Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Hyperboloid.

ergiebt,

$$T_{xy} = \frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\frac{ac^3}{b^4}.$$

Für die Schicht von 0 bis b z. B. ergiebt sich

$$\frac{ac^3\pi}{4b^4}\left(b^5 - \tfrac{2}{3}b^5 + \tfrac{1}{5}b^5\right) = \tfrac{2}{15}abc^3\pi.$$

In Bezug auf z hat die Grundfläche das Trägheitsmoment $\frac{ca^3\pi}{4}$, was aus $\frac{b^4\pi}{4}$ durch Multiplikation mit $\frac{a^3c}{b^4}$ hervorgeht. Aus dem Momente der Kreisschicht von 0 bis y, d. h. aus

$$\frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right),$$

ergiebt sich also

$$T_{yz} = \frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\frac{a^3c}{b^4}.$$

Der Schwerpunkt der Ellipsoidschicht liegt in derselben Höhe, wie der der Kreisschicht. Für letztere ist

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{b^2\pi\frac{y^2}{2} - \pi\frac{y^4}{4}}{b^2\pi\frac{y}{1} - \pi\frac{y^3}{3}} = \frac{3y}{4}\cdot\frac{2b^2 - y^2}{3b^2 - y^2}.$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt und die Berechnung von T_x, T_y, T_z und T_p für sein Koordinatensystem sei dem Leser überlassen, da es sich um ganz einfache Rechnungen handelt.

Damit ist auch die Angelegenheit der Ellipsoidsegmente und der beliebigen Horizontalschichten erledigt, denn dabei sind nur Subtraktionen oder Additionen auszuführen.

373) Das Drehungshyperboloid.

Man benutze Figur und Grundformeln des Abschnittes 316, wo sich

$$1)\qquad x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2$$

ergeben hatte, während die Schwerpunktshöhe war

$$y_s = \frac{3h}{4}\cdot\frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}.$$

Die Trägheitsmomente der in Höhe y liegenden Horizontalschicht sind $x^2\pi y^2$, $\frac{x^4\pi}{4}$ und $\frac{x^4\pi}{2}$, was mit Hülfe von 1) leicht auszurechnen ist. Die Formeln werden denen des Drehungsellipsoids analog.

Der Übergang zum dreiachsigen Hyperboloid erfolgt ebenso, wie der vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen Ellipsoid.

374) Für das zweimantelige Drehungshyperboloid sind die Formeln des Abschnittes 317 zu Grunde zu legen, mit denen ebenso leicht zu rechnen ist. Auch dort bietet der Übergang zur dreiachsigen Form keine Schwierigkeiten.

Die Prismatoide sind auf Grund des Abschnittes 318 zu behandeln und haben geringeres technisches Interesse, ohne auf Schwierigkeiten zu führen.

F. Einige Körper höherer Ordnung.

375) Ganz analog sind die Körper höherer Ordnung zu behandeln, bei denen Formeln wie

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots$$

oder

$$x^2 = a + by + cy^2 + dy^4 + \cdots$$

mafsgebend sind. Namentlich die mit diesen Formeln zusammenhängenden Drehungskörper bieten interessante und einfache Übungsbeispiele.

Sind die entsprechenden Reihen unendliche, so hat man sich im Konvergenzbereiche zu halten.

Hätte man das dreiachsige Ellipsoid direkt berechnet, so hätten sich als Horizontalschichten Ellipsen mit den Halbachsen $a_y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ und $c_y = \frac{c}{b}\sqrt{c^2 - y^2}$ ergeben, was auf Trägheitsmomente von den Formen

$$a_y\, c_y \pi y^2 \quad \text{oder} \quad \frac{ac\pi}{b^2}\sqrt{(b^2 - y^2)(c^2 - y^2)},$$

$$\frac{\pi a_y c_y^3}{4}, \quad \frac{\pi a_y^3 c_y}{4}, \quad \frac{\pi a_y c_y}{4}\left(a_y^2 + b_y^2\right)$$

geführt haben würde, die sämtlich irrational sind. Die Irrationalitäten können mit Reihenentwickelung mittels des binomischen Lehrsatzes behandelt werden, was langwierig ist und zu den anschauungsmäfsig abgeleiteten Resultaten zurückführen mufs.

376) Bezüglich der entsprechenden Drehungskörper lassen sich einige Resultate des Abschnittes IV benutzen. Hierher gehört die Formel

$$h_s = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}$$

im Abschnitte 116 und der dazu gehörige Symmetriefall, die Formel

$$T = J\left(\varrho^2 + 3\varrho_1^2\right)$$