Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Segmente und Schichten der Kugel und des Ellipsoids.

Multiplikation mit $\frac{c^3}{a^3}$ entsteht. So ist es in jedem Horizontalschnitt, folglich wird

$$T_{xy} = \left(\tfrac{4}{15} a^4 b \pi\right) \frac{c^3}{a^3} = \tfrac{4}{15} a b c^3 \pi = \tfrac{1}{5} J c^2.$$

Jeder solche Schnitt hat in Bezug auf die z-Achse das Moment $\frac{c a^3 \pi}{4}$, welches aus dem des Kreises, d. h. aus $\frac{a^4 \pi}{4}$, durch Verkleinerung mittels des Faktors $\frac{c}{a}$ entsteht. Demnach wird

$$T_{yz} = \tfrac{4}{15} a^4 b \pi \cdot \frac{c}{a} = \tfrac{4}{15} a^3 b c \pi = \tfrac{1}{5} J a^2.$$

Jetzt folgt

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \tfrac{1}{5} J (b^2 + c^2), \quad T_y = T_{xy} + T_{yz} = \tfrac{1}{5} J (c^2 + a^2),$$

$$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \tfrac{1}{5} J (a^2 + b^2).$$

Endlich ist das Polarmoment

$$T_p = \tfrac{1}{5} J (a^2 + b^2 + c^2).$$

Dividiert man jedes Moment durch J, so erhält man das Quadrat des entsprechenden Trägheitsradius. So ist z. B. der Radius, dessen Quadrat unter allen Radienquadraten das mittlere ist,

$$\varrho = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich aus der Untersuchung der Schnitte in der Höhe y, nur treten dabei irrationale Ausdrücke auf.

370) Kugelabschnitt. Nach Nr. 313 ist der Horizontalschnitt

$$q_y = x^2 \pi = 2 r \pi y - \pi y^2,$$

also das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundebene der Fig. 228

$$2 r \pi y^3 - \pi y^4.$$

Für den Körper von Höhe h wird also

$$T_u = 2 r \pi \frac{h^4}{4} - \pi \frac{h^5}{5}.$$

Der Schwerpunkt erfordert nach Nr. 313 Verschiebung um

$$y_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{8r - 3h}{3r - h},$$

so dafs für die Horizontalebene durch S

$$T_{zx} = T_u - y_s^2 J = 2r\pi \frac{h^4}{4} - \frac{\pi h^5}{5} - \frac{h^2}{16}\left(\frac{8r-3h}{3r-h}\right)^2 \frac{\pi h}{3}(3r^2 - h^2)$$

ist, was sich noch vereinfachen läſst. Hier ist es aber vorzuziehen, mit den Hülfswerten h_s und J zu rechnen.

Das Polarmoment des Schnittes in Höhe y ist

$$q_y = \frac{x^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2ry - y^2)^2 = \frac{\pi}{2}(4r^2y^2 - 4ry^3 + y^4).$$

Demnach wird für den Körper in Bezug auf die senkrechte y-Achse

$$T_y = \frac{\pi}{2}\left(4r^2\frac{h^3}{3} - 4r\frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5}\right) = \frac{\pi h^3}{2}\left(\frac{4r^2}{3} - rh + h^2\right).$$

Für jeden senkrechten Hauptschnitt wird das Moment halb so groſs, also

$$T_{yx} = \frac{\pi h^3}{4}\left(\frac{4r^2}{3} - rh + h^2\right) = T_{yz}.$$

Die durch den Schwerpunkt gelegten Koordinatenachsen geben neben dem obigen T_y noch

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = T_z,$$

ebenso

$$T_p + T_{xy} + T_{yz} + T_{zx},$$

was ziemlich komplizierte Formeln giebt, aber keine Schwierigkeiten macht.

371) Kugelschicht. Sind r, h_1 und h_2 gegeben, so ist mit den Formeln in Nr. 314a zu arbeiten. Sind a, b und h gegeben, so ist die Formel

$$x^2 = (a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z + h)y - y^2$$

aus Nr. 314b anzuwenden, aus der sich die Momente x^2y^2, $\frac{x^4\pi}{4}$, $\frac{x^4\pi}{2}$ leicht ableiten lassen. Die Resultate werden mit Hülfe der Schichtenformel auf den ganzen Körper ausgedehnt.

372) Ellipsoidschichten. Sind die Schichten durch parallele Schnitte zu den Hauptebenen begrenzt, so sind die Formeln aus denen für die Schicht einer ebenso hohen Kugel abzuleiten. Am einfachsten geht man von den Hauptschnitten aus.

