Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Rollen und Gleiten des Cylinders auf horizontaler Ebene.

Aus der Gleichung folgt als Geschwindigkeit des Mittelpunktes

$$v = \sqrt{2\left(\tfrac{5}{7}\,g\sin\alpha\right)l},$$

als Beschleunigung desselben also $g_1 = \frac{5}{7}\,g \sin\alpha$, sodafs die Winkelbeschleunigung ist

$$\gamma = \frac{5\,g\sin\alpha}{7\,r}.$$

Die Fadenspannung p_1 giebt aber die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{p_1\,r}{T} = \frac{p_1\,r}{\frac{2}{5}\,m r^2} = \frac{5\,p_1}{2\,m\,r}.$$

Gleichsetzung beider Werte bestimmt die Fadenspannung als

$$p_1 = \tfrac{2}{7}\,p \sin\alpha.$$

Ersetzt man für den Grenzfall p_1 wieder durch die Reibung, so folgt

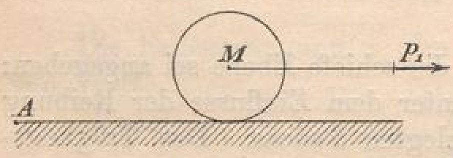
$$\mu p \cos\alpha = \tfrac{2}{7}\,p \sin\alpha,$$

d. h. $$\mu = \tfrac{2}{7}\tang\alpha \quad\text{und}\quad \tang\alpha = \tfrac{7}{2}\,\mu.$$

Daraus ergeben sich wiederum entsprechende Folgerungen. Beim Reibungskoeffizienten $\mu = 0{,}2$ würde $\tang \alpha = \frac{7}{2}0{,}2 = 0{,}7$ den Grenzwinkel $\alpha = 34^0\,39'\,30''$ (statt $11^0\,18'\,40''$) für das blofse Rollen ergeben.

351) Da die Lehrbücher elementaren Charakters auf die entwickelten Unterschiede keine Rücksicht nehmen, kommen bisweilen gelegentlich der Reibung unmögliche Beispiele vor, durch welche die bestehenden Unklarheiten noch unterstützt werden. Fast nirgends wird man z. B. folgende naheliegende Aufgabe gestellt oder berücksichtigt finden:

Fig. 258.



Ein Cylinder vom Gewichte p werde durch eine an seiner Achse angreifende Horizontalkraft p_1 auf horizontaler Bahn bewegt. Wie grofs mufs die gleitende Reibung mindestens sein, damit nicht Gleitung, sondern nur Rollen entstehe?

Zunächst werde wieder von der Reibung abgesehen und das Rollen durch einen Faden, der bei A befestigt und um den Cylinder geschlungen ist, erzwungen. Legt nun der Angriffspunkt den Weg h zurück, so ist die Arbeitsgleichung

$$A = p_1 h = \frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4} mv^2.$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}\frac{p_1}{m}\right)h},$$

für den Punkt M also die Beschleunigung $g_1 = \frac{2}{3}\frac{p_1}{m}$ und demnach die Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{2p_1}{3mr}$. Wie früher ist zugleich die Fadenspannung $p_2 : \gamma = \frac{p^2 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p^2}{mr}$, und durch die Gleichsetzung ergiebt sich $\frac{2p_2}{mr} = \frac{2p_1}{3mr}$ oder $p_2 = \frac{p_1}{3}$.

Wie grofs also auch das Gewicht und der Radius des Cylinders seien, die Fadenspannung ist in allen Fällen der dritte Teil der Zugkraft.

Soll demnach auch ohne Faden nur Rollung ohne jedes Gleiten stattfinden, so mufs die Reibung mindestens der dritte Teil der Zugkraft sein. Sie ist aber in diesem Falle μp, also ist der Minimalwert für μ zu berechnen aus $\mu p = \frac{p_1}{3}$, d. h. er ist $\mu = \frac{p_1}{3p}$.

Sobald $\mu < \frac{p_1}{3p}$ oder $p_1 > 3\mu p$ ist, findet Gleitung und Rollung zugleich statt, und ganz neue Bewegungsgleichungen sind zu bilden. Ist z. B. $\mu = 0{,}2$, so mufs p_1 unterhalb $0{,}6\,p$ bleiben, damit nur Rollung stattfinde.

Unter dieser Bedingung bewegt sich dann M, abgesehen von der geringfügigen rollenden Reibung, nach den Formeln

$$v = \frac{2p_1}{3m}t, \quad l = \frac{1}{2}\frac{2p_1}{3m}t^2, \quad v = \sqrt{2\frac{2p_1}{3m}l},$$

die Drehung aber gehorcht den Formeln

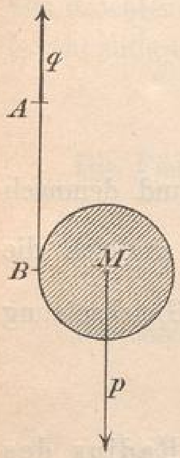
$$\vartheta = \frac{2p_1}{3mr}t, \quad \omega = \frac{1}{2}\frac{2p_1}{3mr}t^2, \quad \vartheta = \sqrt{2\frac{2p_1}{3mr}\omega}.$$

352) Wie aber erfolgt die Bewegung, wenn jene Bedingung nicht stattfindet, d. h. wenn $p_1 > 3\mu p$ ist?

