Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

E. Körper gemischter Ordnung bis zur zweiten Potenz.

$$T_p = (T_{xy} + T_{yz}) + T_{zx} = \frac{J}{560}(21\,h^2 + 20\,a^2) + \frac{Jb^2}{12}$$
$$= \frac{J}{1680}(63\,h^2 + 60\,a^2 + 140\,b^2).$$

366) In derselben Weise sind alle Arten von senkrechten Körpern zweiter Ordnung zu behandeln, z. B. sämtliche senkrechten Pyramiden und Kegel, wobei die letzteren beliebige, z. B. auch elliptische Grundfläche haben können.

Die Trägheitsmomente dieser Körper können ebenfalls veranschaulicht werden, z. B. T_u durch den von der Parabel vierter Ordnung $x = \frac{G}{h^2}z^4$ begrenzten parabolischen Cylinder, dessen Inhalt $\frac{G}{h^2}\frac{h^5}{5} = \frac{Gh^3}{5}$ ist. Für ihn kann auch ein Drehungskörper eintreten, der von Parabeln zweiter Ordnung begrenzt ist. Sein Schnitt in der Höhe y ist $x^2\pi = \frac{G}{h^2}z^4$, so daſs die Gleichung der begrenzenden Kurve ist $x = \frac{G}{h^2\pi}z^2$.

Die Stumpfe der Körper zweiter Ordnung sind nach der Subtraktionsmethode zu behandeln, indem man vom Körper von der Höhe h_2 den von der Höhe h_1 abzieht.

E. Körper gemischter Ordnung bis zur zweiten Potenz.

367) Die Kugel. Dieser Körper ist bereits in Nr. 174 behandelt, und zwar ist für ihn

$$T_{xy} = T_{yz} = T_{zx} = \tfrac{4}{15}r^5\pi = \tfrac{1}{5}Jr^2, \quad \text{also} \quad T_x = T_y = T_z = \tfrac{2}{5}Jr^2,$$

das Polarmoment in Bezug auf den Mittelpunkt aber gleich $\frac{3}{5}Jr^2$. Demnach ist derjenige Radius, dessen Quadrat für alle Kugelpunkte das mittlere ist, zu bestimmen aus $\varrho_p^2 = \frac{\frac{3}{5}Jr^2}{J} = \frac{3}{5}r^2$, so daſs $\varrho_p = r\sqrt{\frac{3}{5}}$ ist. Dagegen ist der axiale Trägheitsradius $\varrho = r\sqrt{\frac{2}{5}}$, der auf den Hauptschnitt bezogene Trägheitsradius der Halbkugel $\varrho_f = r\sqrt{\frac{1}{5}}$, wie aus $\varrho_f^2 = \frac{\frac{2}{5}\frac{J}{2}r^2}{\frac{J}{2}}$ folgt. Für den Horizontalschnitt der Halbkugel in der Höhe z ist nach 174

$$q_z = r^2\pi z^2 - \pi z^4.$$

Demnach kann das Trägheitsmoment der Halbkugel veranschaulicht werden durch den parabolischen Cylinder, der von der Parabel gemischter Ordnung $x = r^2 \pi z^2 - \pi z^4$ begrenzt wird, oder durch den Drehungskörper, dessen Schnitt in der Höhe y ist

$$x^2 \pi = r^2 \pi z^2 - \pi z^4,$$

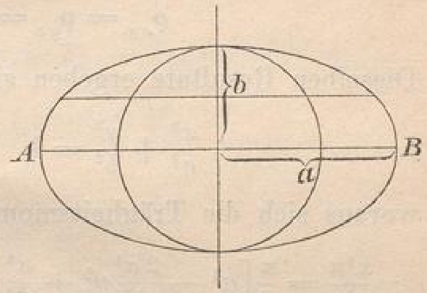
woraus sich die Gleichung der begrenzenden Kurve als

$$x^2 = r^2 z^2 - z^4$$

ergiebt.

