Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Drehungsparaboloid.

$$T_x = \frac{Jh^2}{18} + \frac{Ja^2}{12} = \frac{J}{36}(2h^2 + 3a^2), \quad T_y = \frac{Jb^2}{24} + \frac{Jh^2}{18} = \frac{J}{72}(3b^2 + 4h^2),$$

$$T_z = \frac{Ja^2}{12} + \frac{Jb^2}{24} = \frac{J}{24}(2a^2 + b^2).$$

Das Polarmoment für S wird

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{J}{72}(6a^2 + 3b^2 + 4h^2).$$

Nach der Querschnittsformel $\frac{G}{h} z^3$ kann das Trägheitsmoment T_u dargestellt werden durch die in Fig. 267 gezeichneten parabolischen Cylinder dritter Ordnung oder durch das Drehungsneiloid, dessen Profil durch semikubische Parabeln gegeben wird.

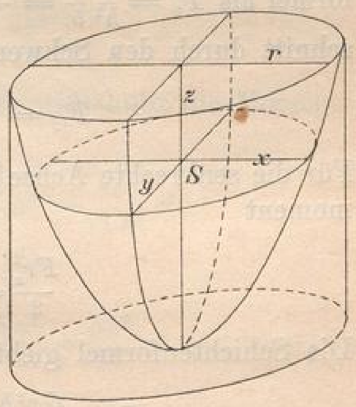
Auch für die anderen Trägheitsmomente lassen sich Darstellungen finden, die als Übungsbeispiele dienen mögen.

362) Das Drehungsparaboloid.

Der Schnitt in Höhe z ist $G\frac{z}{h}$, sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche $\frac{G}{h} z^3$, also wird wie vorher

$$T_u = \frac{G}{h}\frac{h^4}{4} = \frac{Jh^2}{2}, \quad T_{xy} = \frac{Jh^2}{18} = \frac{Gh^3}{36}.$$

Fig. 268



Der Radius in Höhe z ist $r\sqrt{\frac{z}{h}}$, das Polarmoment des zugehörigen Kreises ist $\frac{r^4 z^2 \pi}{2h^2} = \frac{Gr^2}{2h^2} z^2$, also ist nach der Schichtenformel für den ganzen Körper in Bezug auf die z-Achse

$$T_z = \frac{Gr^2}{2h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{Gh}{2}\frac{r^2}{3} = \frac{Jr^2}{3}.$$

Halb so grofs sind die Momente $T_{xz} = T_{yz} = \frac{Jr^2}{6}$. In Bezug auf die durch S gelegten Koordinatenachsen x und y hat man also

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = J\left(\frac{h^2}{18} + \frac{r^2}{6}\right) = \frac{J}{18}(h^2 + 3r^2).$$

Ebenso grofs ist T_y. Endlich ist

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = J\left(\frac{h^2}{18} + \frac{r^2}{6} + \frac{r^2}{6}\right) = \frac{J}{18}(h^2 + 6r^2).$$

363) Bemerkung über die Körper von der Ordnung 1. Bei allen diesen Körpern, also auch beim elliptischen Paraboloid und

bei den umgekehrt aufgestellten parabolischen Gewölben von beliebiger Grundfläche, findet man zunächst $T_{xy} = \frac{Jh^2}{18}$. (Dies gilt auch von den entsprechenden Schrägkörpern, die aber vorläufig ausgeschlossen bleiben sollen.) T_{yz} und T_{zx} ergeben sich mit Hülfe der beiden Axialmomente des Horizontalschnittes, T_z mit Hülfe des Polarmomentes, wobei man die Summenprobe machen kann. T_x und T_y sind leicht zu bilden, ebenso T_p.

Auch die Stumpfe dieser Körper sind leicht zu berechnen, da nur der Ausdruck für h_1 vom Ausdrucke für h_2 abzuziehen und dann auf den Schwerpunkt zu reduzieren ist.

D. Körper von der Ordnung 2.

364) Der senkrechte Kreiskegel.

Der Schnitt in der Höhe z ist, wenn G die Grundfläche bedeutet, $\frac{G}{h^2} z^2$, das Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene, auf die der Kegel mit der Spitze gestellt ist, wird aus $q = \frac{G}{h^2} z^4$ nach der Schichtenformel als $T_u = \frac{G}{h^2} \frac{h^5}{5} = \frac{Gh^3}{5}$ abgeleitet. In Bezug auf den Horizontalschnitt durch den Schwerpunkt wird

$$T_{xy} = \frac{Gh^3}{5} - \frac{Gh}{3} \left(\tfrac{3}{4} h\right)^2 = \tfrac{3}{80} Jh^2.$$

Für die senkrechte Achse hat der Querschnitt in Höhe z das Trägheitsmoment

$$\frac{Fr_z^2}{2} = \frac{Gz^2}{h^2} \cdot \frac{\left(r\frac{z}{h}\right)^2}{2} = \frac{Gr^2 z^4}{2h^4}.$$

Die Schichtenformel giebt für den ganzen Körper

$$T_z = \frac{Gr^2}{2h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{Gr^2 h}{10} = \frac{Gh}{3} \cdot \frac{3r^2}{10} = \frac{3Jr^2}{10}.$$

Für jeden vertikalen Hauptschnitt wird das Trägheitsmoment halb so grofs, also ist

$$T_{yz} = T_{zx} = \frac{3Jr^2}{20}.$$

Daraus folgt

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \frac{3Jr^2}{20} + \frac{3Jh^2}{80} = \frac{3J}{80}(4r^2 + h^2).$$

Ebenso grofs ist T_y. Das Polarmoment in Bezug auf den Schwerpunkt wird

$$T_x + T_y + T_z = 2 \cdot \frac{3J}{80}(4r^2 + h^2) + \tfrac{4}{4} \cdot \frac{3Jr^2}{10} = \frac{3J}{40}(16r^2 + h^2).$$