Die Lösung ergiebt sich durch folgende Hülfsaufgabe, die auch an sich nicht ohne Interesse ist.

Ein Faden sei um einen Cylinder vom Gewichte p geschlungen; er werde durch eine Kraft q bei A senkrecht nach oben gezogen. Wie bewegen sich die Punkte M und A, und wie dreht sich der Cylinder?

Fig. 259.



Auflösung. Man zerlege p in q und $p - q$. Die Kraft q und die nach oben gerichtete $(-q)$ bilden das Kräftepaar, welches den Cylinder in Drehung versetzt, die Kraft $p - q$ zieht ihn nach unten. Die Drehung erfolgt also mit der Beschleunigung $\gamma = \frac{qr}{\left(\frac{mr^2}{2}\right)} = \frac{2q}{mr}$, also am Rande mit der Beschleunigung $g_1 = \frac{2q}{m}$. Die Senkung des Punktes M geschieht mit der Beschleunigung $g_2 = \frac{p-q}{m}$. Der Punkt B senkt sich erstens mit der Beschleunigung g_2, steigt aber zweitens mit der Beschleunigung g_1, seine wirkliche Beschleunigung, ebenso die von A, ist demnach

$$g_2 - g_1 = \frac{p-q}{m} - \frac{2q}{m} = \frac{p-3q}{m}.$$

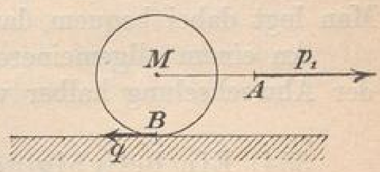
(Ist $p = 3q$, so steht A still, was mit dem früher behandelten Falle übereinstimmt.)

Es ist nicht überflüssig, auch hier den Satz von der Erhaltung der Arbeit zu prüfen. Die Arbeitswucht der bewegten Masse ist $\frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2}$. Ist h die Senkung von M, so ist $v = \sqrt{2g_2h}$, also $\frac{mv^2}{2} = mg_2h = (p-q)h$. Ist ferner ω der Drehungsweg für den Radius 1, so ist die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = \sqrt{2\gamma\omega}$, also $T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mr^2}{2}\cdot\gamma\omega = \frac{mr^2}{2}\cdot\frac{2q}{mr}\omega = qr\omega$. Nun ist aber $\omega : h = \gamma : g_2 = \frac{2q}{mr} : \frac{p-q}{m}$, also $\omega = \frac{2ph}{r(p-q)}$. Folglich ist $T\frac{\vartheta^2}{2} = qr\omega = \frac{2q^2h}{p-q}$. Die Summe der Arbeitsfähigkeiten ist also $(p-q)\,h + \frac{2q^2h}{p-q} = \frac{h}{p-q}[p + 3q^2 - 2pq]$. Ist dies eben so grofs wie die geleisteten Arbeiten? Die Kraft p hat den Weg h nach unten, die Kraft q den Weg h_1 nach oben zurückgelegt; die Leistungen sind also zusammen $ph - qh_1$. Es ist aber $h_1 : h = g_3 : g_2 = \frac{h-3q}{m} : \frac{h-q}{m}$, also $h_1 = h\frac{p-3q}{p-q}$ und $qh_1 = qh\frac{p-3q}{p-q}$. Die Arbeitsleistung ist also $ph - qh\frac{p-3q}{q-p}$

$= \frac{h}{p-q}[p^2 + 3q^2 - 2pq]$. Dies stimmt mit dem obigen Resultate überein, die Giltigkeit des Satzes ist also nachgewiesen.

353) Die Anwendung auf das Reibungsproblem ist nun sehr einfach. Das Gewicht des Cylinders sei wiederum p, die ziehende Kraft p_1, die gleitende Reibung $q = \mu p$ und $p_1 > 3q$, wie vorausgesetzt werden musste, um Rollung und Gleitung zugleich zu erhalten. Die rollende Reibung bleibe unberücksichtigt. Die Beschleunigung der Drehung erfolgt durch das Kräftepaar $\pm q$ am Radius r, ist also $\gamma = \frac{qr}{\left(\frac{mr^2}{2}\right)}$

Fig. 260.



