Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

D. Körper von der Ordnung 2.

bei den umgekehrt aufgestellten parabolischen Gewölben von beliebiger Grundfläche, findet man zunächst $T_{xy} = \frac{Jh^2}{18}$. (Dies gilt auch von den entsprechenden Schrägkörpern, die aber vorläufig ausgeschlossen bleiben sollen.) T_{yz} und T_{zx} ergeben sich mit Hülfe der beiden Axialmomente des Horizontalschnittes, T_z mit Hülfe des Polarmomentes, wobei man die Summenprobe machen kann. T_x und T_y sind leicht zu bilden, ebenso T_p.

Auch die Stumpfe dieser Körper sind leicht zu berechnen, da nur der Ausdruck für h_1 vom Ausdrucke für h_2 abzuziehen und dann auf den Schwerpunkt zu reduzieren ist.

D. Körper von der Ordnung 2.

364) Der senkrechte Kreiskegel.

Der Schnitt in der Höhe z ist, wenn G die Grundfläche bedeutet, $\frac{G}{h^2} z^2$, das Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene, auf die der Kegel mit der Spitze gestellt ist, wird aus $q = \frac{G}{h^2} z^4$ nach der Schichtenformel als $T_u = \frac{G}{h^2} \frac{h^5}{5} = \frac{Gh^3}{5}$ abgeleitet. In Bezug auf den Horizontalschnitt durch den Schwerpunkt wird

$$T_{xy} = \frac{Gh^3}{5} - \frac{Gh}{3}\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{80} Jh^2.$$

Für die senkrechte Achse hat der Querschnitt in Höhe z das Trägheitsmoment

$$\frac{Fr_z^2}{2} = \frac{Gz^2}{h^2} \cdot \frac{\left(r\frac{z}{h}\right)^2}{2} = \frac{Gr^2z^4}{2h^4}.$$

Die Schichtenformel giebt für den ganzen Körper

$$T_z = \frac{Gr^2}{2h^4}\frac{h^5}{5} = \frac{Gr^2h}{10} = \frac{Gh}{3} \cdot \frac{3r^2}{10} = \frac{3Jr^2}{10}.$$

Für jeden vertikalen Hauptschnitt wird das Trägheitsmoment halb so grofs, also ist

$$T_{yz} = T_{zx} = \frac{3Jr^2}{20}.$$

Daraus folgt

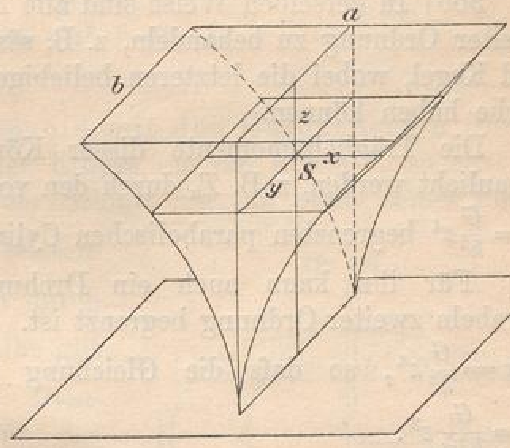
$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \frac{3Jr^2}{20} + \frac{3Jh^2}{80} = \frac{3J}{80}(4r^2 + h^2).$$

Ebenso grofs ist T_y. Das Polarmoment in Bezug auf den Schwerpunkt wird

$$T_x + T_y + T_z = 2 \cdot \frac{3J}{80}(4r^2 + h^2) + \frac{4}{4} \cdot \frac{3Jr^2}{10} = \frac{3J}{40}(16r^2 + h^2).$$

365) Parabolischer Cylinder. Der in Fig. 269 dargestellte parabolische Cylinder zweiter Ordnung, der symmetrisch von zwei parabolischen Flächen begrenzt ist, hat in Höhe z den Querschnitt $\frac{G}{h^2} z^2$, so dafs wie vorher

Fig. 269.



$$T_u = \frac{G h^5}{h^2\, 5} = \frac{G h^3}{5}$$

$$= \frac{G h}{3} \frac{3 h^2}{5} = \frac{3 J h^2}{5}$$

wird. Für den Schwerpunktsschnitt wird

$$T_{xy} = \frac{3 J h^2}{5} - J \left(\frac{3 h}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3 J}{80} h^2,$$

wobei $J = \frac{a b h}{3}$ ist.

