac{1}{10} Q.$$