$= \frac{2\mu pr}{mr^2} = \frac{2\mu g}{r}$. An der Peripherie ist die Beschleunigung $g_1 = 2\mu g$. Der Kraftüberschuſs $p_1 - q = p_1 - \mu p$ bringt die davon unabhängige Beschleunigung von M hervor, und diese wird $g_2 = \frac{p_1 - \mu p}{m}$. Die Schleifung des Punktes B hat die Beschleunigung

$$g_3 = g_2 - g_1 = \frac{p_1 - \mu p}{m} - 2\mu g = \frac{p_1 - 3\mu p}{m}.$$

(Das Schleifen ist Null, sobald $p_1 = 3\mu p$ ist. Es findet statt, sobald $p_1 > 3\mu p$ ist, es findet nicht statt, sobald $p_1 < 3\mu p$ ist. Die Anfangsgeschwindigkeit war als Null vorausgesetzt.) Der von M zurückgelegte Weg l verhält sich zum Reibungswege l_1 wie g_2 zu g_3

Die Arbeitsgleichung würde sein

$$A = p_1 l = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} + ql_1,$$

wo der letzte Posten die Reibungsarbeit ist. Daſs aber

$$p_1 l - ql_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2}$$

ist, war schon bei dem Hülfsbeispiele nachgewiesen worden.

Die Bewegungsgleichungen für M sind

$$v = \frac{p_1 - \mu p}{m} t, \quad l = \frac{1}{2}\frac{p_1 - \mu p}{m} t^2, \quad v = \sqrt{2\frac{p_1 - \mu p}{m} l};$$

die Gleichungen für die Drehung sind

$$\vartheta = \frac{2\mu g}{r} t, \quad \omega = \frac{1}{2}\frac{2\mu g}{r} t^2, \quad \vartheta = \sqrt{2\frac{2\mu g}{r}\omega}.$$

Das Schleifen geschieht nach den Formeln

$$v_1 = \frac{p_1 - 3\mu p}{m} t, \quad l_1 = \frac{1}{2}\frac{p_1 - 3\mu p}{m} t^2, \quad v_1 = \sqrt{2\frac{p_1 - 3\mu p}{m} l_1}.$$

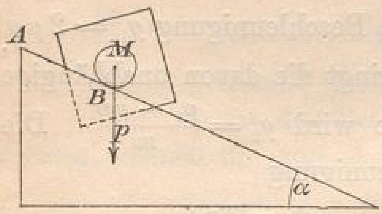
Ist die Reibung $\mu p > \frac{p_1}{3}$, so wirkt sie trotzdem stets nur in der Stärke $\mu p = \frac{p_1}{3}$. Setzt man dies ein, so wird das Schleifen Null, und die Formeln werden die früheren.

Die Richtigkeit des Ganzen kann man erproben, indem man untersucht, ob der Satz von der Erhaltung der Arbeit gewahrt bleibt. Man legt dabei bequem das Ende der ersten Sekunde zu grunde.

An einem allgemeineren Beispiele soll dies durchgeführt werden; der Abwechselung halber werde dabei die Behandlung geändert.

354) Ein beliebig gestalteter Körper rolle unter Achsenlagerung von schiefer Ebene herab. Die Achse habe den Radius ϱ, und ihre Mittellinie gehe durch den Schwerpunkt des Körpers. Wie erfolgt die Bewegung?

Fig 261.



Zunächst sei die Reibung Null und das Drehen durch den bei A befestigten und um den Cylinder geschlungenen Faden erzwungen. Die Bewegung ist Drehung um M und gleichzeitige Verschiebung oder auch Drehung um den jedesmaligen Berührungspunkt B allein. Das Moment der Schwerkraft in bezug auf diesen ist $p \sin \alpha$, die Winkelbeschleunigung also

$$\gamma = \frac{p\varrho \sin \alpha}{T + m\varrho^2} = g\frac{m\varrho \sin \alpha}{T + m\varrho^2}.$$

Ebenso grofs ist die Winkelbeschleunigung der Drehung um M. Die geradlinige Beschleunigung von M ist

$$g_1 = \gamma\varrho = \frac{p\varrho^2 \sin \alpha}{T + m\varrho^2} = g\frac{m\varrho^2 \sin \alpha}{T + m\varrho^2}.$$

Die Fadenspannung ist

$$p_1 = mg \sin \alpha - mg_1 = mg \sin \alpha \left(1 - \frac{m\varrho^2}{T + m\varrho^2}\right) = mg \sin \alpha \frac{T}{T + m\varrho^2}.$$

Soll die Reibung den Faden ersetzen, so muss sein

$$\mu p \cos \alpha \geqq p \sin \alpha \frac{T}{T + m\varrho^2};$$

der Koeffizient also

$$\mu \geqq \operatorname{tang} \alpha \frac{T}{T + m\varrho^2}.$$

Der Reibungswinkel für gegebenes μ folgt schliefslich aus

$$\operatorname{tang} \alpha = \mu \cdot \frac{T + m\varrho^2}{T}.$$