Der Oberschnitt habe in Bezug auf seine Mittellinien die Trägheitsmomente

$$T_1 = \frac{b a^3}{12} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{a b^3}{12},$$

dann sind für den in Höhe z liegenden Horizontalschnitt die Momente

$$\frac{b}{12} \left(\frac{a}{h^2} z^2\right)^3 = \frac{b a^3}{12 h^2} z^6 \quad \text{und} \quad \frac{\left(a \frac{z^2}{h^2}\right)}{12} b^3 = \frac{a b^3}{21 h^2} z^2.$$

Für den ganzen Körper also wird

$$T_{yz} = \frac{b a^3}{12 h^6} \frac{h^7}{7} = \frac{a^3 b h}{84} = \frac{a b h}{3} \frac{a^2}{84} = \frac{J a^2}{28}$$

und

$$T_{zx} = \frac{a b^3}{12 h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{a b^3 h}{36} = \frac{a b h}{3} \frac{b^2}{12} = \frac{J b^2}{12}.$$

Das letzte Resultat könnte direkt nach der Prismenformel hingeschrieben werden. Folglich ist

$$T_x = T_{xy} + T_{zx} = \frac{3 J}{80} h^2 + \frac{J b^2}{12} = \frac{J}{240} (9 h^2 + 20 b^2),$$

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{3 J}{80} h^2 + \frac{J a^2}{28} = \frac{J}{560} (21 h^2 + 20 a^2),$$

$$T_z = T_{zx} + T_{yz} = \frac{J b^2}{12} + \frac{J a^2}{28} = \frac{J}{84} (7 b^2 + 3 a^2).$$

Das Polarmoment für den Schwerpunkt wird

$$T_p = (T_{xy} + T_{yz}) + T_{zx} = \frac{J}{560}(21\,h^2 + 20\,a^2) + \frac{Jb^2}{12}$$
$$= \frac{J}{1680}(63\,h^2 + 60\,a^2 + 140\,b^2).$$

366) In derselben Weise sind alle Arten von senkrechten Körpern zweiter Ordnung zu behandeln, z. B. sämtliche senkrechten Pyramiden und Kegel, wobei die letzteren beliebige, z. B. auch elliptische Grundfläche haben können.

Die Trägheitsmomente dieser Körper können ebenfalls veranschaulicht werden, z. B. T_u durch den von der Parabel vierter Ordnung $x = \frac{G}{h^2} z^4$ begrenzten parabolischen Cylinder, dessen Inhalt $\frac{G}{h^2}\frac{h^5}{5} = \frac{Gh^3}{5}$ ist. Für ihn kann auch ein Drehungskörper eintreten, der von Parabeln zweiter Ordnung begrenzt ist. Sein Schnitt in der Höhe y ist $x^2\pi = \frac{G}{h^2} z^4$, so daſs die Gleichung der begrenzenden Kurve ist $x = \frac{G}{h^2\pi} z^2$.

Die Stumpfe der Körper zweiter Ordnung sind nach der Subtraktionsmethode zu behandeln, indem man vom Körper von der Höhe h_2 den von der Höhe h_1 abzieht.

E. Körper gemischter Ordnung bis zur zweiten Potenz.

367) Die Kugel. Dieser Körper ist bereits in Nr. 174 behandelt, und zwar ist für ihn

$$T_{xy} = T_{yz} = T_{zx} = \tfrac{4}{15} r^5 \pi = \tfrac{1}{5} J r^2, \quad \text{also} \quad T_x = T_y = T_z = \tfrac{2}{5} J r^2,$$

das Polarmoment in Bezug auf den Mittelpunkt aber gleich $\frac{3}{5} J r^2$. Demnach ist derjenige Radius, dessen Quadrat für alle Kugelpunkte das mittlere ist, zu bestimmen aus $\varrho_p^2 = \frac{\frac{3}{5} J r^2}{J} = \frac{3}{5} r^2$, so daſs $\varrho_p = r\sqrt{\frac{3}{5}}$ ist. Dagegen ist der axiale Trägheitsradius $\varrho = r\sqrt{\frac{2}{5}}$, der auf den Hauptschnitt bezogene Trägheitsradius der Halbkugel $\varrho_f = r\sqrt{\frac{1}{5}}$, wie aus $\varrho_f^2 = \frac{\frac{2}{5}\frac{J}{2} r^2}{\frac{J}{2}}$ folgt. Für den Horizontalschnitt der Halbkugel in der Höhe z ist nach 174

$$q_z = r^2 \pi z^2 - \pi z^4.$$

Demnach kann das Trägheitsmoment der Halbkugel veranschaulicht werden durch den parabolischen Cylinder, der von der Parabel ge-