368) Das Drehungsellipsoid mit den Halbachsen a und b. Geschieht die Drehung der Ellipse um die Achse b, so tritt an Stelle des Kreisschnittes $b^2\pi$ der Schnitt $a^2\pi$, an Stelle seines Polarmomentes $\frac{b^4\pi}{2}$ tritt $\frac{a^4\pi}{2}$, das letztere entsteht also aus dem ersteren durch Multiplikation mit $\frac{a^4}{b^4}$. Dasselbe gilt von jedem Horizontalschnitte. Demnach wird das Axialmoment des Ellipsoids (Y-Achse als senkrecht betrachtet)

Fig. 270.



$$T_y = \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{4}{3} b^3\pi\right) b^2 \frac{a^4}{b^4} = \tfrac{8}{15} a^4 b\pi,$$

oder, da der Inhalt des Ellipsoids gleich $\frac{4}{3} b^3\pi \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{3} a^2 b\pi$ ist,

$$T_y = \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{4}{3} a^2 b\pi\right) a^2 = \tfrac{2}{5} J a^2.$$

Für jeden senkrechten Hauptschnitt ist das Moment halb so grofs, also

$$T_{xy} = \tfrac{1}{5} J a^2 = \tfrac{4}{15} a^4 b\pi = T_{yz}.$$

Das Moment T_{zx} ergiebt sich aus dem Kugelmomente, indem man jeden Horizontalschnitt mit $\frac{a^2}{b^2}$ multipliziert, was

$$T_{zx} = \tfrac{4}{15} b^5\pi \cdot \frac{a^2}{b^2} = \tfrac{4}{15} a^2 b^3\pi = \tfrac{1}{5} J b^2$$

giebt. Demnach wird

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = \tfrac{1}{5} J a^2 + \tfrac{1}{5} J b^2 = \tfrac{1}{5} J (a^2 + b^2)$$
$$= \tfrac{4}{15} a^2 b\pi (a^2 + b^2) = T_z.$$

Endlich folgt als Polarmoment

$$T_p = (T_{xy} + T_{yz}) + T_{zx} = \tfrac{2}{5} J a^2 + \tfrac{1}{5} J b^2 = \frac{J}{5}(b^2 + 2a^2)$$
$$= \tfrac{4}{15} a^2 b\pi (b^2 + 2a^2).$$

Der Radius, dessen Quadrat unter den Radienquadraten aller Ellipsoidpunkte das mittlere ist, ergiebt sich aus

$$\varrho_p^2 = \frac{T_p}{J} = \frac{b^2 + 2\,a^2}{5}$$

als

$$\varrho_p = \sqrt{\frac{b^2 + 2\,a^2}{5}}.$$

Der axiale Trägheitsradius ist für die Y-Achse $\varrho_p = a\sqrt{\frac{2}{5}}$, für die X-Achse und Z-Achse $\varrho_p = \frac{1}{5}\sqrt{a^2 + b^2}$. In Bezug auf die Hauptschnitte des Halbellipsoids erhält man für dieses

$$\varrho_{xy} = \varrho_{yz} = a\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad \varrho_{zx} = b\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich auf Grund der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

woraus sich die Trägheitsmomente der Querschnitte als

$$\frac{x^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left[a^4 - \frac{2\,a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^4\right], \quad \frac{x^4\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\left[a^4 - \frac{2\,a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}g^4\right],$$

$$x^2\pi \cdot y^2 = \pi\left[a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right]$$

ergeben, auf deren jedes die Schichtenformel anzuwenden ist.

Entsteht das Drehungsellipsoid durch Drehung um die Achse a, so sind in allen Formeln a und b zu vertauschen.

369) Das dreiachsige Ellipsoid. Die Achsen seien der Gröfse nach a, b und c, den Koordinatenachsen des vorigen Beispiels entsprechend. Das neue Ellipsoid entsteht aus dem vorigen durch konstante Verkürzung aller horizontal nach hinten gehenden Achsen mittels des Faktors $\frac{c}{a}$. Jeder Horizontalschnitt wird in demselben Verhältnis verkleinert, folglich wird

$$T_{zx} = \frac{4}{15}a^2 b^3 \pi \cdot \frac{c}{a} = \frac{4}{15}ab^3 c\pi,$$

oder, da $\frac{4}{3}abc\pi$ der Inhalt des Körpers ist,

$$T_{zx} = \frac{1}{5}Jb^2.$$

Der horizontale Hauptschnitt hat in Bezug auf die x-Achse das Trägheitsmoment $\frac{ac^3\pi}{4}$, welches aus $\frac{a^4\pi}{4}$ (dem des Kreises) durch

