Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

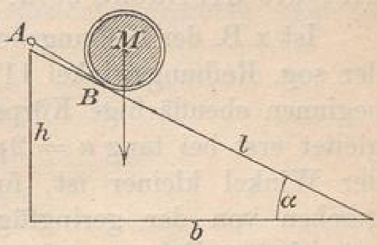
Leipzig, 1897

Anwendung auf Körper, die zugleich rollen und gleiten.

Der Grund, weshalb wir auf die Fadenspannung überhaupt eingingen, wird sich aus der folgenden Aufgabe ergeben.

347) Der Cylinder ist wiederum mit einem Faden umwickelt. Das Ende desselben sei aber bei A an der schiefen Ebene mit Neigung α befestigt, auf welcher der Cylinder herabrollen soll. Beschleunigung und Fadenspannung sollen berechnet werden, ohne dafs die Reibung berücksichtigt wird.

Fig. 256.



Beim senkrechten Fall ergab sich unter Drehungszwang $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}g\right)h}$. Man braucht nur $l \sin\alpha$ für h zu setzen, um hier $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}g\right)l \sin\alpha}$ zu finden, so dafs an Stelle von $g_1 = \frac{2}{3}g$ jetzt $g_1 = \frac{2}{3}g \sin\alpha$ als Beschleunigung tritt. Man kann aber auch so, wie vorher, die Gleichung der Erhaltung der Arbeit benutzen, oder auch B als Drehungspunkt betrachten. Das statische Moment der Schwerkraft in Bezug auf B ist dann $pr \sin\alpha$, das Trägheitsmoment aber $\frac{mr^2}{3} + mr^2 = \frac{2}{3}mr^2$. Es folgt die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{pr \sin\alpha}{\frac{3}{2}mr^2} = \frac{2}{3}\frac{g \sin\alpha}{r},$$

also für M, d. h. für den Radius r, das r-fache oder $g_1 = \frac{2}{3}g \sin\alpha$.

Die Drehung wird, wenn keine Reibung vorhanden ist, durch die Fadenspannung p_1 hervorgerufen, so dafs auch ist: $\gamma = \frac{p_1 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p_1}{mr}$. Gleichsetzung beider Ausdrücke für γ giebt

$$p_1 = \frac{mg \sin\alpha}{3} = \frac{p \sin\alpha}{3}.$$

348) Diese Fadenspannung giebt uns an, wie grofs die Reibung mindestens sein mufs, um das Herabgleiten zu verhindern und die Cylinderbewegung zu einer rein rollenden zu machen.

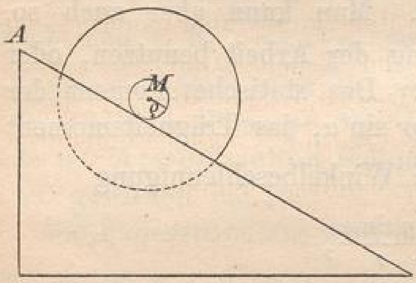
Ist also der Reibungskoeffizient für Gleitung μ, die Reibung selbst also hier $\mu p \cos\alpha$, so ist im vorliegenden Falle $\mu p \cos\alpha = \frac{p \sin\alpha}{3}$, d. h.

$$\mu = \frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha.$$

Bei den gleitenden Körpern ist bekanntlich der Koeffizient $\mu = \operatorname{tang}\alpha$; man hat also für den rollenden Cylinder das bemerkenswerte Resultat, dafs sein Gleiten schon durch den dritten Teil derjenigen Reibung verhindert wird, die einen nicht rollenden Körper vom Gleiten abhält. Mit anderen Worten: Bei nicht rollenden Körpern findet das Gleiten bereits statt bei tang $\alpha \leqq \mu$, bei dem rollenden Cylinder erst bei tang $\alpha \geqq 3\mu$. Die Steigung der schiefen Ebene darf also hier die dreifache sein, ohne dafs Gleitung stattfindet.*)

Ist z. B. der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}2$, so folgt aus tang $\alpha = 0{,}2$ der sog. Reibungswinkel $11^0\,18'\,40''$. Sobald die Neigung gröfser ist, beginnen ebenflächige Körper zu gleiten. Der rollende Cylinder aber gleitet erst bei tang $\alpha = 2\mu = 0{,}6$, d. h. bei $\alpha = 30^0\,57'\,50''$. Sobald der Winkel kleiner ist, findet lediglich ein Rollen statt, und abgesehen von der geringfügigen rollenden Reibung gelten die oben entwickelten Bewegungsformeln. Ist dagegen die Neigung gröfser, so findet Rollen und Gleiten zugleich statt. Dies ist ein ganz anderer Fall mit besonderen Bewegungsgleichungen. Später soll auf diesen schwierigen Fall noch eingegangen werden.

Fig. 257.



349) Das obige Resultat ändert sich sofort, wenn der Cylinder unter Auflagerung auf eine Achse auf der schiefen Ebene herabrollt.

Zunächst werde hier wiederum die Reibung weggedacht, dafür aber ein Faden, der bei A befestigt ist, um die Achse gewunden. Nach Art der obigen Entwicklung erhält man als Beschleunigung des Punktes M

$$g_1 = g \sin\alpha \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

als Winkelbeschleunigung (am Radius 1) also

$$\gamma = \frac{g_1}{\varrho} = \frac{2g \sin\alpha\,\varrho}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

Die Fadenspannung p_1 am Radius ϱ giebt aber für dasselbe γ den Wert

$$\gamma = \frac{p_1\varrho}{\frac{m r^2}{2}} = \frac{2 p_1 \varrho}{m r^2}.$$

*) In mehreren Lehrbüchern und Abhandlungen finden sich in dieser Beziehung irrtümliche Ableitungen, die auf der falschen Annahme fufsen, dafs der Reibungswinkel derselbe bliebe.