Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Rollen und Gleiten beliebig gestalteter Körper auf schiefer Ebene.

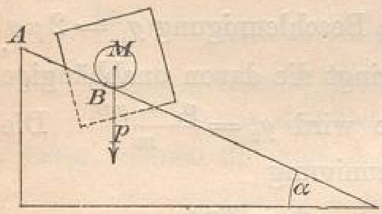
Ist die Reibung $\mu p > \frac{p_1}{3}$, so wirkt sie trotzdem stets nur in der Stärke $\mu p = \frac{p_1}{3}$. Setzt man dies ein, so wird das Schleifen Null, und die Formeln werden die früheren.

Die Richtigkeit des Ganzen kann man erproben, indem man untersucht, ob der Satz von der Erhaltung der Arbeit gewahrt bleibt. Man legt dabei bequem das Ende der ersten Sekunde zu grunde.

An einem allgemeineren Beispiele soll dies durchgeführt werden; der Abwechselung halber werde dabei die Behandlung geändert.

354) Ein beliebig gestalteter Körper rolle unter Achsenlagerung von schiefer Ebene herab. Die Achse habe den Radius ϱ, und ihre Mittellinie gehe durch den Schwerpunkt des Körpers. Wie erfolgt die Bewegung?

Fig 261.



Zunächst sei die Reibung Null und das Drehen durch den bei A befestigten und um den Cylinder geschlungenen Faden erzwungen. Die Bewegung ist Drehung um M und gleichzeitige Verschiebung oder auch Drehung um den jedesmaligen Berührungspunkt B allein. Das Moment der Schwerkraft in bezug auf diesen ist $p \sin \alpha$, die Winkelbeschleunigung also

$$\gamma = \frac{p\varrho \sin \alpha}{T + m\varrho^2} = g \frac{m\varrho \sin \alpha}{T + m\varrho^2}.$$

Ebenso grofs ist die Winkelbeschleunigung der Drehung um M. Die geradlinige Beschleunigung von M ist

$$g_1 = \gamma \varrho = \frac{p\varrho^2 \sin \alpha}{T + m\varrho^2} = g \frac{m\varrho^2 \sin \alpha}{T + m\varrho^2}.$$

Die Fadenspannung ist

$$p_1 = mg \sin \alpha - mg_1 = mg \sin \alpha \left(1 - \frac{m\varrho^2}{T + m\varrho^2}\right) = mg \sin \alpha \frac{T}{T + m\varrho^2}.$$

Soll die Reibung den Faden ersetzen, so muss sein

$$\mu p \cos \alpha \geqq p \sin \alpha \frac{T}{T + m\varrho^2};$$

der Koeffizient also

$$\mu \geqq \operatorname{tang} \alpha \frac{T}{T + m\varrho^2}.$$

Der Reibungswinkel für gegebenes μ folgt schliefslich aus

$$\operatorname{tang} \alpha = \mu \cdot \frac{T + m\varrho^2}{T}.$$

Ist tang α kleiner, so findet die Bewegung nach den soeben berechneten Beschleunigungen g_1 und γ statt. Ist tang α gröfser, so findet Gleitung und Rollung zugleich statt. Die Drehung entsteht durch das Kräftepaar $\pm\, \mu p \cos\alpha$ mit dem Hebelarme ϱ, hat also die Winkelbeschleunigung

$$\gamma_1 = \frac{\mu p \cos\alpha \varrho}{T} = g \frac{\mu m \varrho \cos\alpha}{T};$$

der Kraftüberschuss $p \sin\alpha - \mu p \cos\alpha$ giebt die fortschreitende Beschleunigung für M, nämlich

$$g_1 = \frac{p \sin\alpha - \mu p \cos\alpha}{m} = g\,(\sin\alpha - \mu \cos\alpha).$$

An der Peripherie ist die Drehbeschleunigung

$$g_2 - \gamma_1 \varrho = \frac{\mu p \cos\alpha \varrho^2}{T} = g \frac{\mu m \cos\alpha \varrho^2}{T},$$

die Beschleunigung des Schleifens ist also

$$g_3 = g_1 - g_2 = g\left(\sin\alpha - \mu \cos\alpha \frac{T + m\varrho^2}{T}\right).$$

(Das Schleifen ist Null, sobald $\mu \leq \tang\alpha \frac{T + m\varrho^2}{T}$ ist, die Probe stimmt also. Ist die Reibung gröfser, so wirkt sie trotzdem nur wie die Fadenspannung, nämlich nach dem Gesetze $\mu = \tang\alpha \frac{T + m\varrho^2}{T}$.)

