Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Anwendung auf Fadenspannung bei von Fäden ablaufenden Cylindern.

dafs der Widerstand durch $(m + m_1) r^2$ dargestellt ist. Für obiges kann man schreiben

$$T = (m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2},$$

denn die Flächendiagonale d_1 des Rechtecks ist gleich $2 r_1$. Das statische Moment der Triebkraft ist $p = mg$. Die Beschleunigung am Radius 1 wird nach der Mechanik

$$\gamma = \frac{\text{stat. Moment der Triebkraft}}{\text{gesamtes Trägheitsmoment}} = g \frac{mr}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

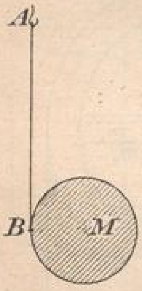
Die Beschleunigung am Radius r ist r-mal so grofs, also hat das treibende Übergewicht die Beschleunigung

$$g_1 = g \frac{mr^2}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

Die Fallbewegung des Übergewichtes geschieht nach den Formeln $v = g_1 t$, $h = \frac{1}{2} g_1 t^2$, $v = \sqrt{2 g_1 h}$. Die Fadenspannung des rechts hängenden Fadens ist $\left(m + \frac{m_1}{2}\right)(g - g_1)$, die des links hängenden $\frac{m_1}{2}(g + g_1)$, die Reibung hat die Differenz beider Spannungen zu überwinden, wenn kein Gleiten stattfinden soll.

Einige Beispiele werden zeigen, wie leicht sich jetzt mit Hülfe des Satzes von der Erhaltung der Arbeit gewisse Bewegungsprobleme ansetzen lassen.

Fig. 254.



345) **Aufgabe.** Ein Cylinder, um den ein bei A befestigter Faden gewickelt ist, falle senkrecht herab, werde aber durch den Faden zur Umdrehung gezwungen. Welches sind die Bewegungsformeln?

Auflösung. Ist sein Gewicht p, und senkt er sich um h, so ist die Arbeit der Schwerkraft ph. Ist die entsprechende Fallgeschwindigkeit v, so ist die Drehungsgeschwindigkeit an der Peripherie $\vartheta = \frac{v}{r}$, die Arbeitswucht (Energie) also

$$A = \frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4} mv^2.$$

Ebenso grofs mufs die geleistete Arbeit ph oder mgh sein. Aus $mgh = \frac{3}{4} mv^2$ folgt $v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = \sqrt{2\left(\frac{2}{3} g\right) h}$, während die entsprechende Formel beim freiem Falle lautet $\sqrt{2gh}$. An Stelle von g tritt also hier $^2/_3 g$, die drei Fallformeln sind demnach hier

$$v = \frac{2}{3}gt, \quad h = \frac{1}{2}\frac{2}{3}gt^2 = \frac{gt^2}{3}, \quad v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}g\right)h}.$$

Durch den Drehungszwang wird also die Fallgeschwindigkeit für jeden Zeitpunkt auf $^2/_3$ der freien Fallgeschwindigkeit herabgesetzt.

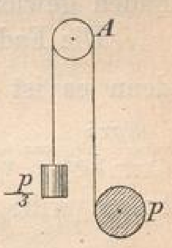
Wie grofs ist die Fadenspannung bei diesem Beispiele? Es ist $g - g_1 = g - \frac{2}{3}g = \frac{g}{3}$, die Spannung also $m\frac{g}{3} = \frac{p}{3}$. Oder wenn man den Vorgang eingehender analysieren will: Die Fadenspannung ist die Kraft, welche die Drehung hervorruft. Die Beschleunigung der letzteren ist am Rande $\frac{2}{3}g$, am Radius 1 also $\gamma = \frac{2g}{3r}$. Gleichzeitig ist aber

$$\gamma = \frac{\text{Moment der Kraft}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{p_1 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p_1}{mr},$$

wo p_1 die drehende Kraft ist. Es folgt $\frac{2p_1}{mr} = \frac{2g}{3r}$, d. h. $p_1 = \frac{mg}{3} = \frac{p}{3}$.

Die Fadenspannung beträgt also nur den dritten Teil des Cylindergewichtes. Dieses Resultat soll später zur Aufklärung über gewisse Reibungsverhältnisse benutzt werden. Statt den Faden bei A zu befestigen, kann man ihn dort über eine leicht bewegliche Rolle legen und durch das Gewicht $\frac{p}{3}$ anspannen. Der am Faden herabrollende Cylinder p hält dann dem Gewichte $\frac{p}{3}$ das Gleichgewicht, wie leicht experimentell bestätigt werden kann.

Fig. 255.



Gewöhnlich wird die behandelte Aufgabe anders angegriffen. Man betrachtet B als augenblicklichen Drehungspunkt des Cylinders, so dafs das Trägheitsmoment $\frac{mr^2}{2}$ um mr^2 zu vermehren und gleich $\frac{3}{2}mr^2$ zu setzen ist. Das Moment der Triebkraft in Bezug auf B ist pr, also ist die Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{pr}{\frac{3}{2}mr^2} = \frac{2mgr}{3mr^2} = \frac{2g}{3r}$. Der Punkt M befindet sich am Radius r, bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $g_1 = \frac{2g}{3r}r = \frac{2}{3}g$. Das Resultat ist dasselbe wie oben.

346) Noch stärker läfst sich der Fall verlangsamen, wenn der Faden nicht um die Scheibe oder den Cylinder, sondern um eine Achse mit dem kleineren Radius ϱ gewunden wird. (Vgl. Nr. 93.)

