Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Prisma, Cylinder, Anwendung auf Atwoods Fallmaschine.

Wie im vorigen Abschnitte wird $\sum 2myy_1 = 0$ und $\sum 2mzz_1 = 0$, dagegen

$$\sum my_1^2 = y_1^2 \sum m = y_1^2 J \quad \text{und} \quad \sum mz_1^2 = z_1^2 \sum m = z_1^2 J.$$

Man erhält also

$$T_1 = T_{zx} + y_1^2 J + T_{xy} + z_1^2 J = (T_{zx} + T_{xy}) + J(y_1^2 + z_1^2) = T_s + Je^2.$$

Folglich gilt der Satz: Verschiebt man die Achse eines Trägheitsmomentes aus der Schwerpunktslage um e, so wächst das Trägheitsmoment um das Produkt aus dem Inhalte und dem Quadrate der Verschiebungsstrecke.

340) Der Satz $T_1 = T_s + e^2 J$ gilt auch vom Polarmomente zweiter Ordnung. Der Beweis ergiebt sich ebenso, wie vorher aus

$$T_1 = \sum m(x - x_1)^2 + \sum m(y - y_1)^2 + \sum m(z - z_1)^2,$$

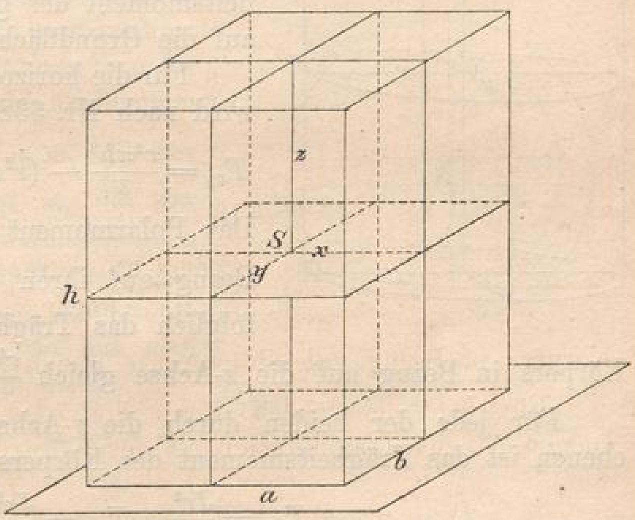
was sich auf $T_s + e^2 J$ reduziert.

B. Die einfachsten Formen, besonders von der Ordnung Null.

341) **Aufgabe.** Die wichtigsten Trägheitsmomente des Rechteckskörpers zu berechnen.

Auflösung. Sind a, b und c die drei Kanten, so hat in Fig. 251 jeder Horizontalschnitt die Fläche ab und in Bezug auf die Grundfläche, wenn y der Abstand ist, das Trägheitsmoment aby^2. Dies giebt, wenn man die Schichtenformel anwendet, für den ganzen Körper das Planmoment $ba\frac{c^3}{3}$ oder $J\frac{c^2}{3}$.

Fig. 251.



Für die parallele Schwerpunktsebene wird nach Nr. 338

$$T_s = J\frac{c^2}{3} - J\left(\frac{c}{2}\right)^2 = J\frac{c^2}{12} = \frac{abc^3}{12}.$$

In Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenebenen ist also

$$T_{xy} = \frac{abc^3}{12}, \quad T_{yz} = \frac{bca^3}{12}, \quad T_{zx} = \frac{cab^3}{12}.$$

Die Axialmomente für die durch S gehenden Koordinatenachsen werden

$$T_x = T_{zx} + T_{xy} = \frac{cab^3}{12} + \frac{abc^3}{12} = \frac{abc}{12}(b^2 + c^2) = \frac{J}{12}(b^2 + c^2),$$

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{abc^3}{12} + \frac{bca^3}{12} = \frac{abc}{12}(c^2 + a^2) = \frac{J}{12}(c^2 + a^2),$$

$$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \frac{bca^3}{12} + \frac{cab^3}{12} = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2) = \frac{J}{12}(a^2 + b^2).$$

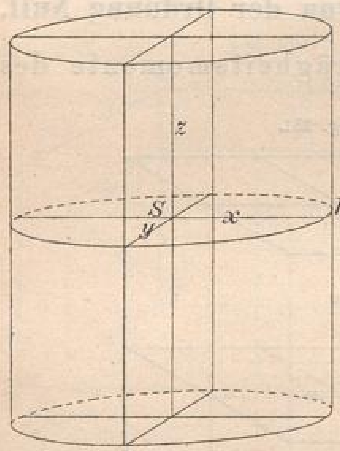
Das Polarmoment für den Schwerpunkt wird

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{J}{12} d^2,$$

wo d die Hauptdiagonale ist.

324) **Aufgabe.** Die wichtigsten Trägheitsmomente für den Kreiscylinder zu berechnen.

Fig. 252.



In Fig. 252 ist jeder Horizontalschnitt gleich $r^2\pi$, sein Trägheitsmoment beim Abstande y von der Grundfläche ist in Bezug auf diese gleich $r^2\pi y^2$. Nach der Schichtenformel ergiebt sich $\frac{r^2\pi h^3}{3} = \frac{Jh^2}{3}$ als Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die Grundfläche.

Für die horizontale Schwerpunktsebene wird nach Nr. 338

$$T_{xy} = \frac{r^2\pi h^3}{3} - (r^2\pi h)\left(\frac{h^2}{2}\right) = \frac{r^2\pi h^3}{12} = \frac{Jh^2}{12}.$$

Das Polarmoment der Grundfläche ist in Bezug auf ihren Mittelpunkt gleich $\frac{r^4\pi}{2}$, folglich das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die z-Achse gleich $\frac{r^4\pi h}{2} = \frac{Jr^2}{2} = T_z$.