Multiplikation mit $\frac{c^3}{a^3}$ entsteht. So ist es in jedem Horizontalschnitt, folglich wird

$$T_{xy} = \left(\tfrac{4}{15} a^4 b \pi\right) \frac{c^3}{a^3} = \tfrac{4}{15} a b c^3 \pi = \tfrac{1}{5} J c^2.$$

Jeder solche Schnitt hat in Bezug auf die z-Achse das Moment $\frac{c a^3 \pi}{4}$, welches aus dem des Kreises, d. h. aus $\frac{a^4 \pi}{4}$, durch Verkleinerung mittels des Faktors $\frac{c}{a}$ entsteht. Demnach wird

$$T_{yz} = \tfrac{4}{15} a^4 b \pi \cdot \frac{c}{a} = \tfrac{4}{15} a^3 b c \pi = \tfrac{1}{5} J a^2.$$

Jetzt folgt

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \tfrac{1}{5} J (b^2 + c^2), \quad T_y = T_{xy} + T_{yz} = \tfrac{1}{5} J (c^2 + a^2),$$

$$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \tfrac{1}{5} J (a^2 + b^2).$$

Endlich ist das Polarmoment

$$T_p = \tfrac{1}{5} J (a^2 + b^2 + c^2).$$

Dividiert man jedes Moment durch J, so erhält man das Quadrat des entsprechenden Trägheitsradius. So ist z. B. der Radius, dessen Quadrat unter allen Radienquadraten das mittlere ist,

$$\varrho = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich aus der Untersuchung der Schnitte in der Höhe y, nur treten dabei irrationale Ausdrücke auf.

370) Kugelabschnitt. Nach Nr. 313 ist der Horizontalschnitt

$$q_y = x^2 \pi = 2 r \pi y - \pi y^2,$$

also das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundebene der Fig. 228

$$2 r \pi y^3 - \pi y^4.$$

Für den Körper von Höhe h wird also

$$T_u = 2 r \pi \frac{h^4}{4} - \pi \frac{h^5}{5}.$$

Der Schwerpunkt erfordert nach Nr. 313 Verschiebung um

$$y_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{8r - 3h}{3r - h},$$

so dafs für die Horizontalebene durch S

$$T_{zx} = T_u - y_s^2 J = 2r\pi \frac{h^4}{4} - \frac{\pi h^5}{5} - \frac{h^2}{16}\left(\frac{8r-3h}{3r-h}\right)^2 \frac{\pi h}{3}(3r^2 - h^2)$$

ist, was sich noch vereinfachen läfst. Hier ist es aber vorzuziehen, mit den Hülfswerten h_s und J zu rechnen.

Das Polarmoment des Schnittes in Höhe y ist

$$q_y = \frac{x^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2ry - y^2)^2 = \frac{\pi}{2}(4r^2y^2 - 4ry^3 + y^4).$$

Demnach wird für den Körper in Bezug auf die senkrechte y-Achse

$$T_y = \frac{\pi}{2}\left(4r^2\frac{h^3}{3} - 4r\frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5}\right) = \frac{\pi h^3}{2}\left(\frac{4r^2}{3} - rh + h^2\right).$$

Für jeden senkrechten Hauptschnitt wird das Moment halb so grofs, also

$$T_{yx} = \frac{\pi h^3}{4}\left(\frac{4r^2}{3} - rh + h^2\right) = T_{yz}.$$

Die durch den Schwerpunkt gelegten Koordinatenachsen geben neben dem obigen T_y noch

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = T_z,$$

ebenso

$$T_p + T_{xy} + T_{yz} + T_{zx},$$

was ziemlich komplizierte Formeln giebt, aber keine Schwierigkeiten macht.

