



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

F. Einige Körper höherer Ordnung.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

374) Für das zweimantelige Drehungshyperboloid sind die Formeln des Abschnittes 317 zu Grunde zu legen, mit denen ebenso leicht zu rechnen ist. Auch dort bietet der Übergang zur dreiachsigen Form keine Schwierigkeiten.

Die Prismatoide sind auf Grund des Abschnittes 318 zu behandeln und haben geringeres technisches Interesse, ohne auf Schwierigkeiten zu führen.

F. Einige Körper höherer Ordnung.

375) Ganz analog sind die Körper höherer Ordnung zu behandeln, bei denen Formeln wie

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots$$

oder

$$x^2 = a + by + cy^2 + dy^4 + \dots$$

maßgebend sind. Namentlich die mit diesen Formeln zusammenhängenden Drehungskörper bieten interessante und einfache Übungsbeispiele.

Sind die entsprechenden Reihen unendliche, so hat man sich im Konvergenzbereiche zu halten.

Hätte man das dreiachsige Ellipsoid direkt berechnet, so hätten sich als Horizontalschichten Ellipsen mit den Halbachsen $a_y = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ und $c_y = \frac{c}{b} \sqrt{c^2 - y^2}$ ergeben, was auf Trägheitsmomente von den Formen

$$a_y c_y \pi y^2 \text{ oder } \frac{ac\pi}{b^2} \sqrt{(b^2 - y^2)(c^2 - y^2)},$$

$$\frac{\pi a_y c_y^3}{4}, \frac{\pi a_y^3 c_y}{4}, \frac{\pi a_y c_y}{4} (a_y^2 + b_y^2)$$

geführt haben würde, die sämtlich irrational sind. Die Irrationalitäten können mit Reihenentwicklung mittels des binomischen Lehrsatzes behandelt werden, was langwierig ist und zu den anschauungsmäßig abgeleiteten Resultaten zurückführen muß.

376) Bezüglich der entsprechenden Drehungskörper lassen sich einige Resultate des Abschnittes IV benutzen. Hierher gehört die Formel

$$h_s = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}$$

im Abschnitte 116 und der dazu gehörige Symmetriefall, die Formel

$$T = J (\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$$

des Abschnittes 125 über den dort behandelten Symmetriefall und das Beispiel des Ringkörpers mit Kreisquerschnitt, für den in Nr. 126

$T_y = 2\varrho r^2 \pi^2 (\varrho^2 + \frac{3}{4} r^2)$ berechnet ist, so daß T_{xy} und T_{zy} halb so groß sind.

Schwerer ist T_{zx} zu berechnen. Der Schnitt in der Höhe y über dem horizontalen Hauptschnitt hat die Radien

$$e_1 = \varrho + \sqrt{r^2 - y^2},$$

$$e_2 = \varrho - \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Die Schnittfläche wird also

$$\begin{aligned} q_y &= \pi (e_1^2 - e_2^2) = \pi (e_1 + e_2) (e_1 - e_2) = \pi 2\varrho \cdot 2\sqrt{r^2 - y^2} \\ &= 4\varrho\pi\sqrt{r^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Ihr Trägheitsmoment in Bezug auf den horizontalen Hauptschnitt ist also

$$1) \quad q_y y^2 = 4\varrho\pi y^2 \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Der variable Ausdruck $y^2 \sqrt{r^2 - y^2}$ ist aber weiter nichts, als das Trägheitsmoment der Querlinie des Viertelkreises in Bezug auf den horizontalen Durchmesser. Die Anwendung der Schichtenformel auf diesen Ausdruck gibt also für die Schichten von 0 bis r das Trägheitsmoment des Viertelkreises, d. h. $\frac{r^4 \pi}{16}$.

