Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Rollen und Gleiten der Kugel auf schiefer Ebene.

Aus der Gleichsetzung beider Werte ergiebt sich als Fadenspannung

$$p_1 = \frac{m g r^2 \sin \alpha}{r^2 + 2 \varrho^2} = \frac{p \sin \alpha r^2}{r^2 + 2 \varrho^2}.$$

Ist z. B. $r = 10 \varrho$, so wird $p_1 = p \sin \alpha \frac{50}{51}$. Ebenso grofs mufs die gleitende Reibung sein, wenn das Gleiten verhindert werden und blofses Rollen stattfinden soll. Der Koeffizient berechnet sich für den Grenzfall aus

$$\mu p \cos \alpha = \frac{p \sin \alpha r^2}{r^2 + 2 \varrho^2},$$

also

$$\mu = \frac{r^2}{r^2 + 2 \varrho^2} \operatorname{tang} \alpha,$$

im gewählten Beispiele also $\alpha = \frac{50}{51} \operatorname{tang} \alpha$, so dafs der Grenzwinkel aus $\operatorname{tang} \alpha = \frac{51}{50} \mu$ zu berechnen ist.

Ist z. B. wieder $\mu = 0{,}2$, so wird der Grenzwinkel, wie aus $\operatorname{tang} \alpha = \frac{51}{50} \cdot 0{,}2$ folgt, $\alpha = 11^0\, 31'\, 50''$, während er für nur gleitende Körper war: $11^0\, 18'\, 40''$. Der Unterschied ist also jetzt ein weit weniger auffallender als bei dem einfach aufliegenden Cylinder, wo der eine Winkel fast dreimal so grofs war als der andere.

Ein entsprechender Versuch kann wieder gemacht werden, indem man das Rad der Atwoodschen Fallmaschine mit der Achse auf zwei parallel gestellte Lineale legt und so auf schiefer Ebene herabrollen läfst. Angenommen, der Reibungskoeffizient wäre 0,2, so würde bei α gröfser als $11^0\, 31'\, 50''$ fast nur ein Herabgleiten, kaum ein Rollen bemerkbar sein, während ein Cylinder noch bei nahe $30^0\, 58'$ einfach herabrollen würde. Für $\varrho = 0$, d. h. für unendlich dünne Achsen, hört der Unterschied ganz auf.

Versuche dieser Art sind mit so einfachen Hülfsmitteln durchzuführen und werfen so überraschendes Licht auf die entsprechenden Punkte der Bewegungslehre und der Reibungstheorie, dafs ihre Nichtberücksichtigung in den Lehrbüchern eine erhebliche Lücke bedeutet.

350) Nur noch ein Beispiel für die schiefe Ebene sei angegeben: das der herabrollenden Kugel unter dem Einflusse der Reibung oder des um den gröfsten Kreis gelegten Fadens. Das Trägheitsmoment der Kugel war schon in Nr. 174 abgeleitet worden. Die Arbeitsgleichung würde hier lauten

$$A = pl \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \left(\frac{2}{5} mr^2\right) \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \left(\frac{2}{5} mr^2\right) \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{7}{5} \frac{mv^2}{2}.$$

Aus der Gleichung folgt als Geschwindigkeit des Mittelpunktes

$$v = \sqrt{2\left(\frac{5}{7}\, g \sin\alpha\right) l}\,,$$

als Beschleunigung desselben also $g_1 = \frac{5}{7}\, g \sin\alpha$, sodaſs die Winkelbeschleunigung ist

$$\gamma = \frac{5\, g \sin\alpha}{7\, r}\,.$$

Die Fadenspannung p_1 giebt aber die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{p_1\, r}{T} = \frac{p_1\, r}{\frac{2}{5}\, m r^2} = \frac{5\, p_1}{2\, m r}\,.$$

Gleichsetzung beider Werte bestimmt die Fadenspannung als

$$p_1 = \frac{2}{7}\, p \sin\alpha.$$

Ersetzt man für den Grenzfall p_1 wieder durch die Reibung, so folgt

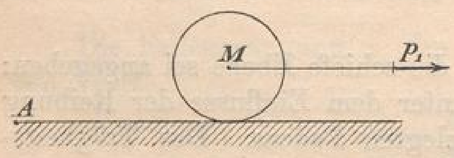
$$\mu p \cos\alpha = \frac{2}{7}\, p \sin\alpha\,,$$

d. h. $$\mu = \frac{2}{7} \operatorname{tang}\alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{7}{2}\,\mu.$$

Daraus ergeben sich wiederum entsprechende Folgerungen. Beim Reibungskoeffizienten $\mu = 0{,}2$ würde $\operatorname{tang}\alpha = \frac{7}{2} 0{,}2 = 0{,}7$ den Grenzwinkel $\alpha = 34^0\, 39'\, 30''$ (statt $11^0\, 18'\, 40''$) für das bloſse Rollen ergeben.

351) Da die Lehrbücher elementaren Charakters auf die entwickelten Unterschiede keine Rücksicht nehmen, kommen bisweilen gelegentlich der Reibung unmögliche Beispiele vor, durch welche die bestehenden Unklarheiten noch unterstützt werden. Fast nirgends wird man z. B. folgende naheliegende Aufgabe gestellt oder berücksichtigt finden:

Fig. 258.



Ein Cylinder vom Gewichte p werde durch eine an seiner Achse angreifende Horizontalkraft p_1 auf horizontaler Bahn bewegt. Wie groſs muſs die gleitende Reibung mindestens sein, damit nicht Gleitung, sondern nur Rollen entstehe?

Zunächst werde wieder von der Reibung abgesehen und das Rollen durch einen Faden, der bei A befestigt und um den Cylinder