355) Eine weitere Probe werde gemacht, um zu zeigen, wie es sich bei Reibungsproblemen mit dem Satze von der Erhaltung der Arbeit gestaltet.

Ist zunächst l_1 der von M zurückgelegte Weg, so ergiebt sich der Gleitungsweg aus der Proportion $l_3 : l_1 = g_3 : g_1$ als

$$l_3 = l_1 \frac{g_3}{g_1} = l_1 \frac{\sin\alpha - \mu \cos\alpha \frac{T + m\varrho^2}{T}}{\sin\alpha - \mu \cos\alpha}.$$

Man setze nun folgende Arbeitsgleichung an:

Arbeit der Kraft = Energie der Massenbewegung + Reibungsarbeit,

oder

Arbeit der Kraft — Reibungsarbeit = Energie der Massenbewegung,

also

$$p l_1 \sin\alpha - \mu p \cos\alpha\, l_1 \frac{\sin\alpha - \mu \cos\alpha \frac{T + m\varrho^2}{T}}{\sin\alpha - \mu \cos\alpha} = \frac{m v^2}{2} + T \frac{\vartheta^2}{2}.$$

Ist diese Gleichung richtig? Als Zeitpunkt wähle man z. B. das Ende der ersten Sekunde. Dann ist

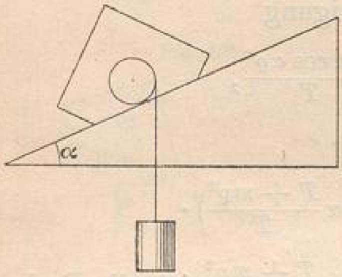
$$l_1 = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),\quad v = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),\quad \vartheta = \gamma = \frac{\mu p\cos\alpha\varrho}{T}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte formt sich die linke Seite um zu

$$\frac{pg}{2}\left[\sin^2\alpha - 2\mu\sin\alpha\cos\alpha + \mu^2\cos^2\alpha\frac{T + m\varrho^2}{T}\right].$$

Die rechte Seite führt auf denselben Wert. Die Probe mit dem Satze von der Erhaltung der Arbeit stimmt also gleichfalls.

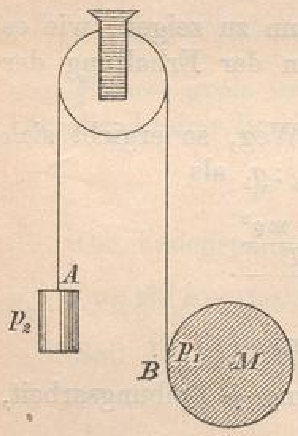
Fig. 262.



Dem Leser bleibe es überlassen, eine ganze Schar hierher gehöriger Aufgaben, z. B. solche, bei denen es sich um das Hinaufrollen handelt, selbst anzusetzen. Um jedoch zu zeigen, wie man die Schwierigkeiten des Ansatzes in mannigfacher Weise überwinden kann, behandeln wir noch ein verwandtes Beispiel.

356) Ein Faden sei über eine leichtbewegliche Rolle gelegt, deren Masse Null sei. An dem Ende A sei ein Gewicht befestigt, das andere Ende sei um einen Cylinder vom Radius r und vom Gewichte p_1 geschlungen, der infolge der Fadenspannung und Schwerkraft abrollen wird. Wie erfolgen die einzelnen Bewegungen?

Fig. 263.



Auflösung. Sinkt A mit der Beschleunigung g_2 statt g, so bleibt die Fadenspannung $S = (g - g_2)\,m_2$. Da die Masse der oberen Rolle als Null angenommen ist, so herrscht auf der andern Seite dieselbe Fadenspannung. Damit ist die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt, bei der es sich um die Fadenspannung g statt S handelte, nur ist noch die Unbekannte g_2 darin. Dort erfolgte die Drehung mit der Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{2S}{m_1 r} = \frac{2m_2(g - g_2)}{m_1 r}$, an der Peripherie also mit $g_3 = \frac{2S}{m_1} = \frac{2m_2(g - g_2)}{m_1}$, M dagegen sank mit der Beschleunigung $g_1 = \frac{p_1 - S}{m_1} = \frac{m_1 g - m_2(g - g_2)}{m_1}$. Die beiden Bewegungen von B sind entgegengesetzt, die wirkliche Bewegung also