Demnach giebt $4y^2 \sqrt{r^2 - y^2}$ für dieselben Schichten den Ausdruck $\frac{r^4 \pi}{4}$. Für die obere Hälfte des

Körpers wird demnach

$$T = \frac{\varrho \pi r^4 \pi}{4},$$

für den ganzen Körper entsteht

$$2) \quad T_{xz} = 2\varrho\pi \frac{r^4 \pi}{4} = 2\varrho\pi t_x,$$

wo t_x das Trägheitsmoment des Kreisschnittes für die x -Achse bedeutet. Aus T_{xz} und den übrigen Trägheitsmomenten folgt nun leicht

$$T_z = T_x = \varrho r^2 \pi (\varrho^2 + \frac{5}{4} r^2) = J(\frac{\varrho^2}{2} + \frac{5}{8} r^2) \quad \text{und} \quad T_p = J(\varrho^2 + r^2).$$

377) Satz für Guldinsche Körper, deren erzeugende Fläche symmetrisch gegen eine Parallele zur Drehungsachse ist.

Fig. 272.

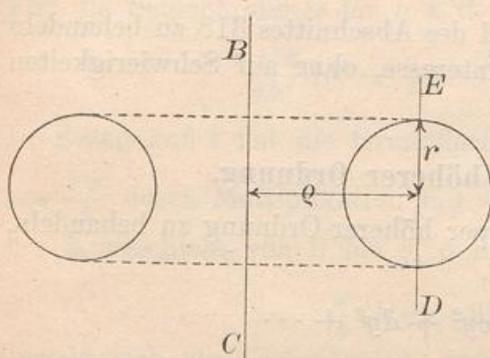
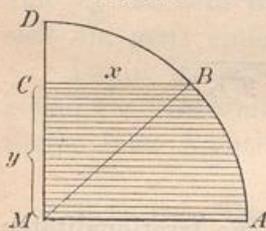


Fig. 273.



Hat der Körper die nebenstehende Gestalt und hat der in der Höhe y liegende Horizontalschnitt die Radien e_1 und e_2 , so ist die Fläche des Schnittes gleich $\pi(e_1^2 - e_2^2)$ und sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene xz ist $\pi(e_1^2 - e_2^2)y^2 = 2\pi \frac{e_1 + e_2}{2} (e_1 - e_2)y^2$. Dabei ist $\frac{e_1 + e_2}{2}$ die Entfernung ϱ der Symmetrielinie von der Achse, $(e_1 - e_2)y^2$ ist das Trägheitsmoment des Flächenquerschnittes in Bezug auf die X -Achse, welches t_x sei. Folglich ist nach der Schichtenformel für den ganzen Körper

$$T_{xz} = 2\varrho\pi t_x.$$

Nun war in Nr. 125 für solche Körper gezeigt, dass $T_y = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$ war, so dass $T_{yz} = T_{xy} = \frac{1}{2} J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$ ist, demnach ist für den vorliegenden Symmetriefall

$$\begin{aligned} T_z = T_x = T_{xy} + T_{xz} &= \frac{1}{2} J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + 2\varrho\pi t_x \\ &= 2\varrho\pi \left[\frac{F}{2}(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + t_x \right] \end{aligned}$$

und

$$T_y = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + 2\varrho\pi t_x = 2\varrho\pi \left[F(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + t_x \right].$$

Hier bedeutet ϱ_1 den Trägheitsradius der Fläche in Bezug auf die Symmetrieachse.

Daraus folgt, dass eine große Zahl von Drehungskörpern, von denen die mit Hilfe von

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots$$

erzeugten nur spezielle Fälle sind (es handelt sich um den Sonderfall $\varrho = 0$) bezüglich ihrer Hauptschnitte vollständig behandelt werden können. Die für Räder, Kreisscheiben, Kugeln, Hohlcylinder u. dgl. gelösten Aufgaben über die Energie drehend und fortschreitend bewegter Körper, über excentrischen Stofs und Pendelbewegungen, über Fadenspannung und Rollen und Gleiten auf schiefer und horizontaler Ebene lassen sich also, soweit es sich um die Hauptschnitte und Hauptachsen handelt, auch für die hier besprochenen Drehungskörper lösen.

Fig. 274.

