Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

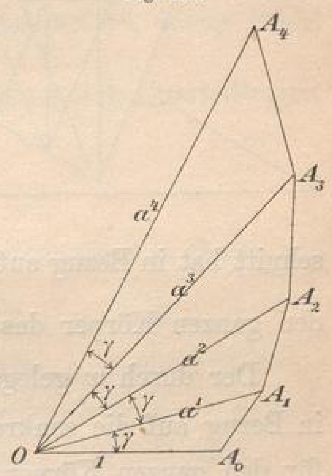
Leipzig, 1897

Dreieickskörper.

ist z. B. das Trägheitsmoment des ersten Körpers in Fig. 264 gleich dem Inhalte des zweiten parabolischen und auch des dritten Körpers, sobald nur die letzteren statt der Grundfläche G die Grundfläche Gh^2 erhalten.

Das Axialmoment des ersten in Bezug auf die senkrechte Achse kann man durch ein Prisma oder einen Cylinder von derselben Höhe darstellen, dessen Grundfläche gleich dem polaren Trägheitsmomente der Grundfläche des ersten Körpers ist. Ist letztere z. B. ein Quadrat von der Seite b, so hat man für die Hülfskörper die Grundfläche $\frac{b^4}{6}$ zu nehmen.

Fig. 265.



Da hier und später für die Linien mehrfach Ausdrücke höherer Dimension auftreten, so sei an folgendes erinnert.

360) Um Ausdrücke wie $a^2, a^3, a^4, \ldots$ als gerade Linien darstellen zu können, mufs man neben der Länge a noch die Länge der Einheit kennen. Man bildet nun aus 1 und a ein beliebiges Dreieck OA_0A_1, setzt auf OA_1 ein ähnliches, auf OA_2 wiederum ein ähnliches und fährt so fort, dann erhält man OA_2 als a^2, OA_3 als a^3, OA_4 als a^4 u. s. w. Dies folgt aus Proportionen wie $1 : a = a : x$ oder $a : a^2 = a^2 : x$ u. s. w.

Schaltet man als Winkelhalbierende die mittleren Proportionalen zweier aufeinanderfolgenden Strahlen ein, so erhält man auch die Längen für $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{2}}$ u. s. w. Fährt man nach unten fort, so erhält man zunächst $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ u. s. w., oder, was dasselbe ist, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, u. s. w. Die so entstehenden Eckpunkte liegen auf einer logarithmischen Spirale. Hat man diese korrekt gezeichnet und läfst man die Winkeltheilung mit Hülfe des probeweisen Zirkelabstechens auf einem Kreisbogen zu, so kann man alle Potenzen von a mit rationalem Exponenten im Prinzip konstruieren. Dreiteilung des Winkels γ giebt dann bis zur Spirale reichende Strahlen von der Länge $a^{\frac{1}{3}}$ und $a^{\frac{2}{3}}$.

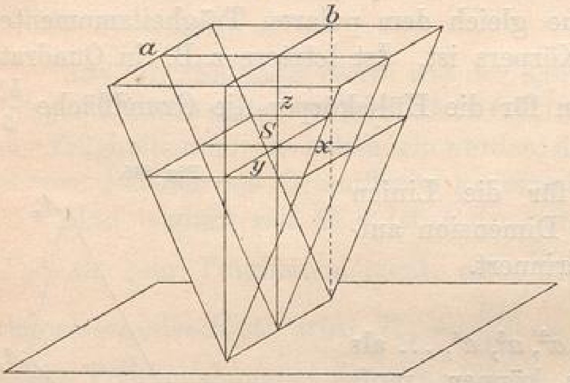
C. Körper von der Ordnung 1.

361) Der symmetrische Dreieckskörper mit rechteckiger Grundfläche.

Ist $G = ab$ der Oberschnitt, so ist der Horizontalschnitt in der

Höhe z gleich $G\frac{z}{h}$, also sein Trägheitsmoment in Bezug auf die untere Fläche $\frac{G}{h}z^3$, so daſs nach der Schichtenformel für den ganzen Körper wird

Fig. 266.