Die Kugel vom Radius b hat in der Höhe y den Schnitt

$$x^2\pi = b^2\pi - y^2\pi.$$

Der des Ellipsoids wird daraus abgeleitet, indem man zunächst mit $\frac{a}{b}$, dann mit $\frac{c}{b}$ multipliziert, was

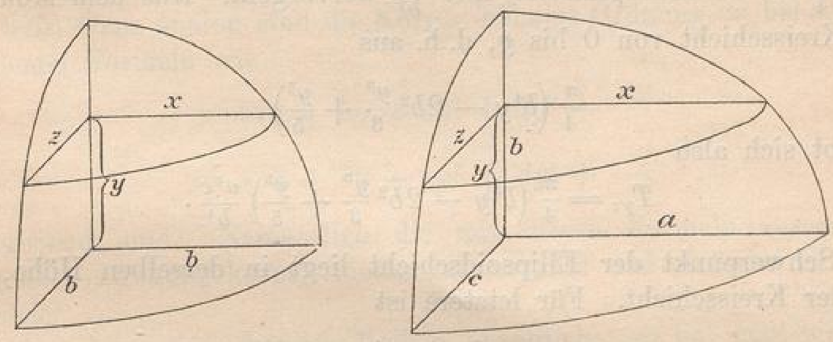
$$q_y = \frac{ac\pi}{b^2}(b^2 - y^2)$$

giebt. Man erhält für die Schicht von 0 bis y den Inhalt

$$\overset{y}{\underset{0}{J}} = \frac{ac\pi}{b^2}\left(b^2\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3}\right),$$

z. B. von 0 bis b den Inhalt des Halbellipsoids $\frac{2}{3}abc\pi$.

Fig. 271.



Multipliziert man den Schnitt mit y^2, so erhält man in Bezug auf die Grundfläche sein Trägheitsmoment

$$\frac{ac\pi}{b^2}(b^2y^2 - y^4).$$

Für die Schicht von 0 bis y ergiebt sich also

$$T_{xz} = \frac{ac\pi}{b^2}\left(b^2\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right).$$

Für das Halbellipsoid wird z. B.

$$T_{xz} = \frac{ac\pi}{b^2}\left(\frac{b^5}{3} - \frac{b^5}{5}\right) = \frac{2}{15}ab^3c\pi.$$

Die Grundfläche hat in Bezug auf x das Trägheitsmoment $\frac{ac^3\pi}{4}$, was aus dem der Kreisfläche, $\frac{b^4\pi}{4}$ durch Multiplikation mit $\frac{ac^3}{b^4}$ (erst mit $\frac{a}{b}$, dann mit $\frac{c^3}{b^3}$) hervorgegangen ist. So ist es mit jedem Schnitte, also auch mit der ganzen Schicht von 0 bis y. Es folgt aus dem entsprechenden Trägheitsmomente der Kugelschicht, welches mit Hülfe von $\frac{x^4\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(b^2 - y^2)^2 = \frac{\pi}{4}(b^4 - 2b^2y^2 + y^4)$ berechnet wird und sich als

$$\frac{\pi}{4}\left(b^4y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)$$

ergiebt,

$$T_{xy} = \frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\frac{ac^3}{b^4}.$$

Für die Schicht von 0 bis b z. B. ergiebt sich

$$\frac{ac^3\pi}{4b^4}\left(b^5 - \tfrac{2}{3}b^5 + \tfrac{1}{5}b^5\right) = \tfrac{2}{15}abc^3\pi.$$

In Bezug auf z hat die Grundfläche das Trägheitsmoment $\frac{ca^3\pi}{4}$, was aus $\frac{b^4\pi}{4}$ durch Multiplikation mit $\frac{a^3c}{b^4}$ hervorgeht. Aus dem Momente der Kreisschicht von 0 bis y, d. h. aus

$$\frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right),$$

ergiebt sich also

$$T_{yz} = \frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\frac{a^3c}{b^4}.$$

Der Schwerpunkt der Ellipsoidschicht liegt in derselben Höhe, wie der der Kreisschicht. Für letztere ist

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{b^2\pi\frac{y^2}{2} - \pi\frac{y^4}{4}}{b^2\pi\frac{y}{1} - \pi\frac{y^3}{3}} = \frac{3y}{4}\cdot\frac{2b^2 - y^2}{3b^2 - y^2}.$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt und die Berechnung von T_x, T_y, T_z und T_p für sein Koordinatensystem sei dem Leser überlassen, da es sich um ganz einfache Rechnungen handelt.

Damit ist auch die Angelegenheit der Ellipsoidsegmente und der beliebigen Horizontalschichten erledigt, denn dabei sind nur Subtraktionen oder Additionen auszuführen.

373) Das Drehungshyperboloid.

Man benutze Figur und Grundformeln des Abschnittes 316, wo sich

1) $$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2$$

ergeben hatte, während die Schwerpunktshöhe war

$$y_s = \frac{3h}{4}\cdot\frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}.$$

Die Trägheitsmomente der in Höhe y liegenden Horizontalschicht sind $x^2\pi y^2$, $\frac{x^4\pi}{4}$ und $\frac{x^4\pi}{2}$, was mit Hülfe von 1) leicht auszurechnen ist. Die Formeln werden denen des Drehungsellipsoids analog.

Der Übergang zum dreiachsigen Hyperboloid erfolgt ebenso, wie der vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen Ellipsoid.