371) Kugelschicht. Sind r, h_1 und h_2 gegeben, so ist mit den Formeln in Nr. 314a zu arbeiten. Sind a, b und h gegeben, so ist die Formel

$$x^2 = (a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z + h)y - y^2$$

aus Nr. 314b anzuwenden, aus der sich die Momente x^2y^2, $\frac{x^4\pi}{4}$, $\frac{x^4\pi}{2}$ leicht ableiten lassen. Die Resultate werden mit Hülfe der Schichtenformel auf den ganzen Körper ausgedehnt.

372) Ellipsoidschichten. Sind die Schichten durch parallele Schnitte zu den Hauptebenen begrenzt, so sind die Formeln aus denen für die Schicht einer ebenso hohen Kugel abzuleiten. Am einfachsten geht man von den Hauptschnitten aus.

Die Kugel vom Radius b hat in der Höhe y den Schnitt

$$x^2\pi = b^2\pi - y^2\pi.$$

Der des Ellipsoids wird daraus abgeleitet, indem man zunächst mit $\frac{a}{b}$, dann mit $\frac{c}{b}$ multipliziert, was

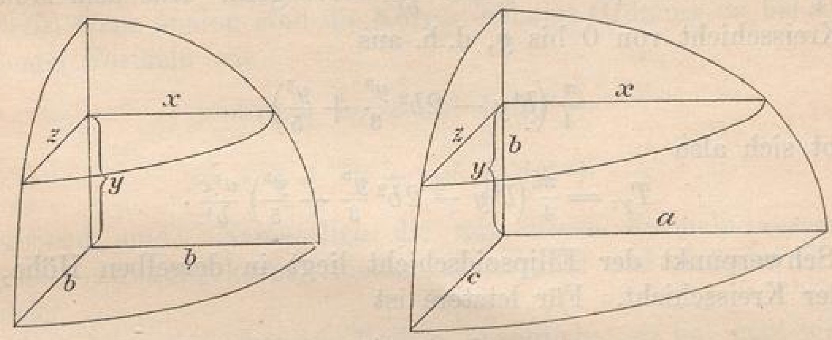
$$q_y = \frac{ac\pi}{b^2}(b^2 - y^2)$$

giebt. Man erhält für die Schicht von 0 bis y den Inhalt

$$\overset{y}{\underset{0}{J}} = \frac{ac\pi}{b^2}\left(b^2\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3}\right),$$

z. B. von 0 bis b den Inhalt des Halbellipsoids $\frac{2}{3}abc\pi$.

Fig. 271.



Multipliziert man den Schnitt mit y^2, so erhält man in Bezug auf die Grundfläche sein Trägheitsmoment

$$\frac{ac\pi}{b^2}(b^2y^2 - y^4).$$

Für die Schicht von 0 bis y ergiebt sich also

$$T_{xz} = \frac{ac\pi}{b^2}\left(b^2\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right).$$

Für das Halbellipsoid wird z. B.

$$T_{xz} = \frac{ac\pi}{b^2}\left(\frac{b^5}{3} - \frac{b^5}{5}\right) = \frac{2}{15}ab^3c\pi.$$

Die Grundfläche hat in Bezug auf x das Trägheitsmoment $\frac{ac^3\pi}{4}$, was aus dem der Kreisfläche, $\frac{b^4\pi}{4}$ durch Multiplikation mit $\frac{ac^3}{b^4}$ (erst mit $\frac{a}{b}$, dann mit $\frac{c^3}{b^3}$) hervorgegangen ist. So ist es mit jedem Schnitte, also auch mit der ganzen Schicht von 0 bis y. Es folgt aus dem entsprechenden Trägheitsmomente der Kugelschicht, welches mit Hülfe von $\frac{x^4\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(b^2 - y^2)^2 = \frac{\pi}{4}(b^4 - 2b^2y^2 + y^4)$ berechnet wird und sich als

$$\frac{\pi}{4}\left(b^4y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)$$

ergiebt,

$$T_{xy} = \frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\frac{ac^3}{b^4}.$$

Für die Schicht von 0 bis b z. B. ergiebt sich

$$\frac{ac^3\pi}{4b^4}\left(b^5 - \frac{2}{3}b^5 + \frac{1}{5}b^5\right) = \frac{2}{15}abc^3\pi.$$

