Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Dreiachsiges Ellipsoid.

Der Radius, dessen Quadrat unter den Radienquadraten aller Ellipsoidpunkte das mittlere ist, ergiebt sich aus

$$\varrho_p^2 = \frac{T_p}{J} = \frac{b^2 + 2a^2}{5}$$

als

$$\varrho_p = \sqrt{\frac{b^2 + 2a^2}{5}}.$$

Der axiale Trägheitsradius ist für die Y-Achse $\varrho_p = a\sqrt{\frac{2}{5}}$, für die X-Achse und Z-Achse $\varrho_p = \frac{1}{5}\sqrt{a^2 + b^2}$. In Bezug auf die Hauptschnitte des Halbellipsoids erhält man für dieses

$$\varrho_{xy} = \varrho_{yz} = a\sqrt{\tfrac{1}{5}}, \quad \varrho_{zx} = b\sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich auf Grund der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

woraus sich die Trägheitsmomente der Querschnitte als

$$\frac{x^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left[a^4 - \frac{2a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^4\right], \quad \frac{x^4\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\left[a^4 - \frac{2a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^4\right],$$

$$x^2\pi \cdot y^2 = \pi\left[a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right]$$

ergeben, auf deren jedes die Schichtenformel anzuwenden ist.

Entsteht das Drehungsellipsoid durch Drehung um die Achse a, so sind in allen Formeln a und b zu vertauschen.

369) Das dreiachsige Ellipsoid. Die Achsen seien der Gröfse nach a, b und c, den Koordinatenachsen des vorigen Beispiels entsprechend. Das neue Ellipsoid entsteht aus dem vorigen durch konstante Verkürzung aller horizontal nach hinten gehenden Achsen mittels des Faktors $\frac{c}{a}$. Jeder Horizontalschnitt wird in demselben Verhältnis verkleinert, folglich wird

$$T_{zx} = \tfrac{4}{15}a^2b^3\pi \cdot \frac{c}{a} = \tfrac{4}{15}ab^3c\pi,$$

oder, da $\frac{4}{3}abc\pi$ der Inhalt des Körpers ist,

$$T_{zx} = \tfrac{1}{5}Jb^2.$$

Der horizontale Hauptschnitt hat in Bezug auf die x-Achse das Trägheitsmoment $\frac{ac^3\pi}{4}$, welches aus $\frac{a^4\pi}{4}$ (dem des Kreises) durch

Multiplikation mit $\frac{c^3}{a^3}$ entsteht. So ist es in jedem Horizontalschnitt, folglich wird

$$T_{xy} = \left(\tfrac{4}{15} a^4 b \pi\right) \frac{c^3}{a^3} = \tfrac{4}{15} a b c^3 \pi = \tfrac{1}{5} J c^2.$$

Jeder solche Schnitt hat in Bezug auf die z-Achse das Moment $\frac{c a^3 \pi}{4}$, welches aus dem des Kreises, d. h. aus $\frac{a^4 \pi}{4}$, durch Verkleinerung mittels des Faktors $\frac{c}{a}$ entsteht. Demnach wird

$$T_{yz} = \tfrac{4}{15} a^4 b \pi \cdot \frac{c}{a} = \tfrac{4}{15} a^3 b c \pi = \tfrac{1}{5} J a^2.$$

Jetzt folgt

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \tfrac{1}{5} J (b^2 + c^2), \quad T_y = T_{xy} + T_{yz} = \tfrac{1}{5} J (c^2 + a^2),$$

$$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \tfrac{1}{5} J (a^2 + b^2).$$

Endlich ist das Polarmoment

$$T_p = \tfrac{1}{5} J (a^2 + b^2 + c^2).$$

Dividiert man jedes Moment durch J, so erhält man das Quadrat des entsprechenden Trägheitsradius. So ist z. B. der Radius, dessen Quadrat unter allen Radienquadraten das mittlere ist,

$$\varrho = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich aus der Untersuchung der Schnitte in der Höhe y, nur treten dabei irrationale Ausdrücke auf.

370) Kugelabschnitt. Nach Nr. 313 ist der Horizontalschnitt

$$q_y = x^2 \pi = 2 r \pi y - \pi y^2,$$

also das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundebene der Fig. 228

$$2 r \pi y^3 - \pi y^4.$$

Für den Körper von Höhe h wird also

$$T_u = 2 r \pi \frac{h^4}{4} - \pi \frac{h^5}{5}.$$

Der Schwerpunkt erfordert nach Nr. 313 Verschiebung um

$$y_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{8r - 3h}{3r - h},$$

so dafs für die Horizontalebene durch S