



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Ein dynamisches Übungsbeispiel.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Ist diese Gleichung richtig? Als Zeitpunkt wähle man z. B. das Ende der ersten Sekunde. Dann ist

$$l_1 = \frac{g}{2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad v = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad \vartheta = \gamma = \frac{\mu p \cos \alpha g}{T}.$$

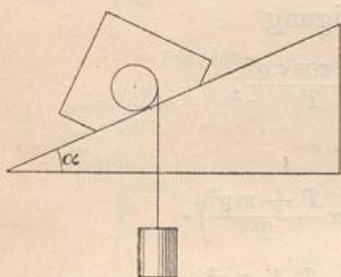
Durch Einsetzung dieser Werte formt sich die linke Seite um zu

$$\frac{pg}{2} \left[\sin^2 \alpha - 2 \mu \sin \alpha \cos \alpha + \mu^2 \cos^2 \alpha \frac{T + m g^2}{T} \right].$$

Die rechte Seite führt auf denselben Wert. Die Probe mit dem Satze von der Erhaltung der Arbeit stimmt also gleichfalls.

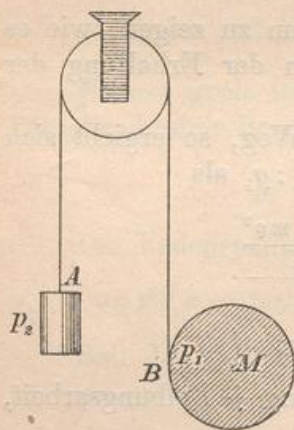
Dem Leser bleibe es überlassen, eine ganze Schar hierher gehöriger Aufgaben, z. B. solche, bei denen es sich um das Hinaufrollen handelt, selbst anzusetzen. Um jedoch zu zeigen, wie man die Schwierigkeiten des Ansatzes in mannigfacher Weise überwinden kann, behandeln wir noch ein verwandtes Beispiel.

Fig. 262.



356) Ein Faden sei über eine leichtbewegliche Rolle gelegt, deren Masse Null sei. An dem Ende *A* sei ein Gewicht befestigt, das andere Ende sei um einen Cylinder vom Radius *r* und vom Gewichte *p*₁ geschlungen, der infolge der Fadenspannung und Schwerkraft abrollen wird. Wie erfolgen die einzelnen Bewegungen?

Fig. 263.



Auflösung. Sinkt *A* mit der Beschleunigung *g*₂ statt *g*, so bleibt die Fadenspannung $S = (g - g_2) m_2$. Da die Masse der oberen Rolle als Null angenommen ist, so herrscht auf der andern Seite dieselbe Fadenspannung. Damit ist die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt, bei der es sich um die Fadenspannung *g* statt *S* handelte, nur ist noch die Unbekannte *g*₂ darin. Dort erfolgte die Drehung mit der Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{2S}{m_1 r} = \frac{2m_2(g - g_2)}{m_1 r}, \quad \text{an der Peripherie also mit } g_3 = \frac{2S}{m_1} = \frac{2m_2(g - g_2)}{m_1},$$

$$M \text{ dagegen sank mit der Beschleunigung } g_1 = \frac{p_1 - S}{m_1} = \frac{p_1 g - m_2(g - g_2)}{m_1}.$$

Die beiden Bewegungen von *B* sind entgegengesetzt, die wirkliche Bewegung also

$$g_3 - g_1 = \frac{2m_2(g - g_2) - m_1g + m_2(g - g_2)}{m_1} = \frac{3m_2(g - g_2) - m_1g}{m_1},$$

und dies ist zugleich die Beschleunigung g_2 von A , sodass

$$g_2 = \frac{3m_2g - 3m_2g_2 - m_1g}{m_1}.$$

Daraus folgt

$$g_2 = \frac{3m_2 - m_1}{3m_2 + m_1}g = g \frac{3p_2 - p_1}{3p_2 + p_1}.$$

Dies in die Gleichungen für γ und g_1 eingesetzt, giebt die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{4m_2g}{r[3m_2 + m_1]} = \frac{4p_2g}{r[3p_2 + p_1]},$$

für M aber die Beschleunigung

$$g_1 = g \frac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2} = g \frac{p_1 + p_2}{p_1 + 3p_2}.$$

Setzt man z. B. $p_1 = 3p_2$, so wird, wie in einem früheren Beispiele, $g_2 = 0$, $g_1 = \frac{2}{3}g$. Setzt man $p_1 = \infty$, so wird $g_2 = g$, womit A die grösste mögliche Geschwindigkeit erhält. Dabei wird $g_1 = \frac{g}{3}$, was die geringste Senkungsbeschleunigung für M giebt. (Ein Steigen von M würde nur möglich sein, wenn man das Gewicht p_2 durch eine Kraft ersetzte, die nicht an die Maximalbeschleunigung g gebunden ist.)