In Bezug auf z hat die Grundfläche das Trägheitsmoment $\frac{ca^3\pi}{4}$, was aus $\frac{b^4\pi}{4}$ durch Multiplikation mit $\frac{a^3c}{b^4}$ hervorgeht. Aus dem Momente der Kreisschicht von 0 bis y, d. h. aus

$$\frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right),$$

ergiebt sich also

$$T_{yz} = \frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\frac{a^3c}{b^4}.$$

Der Schwerpunkt der Ellipsoidschicht liegt in derselben Höhe, wie der der Kreisschicht. Für letztere ist

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{b^2\pi\frac{y^2}{2} - \pi\frac{y^4}{4}}{b^2\pi\frac{y}{1} - \pi\frac{y^3}{3}} = \frac{3y}{4}\cdot\frac{2b^2 - y^2}{3b^2 - y^2}.$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt und die Berechnung von T_x, T_y, T_z und T_p für sein Koordinatensystem sei dem Leser überlassen, da es sich um ganz einfache Rechnungen handelt.

Damit ist auch die Angelegenheit der Ellipsoidsegmente und der beliebigen Horizontalschichten erledigt, denn dabei sind nur Subtraktionen oder Additionen auszuführen.

373) Das Drehungshyperboloid.

Man benutze Figur und Grundformeln des Abschnittes 316, wo sich

$$1)\qquad x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2$$

ergeben hatte, während die Schwerpunktshöhe war

$$y_s = \frac{3h}{4}\cdot\frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}.$$

Die Trägheitsmomente der in Höhe y liegenden Horizontalschicht sind $x^2\pi y^2$, $\frac{x^4\pi}{4}$ und $\frac{x^4\pi}{2}$, was mit Hülfe von 1) leicht auszurechnen ist. Die Formeln werden denen des Drehungsellipsoids analog.

Der Übergang zum dreiachsigen Hyperboloid erfolgt ebenso, wie der vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen Ellipsoid.

374) Für das zweimantelige Drehungshyperboloid sind die Formeln des Abschnittes 317 zu Grunde zu legen, mit denen ebenso leicht zu rechnen ist. Auch dort bietet der Übergang zur dreiachsigen Form keine Schwierigkeiten.

Die Prismatoide sind auf Grund des Abschnittes 318 zu behandeln und haben geringeres technisches Interesse, ohne auf Schwierigkeiten zu führen.

F. Einige Körper höherer Ordnung.

375) Ganz analog sind die Körper höherer Ordnung zu behandeln, bei denen Formeln wie

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots$$

oder

$$x^2 = a + by + cy^2 + dy^4 + \cdots$$

maßgebend sind. Namentlich die mit diesen Formeln zusammenhängenden Drehungskörper bieten interessante und einfache Übungsbeispiele.

Sind die entsprechenden Reihen unendliche, so hat man sich im Konvergenzbereiche zu halten.

Hätte man das dreiachsige Ellipsoid direkt berechnet, so hätten sich als Horizontalschichten Ellipsen mit den Halbachsen $a_y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ und $c_y = \frac{c}{b}\sqrt{c^2 - y^2}$ ergeben, was auf Trägheitsmomente von den Formen

$$a_y\, c_y \pi y^2 \quad \text{oder} \quad \frac{ac\pi}{b^2}\sqrt{(b^2 - y^2)(c^2 - y^2)},$$

$$\frac{\pi a_y c_y^3}{4}, \quad \frac{\pi a_y^3 c_y}{4}, \quad \frac{\pi a_y c_y}{4}\left(a_y^2 + b_y^2\right)$$

geführt haben würde, die sämtlich irrational sind. Die Irrationalitäten können mit Reihenentwickelung mittels des binomischen Lehrsatzes behandelt werden, was langwierig ist und zu den anschauungsmäfsig abgeleiteten Resultaten zurückführen mufs.

376) Bezüglich der entsprechenden Drehungskörper lassen sich einige Resultate des Abschnittes IV benutzen. Hierher gehört die Formel

$$h_s = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}$$

im Abschnitte 116 und der dazu gehörige Symmetriefall, die Formel

$$T = J\left(\varrho^2 + 3\varrho_1^2\right)$$