Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Drehungsellipsoid

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

mischter Ordnung $x = r^2\pi z^2 - \pi z^4$ begrenzt wird, oder durch den Drehungskörper, dessen Schnitt in der Höhe y ist

$$x^2\pi = r^2\pi z^2 - \pi z^4,$$

woraus sich die Gleichung der begrenzenden Kurve als

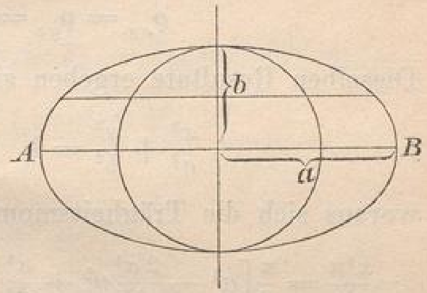
$$x^2 = r^2 z^2 - z^4$$

ergiebt.

368) Das Drehungsellipsoid mit den Halbachsen a und b.

Geschieht die Drehung der Ellipse um die Achse b, so tritt an Stelle des Kreisschnittes $b^2\pi$ der Schnitt $a^2\pi$, an Stelle seines Polarmomentes $\frac{b^4\pi}{2}$ tritt $\frac{a^2\pi}{2}$, das letztere entsteht also aus dem ersteren durch Multiplikation mit $\frac{a^4}{b^4}$. Dasselbe gilt von jedem Horizontalschnitte. Demnach wird das Axialmoment des Ellipsoids (Y-Achse als senkrecht betrachtet)

Fig. 270.



$$T_y = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3} b^3\pi\right) b^2 \frac{a^4}{b^4} = \frac{8}{15} a^4 b\pi,$$

oder, da der Inhalt des Ellipsoids gleich $\frac{4}{3} b^3\pi \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{3} a^2 b\pi$ ist,

$$T_y = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3} a^2 b\pi\right) a^2 = \frac{2}{5} Ja^2.$$

Für jeden senkrechten Hauptschnitt ist das Moment halb so grofs, also

$$T_{xy} = \frac{1}{5} Ja^2 = \frac{4}{15} a^4 b\pi = T_{yz}.$$

Das Moment T_{zx} ergiebt sich aus dem Kugelmomente, indem man jeden Horizontalschnitt mit $\frac{a^2}{b^2}$ multipliziert, was

$$T_{zx} = \frac{4}{15} b^5\pi \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{15} a^2 b^3\pi = \frac{1}{5} Jb^2$$

giebt. Demnach wird

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = \frac{1}{5} Ja^2 + \frac{1}{5} Jb^2 = \frac{1}{5} J(a^2 + b^2)$$
$$= \frac{4}{15} a^2 b\pi (a^2 + b^2) = T_z.$$

Endlich folgt als Polarmoment

$$T_p = (T_{xy} + T_{yz}) + T_{zx} = \frac{2}{5} Ja^2 + \frac{1}{5} Jb^2 = \frac{J}{5}(b^2 + 2a^2)$$
$$= \frac{4}{15} a^2 b\pi (b^2 + 2a^2).$$

Der Radius, dessen Quadrat unter den Radienquadraten aller Ellipsoidpunkte das mittlere ist, ergiebt sich aus

$$\varrho_p^2 = \frac{T_p}{J} = \frac{b^2 + 2a^2}{5}$$

als

$$\varrho_p = \sqrt{\frac{b^2 + 2a^2}{5}}.$$

Der axiale Trägheitsradius ist für die Y-Achse $\varrho_p = a\sqrt{\frac{2}{5}}$, für die X-Achse und Z-Achse $\varrho_p = \frac{1}{5}\sqrt{a^2 + b^2}$. In Bezug auf die Hauptschnitte des Halbellipsoids erhält man für dieses

$$\varrho_{xy} = \varrho_{yz} = a\sqrt{\tfrac{1}{5}}, \quad \varrho_{zx} = b\sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich auf Grund der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

woraus sich die Trägheitsmomente der Querschnitte als

$$\frac{x^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left[a^4 - \frac{2a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^4\right], \quad \frac{x^4\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\left[a^4 - \frac{2a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^4\right],$$

$$x^2\pi \cdot y^2 = \pi\left[a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right]$$

ergeben, auf deren jedes die Schichtenformel anzuwenden ist.

Entsteht das Drehungsellipsoid durch Drehung um die Achse a, so sind in allen Formeln a und b zu vertauschen.

369) Das dreiachsige Ellipsoid. Die Achsen seien der Gröfse nach a, b und c, den Koordinatenachsen des vorigen Beispiels entsprechend. Das neue Ellipsoid entsteht aus dem vorigen durch konstante Verkürzung aller horizontal nach hinten gehenden Achsen mittels des Faktors $\frac{c}{a}$. Jeder Horizontalschnitt wird in demselben Verhältnis verkleinert, folglich wird

$$T_{zx} = \tfrac{4}{15}a^2b^3\pi \cdot \frac{c}{a} = \tfrac{4}{15}ab^3c\pi,$$

oder, da $\frac{4}{3}abc\pi$ der Inhalt des Körpers ist,

$$T_{zx} = \tfrac{1}{5}Jb^2.$$

Der horizontale Hauptschnitt hat in Bezug auf die x-Achse das Trägheitsmoment $\frac{ac^3\pi}{4}$, welches aus $\frac{a^4\pi}{4}$ (dem des Kreises) durch