Ist die Fallgeschwindigkeit v, so ist jetzt die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = \frac{v}{\varrho}$. Vernachlässigt man das Gewicht der Achse, welches einzurechnen übrigens keine Schwierigkeiten macht, so wird die Arbeitswucht

$$A = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{r^2 + 2\varrho^2}{2\varrho^2}.$$

Setzt man dies gleich der Arbeit ph der Schwerkraft, d. h. $= mgh$, so folgt

$$v = \sqrt{2\left(g\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}\right)h}.$$

An Stelle von g in der Freifallformel $v = \sqrt{2gh}$ tritt also

$$g_1 = g \cdot \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

was als Beschleunigung in die drei Bewegungsformeln einzuführen ist. Macht man z. B. $r = 10\varrho$, so wird $g_1 = g\frac{2\varrho^2}{100\varrho^2 + 2\varrho^2} = \frac{g}{51}$. Die Fallgeschwindigkeit wird also der 51. Teil der Freifallgeschwindigkeit. (Entsprechende Versuche über Unterrichtszwecke lassen sich mit dem Rade der Atwoodschen Fallmaschine machen, um deren Achse man Fäden gewickelt hat.)

Die Fadenspannung wird hier gröfser als bei der vorigen Aufgabe, denn es ist $g - g_1 = g - g\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{gr^2}{r^2 + 2\varrho^2}$, also die Spannung $\frac{mgr^2}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{pr^2}{r^2 + 2\varrho^2}$. Oder, wenn man die obige Betrachtung wiederholen will: Aus $g_1 = g\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}$ folgt als Winkelbeschleunigung (am Radius 1) $\gamma = \frac{g_1}{\varrho} = \frac{2gr}{r^2 + 2\varrho^2}$. Dieselbe Winkelbeschleunigung wird durch die Fadenspannung p_1 hervorgerufen, so dafs auch

$$\gamma = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{p_1\varrho}{\frac{mr^2}{2}}$$

ist. Aus der Gleichsetzung der rechten Seiten ergiebt sich die Fadenspannung

$$p_1 = \frac{mgr^2}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{pr^2}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

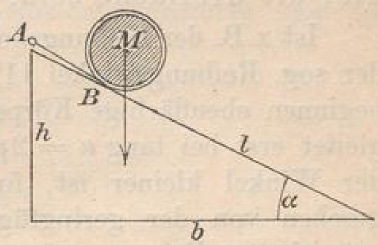
Ist z. B. $r = 10\varrho$, so folgt $p_1 = \frac{50}{51}p$, wo p das Cylindergewicht ist.

Man bemerkt, dafs bei der Herabsetzung der Freifallbeschleunigung von g auf $\frac{1}{51}g$ die Fadenspannung um $\frac{1}{51}$ des Gewichtes vermindert wird. Dies bestätigt die obige Bemerkung über den Ausdruck $m(g - g_1)$.

Der Grund, weshalb wir auf die Fadenspannung überhaupt eingingen, wird sich aus der folgenden Aufgabe ergeben.

347) Der Cylinder ist wiederum mit einem Faden umwickelt. Das Ende desselben sei aber bei A an der schiefen Ebene mit Neigung α befestigt, auf welcher der Cylinder herabrollen soll. Beschleunigung und Fadenspannung sollen berechnet werden, ohne dafs die Reibung berücksichtigt wird.

Fig. 256.



Beim senkrechten Fall ergab sich unter Drehungszwang $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}g\right)h}$. Man braucht nur $l \sin \alpha$ für h zu setzen, um hier $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}g\right) l \sin \alpha}$ zu finden, so dafs an Stelle von $g_1 = \frac{2}{3} g$ jetzt $g_1 = \frac{2}{3} g \sin \alpha$ als Beschleunigung tritt. Man kann aber auch so, wie vorher, die Gleichung der Erhaltung der Arbeit benutzen, oder auch B als Drehungspunkt betrachten. Das statische Moment der Schwerkraft in Bezug auf B ist dann $pr \sin \alpha$, das Trägheitsmoment aber $\frac{mr^2}{3} + mr^2 = \frac{2}{3} mr^2$. Es folgt die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{pr \sin \alpha}{\frac{3}{2} mr^2} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{r},$$

also für M, d. h. für den Radius r, das r-fache oder $g_1 = \frac{2}{3} g \sin \alpha$.

Die Drehung wird, wenn keine Reibung vorhanden ist, durch die Fadenspannung p_1 hervorgerufen, so dafs auch ist: $\gamma = \frac{p_1 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2 p_1}{mr}$. Gleichsetzung beider Ausdrücke für γ giebt

$$p_1 = \frac{mg \sin \alpha}{3} = \frac{p \sin \alpha}{3}.$$

348) Diese Fadenspannung giebt uns an, wie grofs die Reibung mindestens sein mufs, um das Herabgleiten zu verhindern und die Cylinderbewegung zu einer rein rollenden zu machen.

Ist also der Reibungskoeffizient für Gleitung μ, die Reibung selbst also hier $\mu p \cos \alpha$, so ist im vorliegenden Falle $\mu p \cos \alpha = \frac{p \sin \alpha}{3}$, d. h.

$$\mu = \frac{1}{3} \operatorname{tang} \alpha.$$

Bei den gleitenden Körpern ist bekanntlich der Koeffizient $\mu = \operatorname{tang} \alpha$; man hat also für den rollenden Cylinder das