Berücksichtigt man die Masse der oberen Rolle, so wird die Lösung nicht viel schwieriger, nur ist natürlich die Fadenspannung rechts eine andere, als links. Ist nämlich die Spannung links wieder $S = m_2(g - g_2)$, so würde, da die Rolle am Rande die Beschleunigung g_2 erhält und ihre auf den Rand reduzierte Masse $\frac{m_4}{2}$ ist, für die Spannung rechts nur übrig bleiben $S - \frac{m_4}{2}g_2$ oder $S_1 = m_2(g - g_2) - \frac{m_4}{2}g_2 = m_2g - g_2\left(m_2 + \frac{m_4}{2}\right)$. Von jetzt ab ist die Aufgabe zu behandeln wie vorher.

357) Auch die Schwungradtheorie lässt sich mit den bisherigen Hilfsmitteln behandeln. Man kann bei gegebener Schwungmasse die Grösse der Schwankungen in der Geschwindigkeit und umgekehrt aus der zulässigen Schwankung die Schwungmasse berechnen. Über dieses Kapitel vergleiche man den Anhang.

Zu entsprechenden Beispielen können noch herangezogen werden der Drehungskörper mit symmetrischem Schnitt in Nr. 125, besonders der ringförmige Wulst in Nr. 126, die Kugelbetrachtungen in Nr. 174 und 175, besonders die Stofs- und Pendeltheorie, die Energiezunahme

der sich zusammenziehenden Erde in Nr. 177, die Drehungsparaboloide verschiedener Ordnung in der Tabelle des Abschnittes 188.

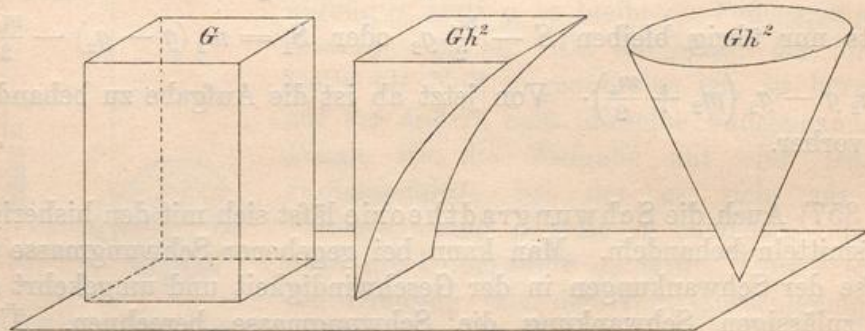
Man erkennt, welch reichen Übungsstoff man schon an diese einfachsten Körperformen anschließen kann, und wie viele wichtige Kapitel der Mechanik nur mit Hülfe der Trägheitsmomente erschlossen werden können.

358) In ähnlicher Weise wie der Kreiscylinder und der Rechteckkörper können andere senkrechte Cylinder und Prismen bezüglich der Trägheitsmomente behandelt werden, da jede der früher besprochenen ebenen Flächen als Grundfläche genommen werden kann.

Man beginnt mit T_u . Ist F der horizontale Querschnitt, so folgt Fy^2 als sein Trägheitsmoment, also wird $T_u = \frac{Fh^3}{3}$, und für den Schwerpunktschnitt wird $T_{xy} = \frac{Fh^3}{12} = \frac{Jh^2}{12}$. Ist ferner t_x das eine axiale Trägheitsmoment der Grundfläche, so ist $t_x h$ das des Körpers für den entsprechenden senkrechten Schnitt, d. h. es ist $T_{xz} = t_x h$. Ist t_y das andere Axialmoment der Grundfläche, so wird $T_{yz} = t_y h$. Für die senkrechte Schwerpunktsachse wird nun $T_z = T_{xz} + T_{yz}$, für die durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte X-Achse wird $T_x = T_{yx} + T_{zx}$, für die Y-Achse $T_y = T_{zy} + T_{xy}$. Endlich wird das Polarmoment für den Schwerpunkt des Körpers $T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx}$.

(Auch für schräge Prismen und Cylinder lassen sich gewisse Momente leicht berechnen, andere aber erfordern Kenntnisse des nächsten Abschnittes. So läßt sich z. B. das schiefe Parallelepiped oft in ein senkrechtes Prisma und zwei Dachkörper zerlegen, welche letzteren aber der Ordnung 1 angehören.)

Fig. 264.



359) Im Anschluß an Fig. 130 lassen sich auch die Trägheitsmomente der Körper von der Ordnung Null stereometrisch veranschaulichen. Wegen der Querschnittsformel $q_y = Ty^2$ handelt es sich um eine Darstellung durch Körper von der Ordnung 2. So