Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

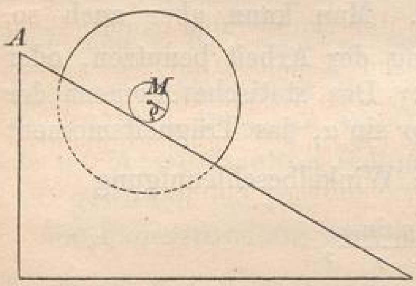
Korrektur des Reibunswinkels bei solchen Problemen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

bemerkenswerte Resultat, dafs sein Gleiten schon durch den dritten Teil derjenigen Reibung verhindert wird, die einen nicht rollenden Körper vom Gleiten abhält. Mit anderen Worten: Bei nicht rollenden Körpern findet das Gleiten bereits statt bei tang $\alpha \leqq \mu$, bei dem rollenden Cylinder erst bei tang $\alpha \geqq 3\mu$. Die Steigung der schiefen Ebene darf also hier die dreifache sein, ohne dafs Gleitung stattfindet.*)

Ist z. B. der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}2$, so folgt aus tang $\alpha = 0{,}2$ der sog. Reibungswinkel $11^0\,18'\,40''$. Sobald die Neigung gröfser ist, beginnen ebenflächige Körper zu gleiten. Der rollende Cylinder aber gleitet erst bei tang $\alpha = 2\mu = 0{,}6$, d. h. bei $\alpha = 30^0\,57'\,50''$. Sobald der Winkel kleiner ist, findet lediglich ein Rollen statt, und abgesehen von der geringfügigen rollenden Reibung gelten die oben entwickelten Bewegungsformeln. Ist dagegen die Neigung gröfser, so findet Rollen und Gleiten zugleich statt. Dies ist ein ganz anderer Fall mit besonderen Bewegungsgleichungen. Später soll auf diesen schwierigen Fall noch eingegangen werden.

Fig. 257.



349) Das obige Resultat ändert sich sofort, wenn der Cylinder unter Auflagerung auf eine Achse auf der schiefen Ebene herabrollt.

Zunächst werde hier wiederum die Reibung weggedacht, dafür aber ein Faden, der bei A befestigt ist, um die Achse gewunden. Nach Art der obigen Entwicklung erhält man als Beschleunigung des Punktes M

$$g_1 = g \sin\alpha \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

als Winkelbeschleunigung (am Radius 1) also

$$\gamma = \frac{g_1}{\varrho} = \frac{2g \sin\alpha\,\varrho}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

Die Fadenspannung p_1 am Radius ϱ giebt aber für dasselbe γ den Wert

$$\gamma = \frac{p_1\varrho}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p_1\varrho}{mr^2}.$$

*) In mehreren Lehrbüchern und Abhandlungen finden sich in dieser Beziehung irrtümliche Ableitungen, die auf der falschen Annahme fufsen, dafs der Reibungswinkel derselbe bliebe.

Aus der Gleichsetzung beider Werte ergiebt sich als Fadenspannung

$$p_1 = \frac{m g r^2 \sin\alpha}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{p \sin\alpha r^2}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

Ist z. B. $r = 10\varrho$, so wird $p_1 = p \sin\alpha \frac{50}{51}$. Ebenso grofs mufs die gleitende Reibung sein, wenn das Gleiten verhindert werden und blofses Rollen stattfinden soll. Der Koeffizient berechnet sich für den Grenzfall aus

$$\mu p \cos\alpha = \frac{p \sin\alpha r^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

also

$$\mu = \frac{r^2}{r^2 + 2\varrho^2} \operatorname{tang}\alpha,$$

im gewählten Beispiele also $\alpha = \frac{50}{51} \operatorname{tang}\alpha$, so dafs der Grenzwinkel aus $\operatorname{tang}\alpha = \frac{51}{50}\mu$ zu berechnen ist.

Ist z. B. wieder $\mu = 0{,}2$, so wird der Grenzwinkel, wie aus $\operatorname{tang}\alpha = \frac{51}{50} \cdot 0{,}2$ folgt, $\alpha = 11^0\,31'\,50''$, während er für nur gleitende Körper war: $11^0\,18'\,40''$. Der Unterschied ist also jetzt ein weit weniger auffallender als bei dem einfach aufliegenden Cylinder, wo der eine Winkel fast dreimal so grofs war als der andere.

Ein entsprechender Versuch kann wieder gemacht werden, indem man das Rad der Atwoodschen Fallmaschine mit der Achse auf zwei parallel gestellte Lineale legt und so auf schiefer Ebene herabrollen läfst. Angenommen, der Reibungskoeffizient wäre 0,2, so würde bei α gröfser als $11^0\,31'\,50''$ fast nur ein Herabgleiten, kaum ein Rollen bemerkbar sein, während ein Cylinder noch bei nahe $30^0\,58'$ einfach herabrollen würde. Für $\varrho = 0$, d. h. für unendlich dünne Achsen, hört der Unterschied ganz auf.

Versuche dieser Art sind mit so einfachen Hülfsmitteln durchzuführen und werfen so überraschendes Licht auf die entsprechenden Punkte der Bewegungslehre und der Reibungstheorie, dafs ihre Nichtberücksichtigung in den Lehrbüchern eine erhebliche Lücke bedeutet.

350) Nur noch ein Beispiel für die schiefe Ebene sei angegeben: das der herabrollenden Kugel unter dem Einflusse der Reibung oder des um den gröfsten Kreis gelegten Fadens. Das Trägheitsmoment der Kugel war schon in Nr. 174 abgeleitet worden. Die Arbeitsgleichung würde hier lauten

$$A = pl \sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + \left(\frac{2}{5} mr^2\right)\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \left(\frac{2}{5} mr^2\right)\frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{7}{5}\,\frac{mv^2}{2}.$$