$$T_u = \frac{G}{h}\frac{h^4}{4} = \frac{Gh^3}{4} = J\frac{h^2}{2}.$$

Verlegung nach dem durch S gelegten Horizontalschnitte giebt

$$T_{xy} = \frac{Jh^2}{2} - J\left(\frac{3}{3}h\right)^2$$

$$= \frac{Jh^2}{18} \text{ oder auch } \frac{Gh^3}{36}.$$

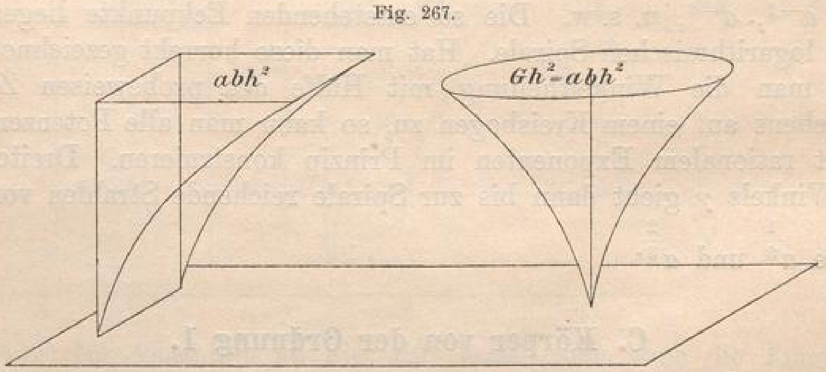
(Oder: Der durch x gelegte senkrechte Dreiecksschnitt hat in Bezug auf die X-Achse das Moment $\frac{bh^3}{36}$, demnach ist für den ganzen Körper das Planmoment $T_{xy} = \frac{bh^3}{36}a = \frac{Gh^3}{36}$.)

Der durch x gelegte senkrechte Dreiecksschnitt hat nach Nr. 32 in Bezug auf die senkrechte Mittellinie das Moment $\frac{hb^3}{48}$, folglich ist für den ganzen Körper

$$T_{yz} = \frac{hb^3}{48}a = \frac{Jb^2}{24}.$$

In Bezug auf den durch x gelegten senkrechten Dreiecksschnitt hat der Körper nach der Prismenformel $T_{zx} = \frac{Ja^2}{12}$.

Fig. 267.



Für die durch den Körperschwerpunkt gelegten Koordinatenachsen erhält man also

$$T_x = \frac{Jh^2}{18} + \frac{Ja^2}{12} = \frac{J}{36}(2h^2 + 3a^2),\quad T_y = \frac{Jb^2}{24} + \frac{Jh^2}{18} = \frac{J}{72}(3b^2 + 4h^2),$$

$$T_z = \frac{Ja^2}{12} + \frac{Jb^2}{24} = \frac{J}{24}(2a^2 + b^2).$$

Das Polarmoment für S wird

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{J}{72}(6a^2 + 3b^2 + 4h^2).$$

Nach der Querschnittsformel $\frac{G}{h} z^3$ kann das Trägheitsmoment T_u dargestellt werden durch die in Fig. 267 gezeichneten parabolischen Cylinder dritter Ordnung oder durch das Drehungsneiloid, dessen Profil durch semikubische Parabeln gegeben wird.

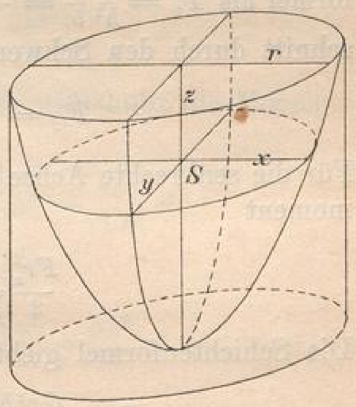
Auch für die anderen Trägheitsmomente lassen sich Darstellungen finden, die als Übungsbeispiele dienen mögen.

362) Das Drehungsparaboloid.

Der Schnitt in Höhe z ist $G\frac{z}{h}$, sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche $\frac{G}{h} z^3$, also wird wie vorher

$$T_u = \frac{G}{h}\frac{h^4}{4} = \frac{Jh^2}{2},\quad T_{xy} = \frac{Jh^2}{18} = \frac{Gh^3}{36}.$$

Fig. 268



Der Radius in Höhe z ist $r\sqrt{\frac{z}{h}}$, das Polarmoment des zugehörigen Kreises ist $\frac{r^4 z^2 \pi}{2h^2} = \frac{Gr^2}{2h^2} z^2$, also ist nach der Schichtenformel für den ganzen Körper in Bezug auf die z-Achse

$$T_z = \frac{Gr^2}{2h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{Gh}{2}\frac{r^2}{3} = \frac{Jr^2}{3}.$$

Halb so grofs sind die Momente $T_{xz} = T_{yz} = \frac{Jr^2}{6}$. In Bezug auf die durch S gelegten Koordinatenachsen x und y hat man also

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = J\left(\frac{h^2}{18} + \frac{r^2}{6}\right) = \frac{J}{18}(h^2 + 3r^2).$$

Ebenso grofs ist T_y. Endlich ist

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = J\left(\frac{h^2}{18} + \frac{r^2}{6} + \frac{r^2}{6}\right) = \frac{J}{18}(h^2 + 6r^2).$$

363) Bemerkung über die Körper von der Ordnung 1. Bei allen diesen Körpern, also auch beim elliptischen Paraboloid und