Für jede der beiden durch die z-Achse gelegten Koordinatenebenen ist das Trägheitsmoment des Körpers halb so grofs, also

$$T_{zx} = \frac{Jr^2}{4}, \quad T_{yz} = \frac{Jr^2}{4}.$$

Für die durch S gehende x-Achse ist

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \frac{Jr^2}{4} + \frac{Jh^2}{12} = \frac{J}{12}(3r^2 + h^2),$$

für die y-Achse durch S ist ebenso

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{4} = \frac{J}{12}(3r^2 + h^2).$$

Das Polarmoment zweiter Ordnung für S ist

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{4} + \frac{Jr^2}{4} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{2} = \frac{J}{12}(h^2 + 6r^2).$$

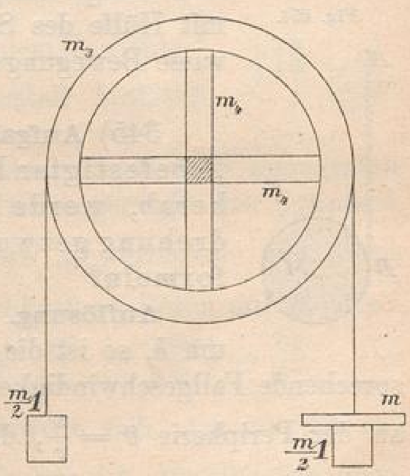
Mechanische Aufgaben über den Cylinder siehe unter Nr. 84, 86, 89, 93, 94, 96 bis 106, wo es sich um Säulen, Achsen und Triebwellen, um schwingende Pendel u. dgl. handelt.

343) Das wichtigste Axialmoment des Hohlcylinders mit den Radien r und r_1.

Für den Kreisring ist das polare Trägheitsmoment $\frac{r^4\pi}{2} - \frac{r_1^4\pi}{2}$ $= \frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^2((r^2 + r_1^2) = \frac{F}{2}(r^2 + r_1^2)$, das entsprechende Axialmoment des Cylinders ist also $\frac{Fh}{2}(r^2 + r_1^2) = \frac{J}{2}(r^2 + r_1^2)$. In der Mechanik ist statt J die Masse $m = \frac{p}{g}$ einzusetzen, wo p in Kilogrammen, $g = 9{,}81$ in Metern gegeben werden kann. (Besser ist es, mit Tonnen und Metern zu rechnen.)

Hierzu vergleiche man die Aufgaben unter 86, 88, 90 über hohle Achsen, Hohlsäulen, Schleif- oder Mühlsteine und Schwungringe.

Fig. 253.



344) Das Gegebene reicht auch hin, in die Theorie der Atwoodschen Fallmaschine einzuführen.*) Ist nämlich m die Masse des treibenden Übergewichtes, $2\left(\frac{m_1}{2}\right) = m_1$ die der beiden Schleppgewichte, m_3 die des Ringes, m_4 die jedes durchgehenden Radarmes, wobei der schraffierte Körper doppelt genommen ist, wofür die Achse weggelassen ist, so hat man als gesamtes Trägheitsmoment

$$(m + m_1)r^2 + 2 \cdot \frac{m_4 d_1^2}{12} + \frac{m_3(r^2 + r_1^2)}{2},$$

denn die aufgehängten Gewichte bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit, als ob sie am Rande des Kreises angebracht wären, so

*) Dieses und die folgenden Beispiele aus der Dynamik können auch an Nr. 43 angeschlossen werden.

dafs der Widerstand durch $(m + m_1) r^2$ dargestellt ist. Für obiges kann man schreiben

$$T = (m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2},$$

denn die Flächendiagonale d_1 des Rechtecks ist gleich $2 r_1$. Das statische Moment der Triebkraft ist $p = mg$. Die Beschleunigung am Radius 1 wird nach der Mechanik

$$\gamma = \frac{\text{stat. Moment der Triebkraft}}{\text{gesamtes Trägheitsmoment}} = g \frac{mr}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

Die Beschleunigung am Radius r ist r-mal so grofs, also hat das treibende Übergewicht die Beschleunigung

$$g_1 = g \frac{mr^2}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

Die Fallbewegung des Übergewichtes geschieht nach den Formeln $v = g_1 t$, $h = \frac{1}{2} g_1 t^2$, $v = \sqrt{2 g_1 h}$. Die Fadenspannung des rechts hängenden Fadens ist $\left(m + \frac{m_1}{2}\right)(g - g_1)$, die des links hängenden $\frac{m_1}{2}(g + g_1)$, die Reibung hat die Differenz beider Spannungen zu überwinden, wenn kein Gleiten stattfinden soll.

Einige Beispiele werden zeigen, wie leicht sich jetzt mit Hülfe des Satzes von der Erhaltung der Arbeit gewisse Bewegungsprobleme ansetzen lassen.

Fig. 254.

345) **Aufgabe.** Ein Cylinder, um den ein bei A befestigter Faden gewickelt ist, falle senkrecht herab, werde aber durch den Faden zur Umdrehung gezwungen. Welches sind die Bewegungsformeln?

Auflösung. Ist sein Gewicht p, und senkt er sich um h, so ist die Arbeit der Schwerkraft ph. Ist die entsprechende Fallgeschwindigkeit v, so ist die Drehungsgeschwindigkeit an der Peripherie $\vartheta = \frac{v}{r}$, die Arbeitswucht (Energie) also

$$A = \frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4} mv^2.$$

Ebenso grofs mufs die geleistete Arbeit ph oder mgh sein. Aus $mgh = \frac{3}{4} mv^2$ folgt $v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = \sqrt{2 \left(\frac{2}{3} g\right) h}$, während die ent-